

# なぜ降雨イベント間隔とイベント時降雨量は指数分布に従うのか？

04/20/2004

熊谷 朝臣

私の論文の中で (Kumagai et al, 2004)、擬似降雨時系列を作ってこれを入力とした (超簡単な) 水循環シミュレーションを走らせました。この擬似降雨は、降雨イベントの時間間隔とイベント時の降雨量が指数分布で表現されるとして (例えば、Laio et al., 2001; 彼らは”marked Poisson process”と呼んでいる)、これらの確率密度関数に従う乱数発生により作られました。

指数分布といえば、確率密度関数が、

$$p(t;\lambda) = \lambda \exp(-\lambda t) \quad (1)$$

という式で表現されます。このとき  $1/\lambda$  は平均値であり標準偏差でもあります (自分で試してみてください)。つまり、指数分布はたった一つのパラメータ  $\lambda$  によって表現されるのです。そして、降雨イベントの時間間隔とイベント時降雨量という現象は、この単純な指数分布に驚くほど良く当てはまります。なんでそんなことが起きるのでしょうか？

実は、これらの現象が指数分布で表現できることは、きれいに数学的に証明できます。以下では、(このことについて、たまに質問を受けて、それをいちいち答えるのが面倒臭くなったので) それを実際にやって見せます。なお、ネタ本として Berg (1983) を挙げときます。

まず、降雨イベントの時間間隔について。まず、時間 ( $t$ ) 軸をとります。時刻 0 から  $t$  までの時間を  $n$  等分しましょう。つまり時刻 0 から  $t$  までの時間が  $t/n$  という時間間隔で区分されることになります (図 1)。

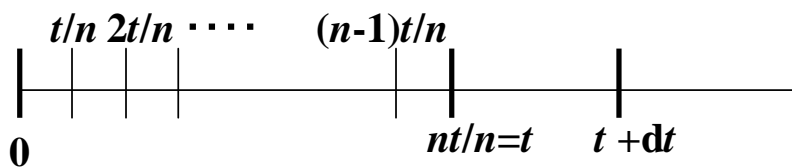


図 1. 時間軸

単位時間当り事象が起きる確率を  $\lambda$  とします。すると、図 1 の時間軸の最初の区間 ( $0 \sim t/n$ ) で事象が起こる確率は  $\lambda t/n$  となります。この区間で事象が起きない確率が  $1 - \lambda t/n$  になるのは当然ですね。なお、 $n$  は十分に大きく、同じ区間で事象が 2 度以上起こることは無いと仮定されます。

すると  $n$  個の区間で事象が一度も起きない確率は  $(1 - \lambda t/n)^n$  となります。そして、区間 ( $t \sim t + dt$ ) で事象が起きる確率は  $\lambda dt$  となります。よって、区間 ( $t \sim t + dt$ ) で初めて事象が起こる確率は、

$$p(t; \lambda) dt = \left(1 - \lambda \frac{t}{n}\right)^n \lambda dt \quad (2)$$

もう、おわかりですね。 $(1 - \lambda t/n)^n$  の  $n \rightarrow \infty$  は  $\exp(-\lambda t)$  になりますから、ずばり、(1) 式が得られることになります。

確認しましょう。 $t$  は事象が起きるまでの時間を表現しています。2つの事象の間の時間、つまり、イベントの時間間隔なのです。そして、その平均値（平均時間間隔）は(1) 式の説明で述べたように、 $1/\lambda$  で示されます。

さて、次はイベント時の降雨量についてです。

ここでは、まず  $h$  という雨量を与えます。この  $h$  がある降雨イベントに割り当てられることを考えてみましょう。図1と同じく雨量 ( $h$ ) 軸なんてのを考えてみます。また、同じように小雨量区間  $(0, h/n, 2h/n, 3h/n \cdots nh/n)$  を考えます。そこで、ある区間内で区切りができる確率を  $1/\eta$  とします。なんで、分数の形になってるかという、この方が後で見栄えが良いからで、たいした意味はありません。後ほどわかります。

さて、ガンガン行きましょう。 $h$  なる雨量がある降雨イベントに割り当てられるためには区間  $0 \sim h$  で区切りが生じないようにしなければなりません。この確率は  $(1 - h/n\eta)^n$  となります。そして、区間  $(h \sim h + dh)$  で区切りが生じる確率は  $dh/\eta$  となります。よって、区間  $(h \sim h + dh)$  で初めて区切りが生じる確率（ある降雨イベントに雨量  $h$  が割り当てられる確率）は、

$$p(h; \eta) dh = \left(1 - \frac{h}{\eta n}\right)^n \frac{1}{\eta} dh \quad (3)$$

となります。これも指数関数で表現できて、

$$p(h; \eta) = \frac{1}{\eta} \exp\left(-\frac{h}{\eta}\right) \quad (4)$$

となります。この指数分布の平均値は  $\eta$  です（これが、”  $1/\eta$  ” の理由です）。つまり、 $\eta$  は降雨イベント時の平均降雨量ということになります。

## 引用・参考文献

Berg (1983) *Random Walks in Biology*. Princeton University Press.

Kumagai et al. (2004) *Water Resources Research* **40**, 10.1029/2003WR002226.

Laio et al. (2001) *Advances in Water Resources* **24**, 707.

□