

ラグランジュの乗数法

10/31/2005

11/25/2010 改訂 熊谷 朝臣

先日、久しぶりに測量をやりました。そして、その夜、夕ご飯時、女房と測量結果の誤差配分の話になりました。女房は林学出身で、測量士補（当時、林学出身なら誰でももらえた）の資格まで持っています。

女房：測量の間違った分なんてのは、結果がそれっぽく見えるよう、適当にばらまきやいいのよ。

私：ちょっと待て。あんた、測量の授業で誤差配分の理論について習わなかったんか？

女房：そんなのやるわけない。測量っちゅうのは、間違えるのが当たり前。いかに誤差をごまかすか、それが重要。私は、測量実習で、みんなにそれを力説して、みんな、それに感動しとった。それが、測量っちゅうもんよ（意味不明）。

実は、この測量結果の誤差配分の理論に「ラグランジュ (Lagrange) の乗数法」が使われます。測量結果には角等式や辺等式といった幾何学的条件があります。この条件のもとで、測定値と最確値の間の残差の関数が最小になるように、最適な残差を求め、最確値（修正された測定値）を決めるのです。「ラグランジュの乗数法」とは、ある関数を満足しなければならないような条件で、別のある関数の極値を与える点を求める方法です。測量に限らず、色々な局面でこの方法が有用なのは容易に想像できると思います。例えば、資源が限られている場合の、その資源の最適配分なんてのは、典型的な例でしょう。

そこで本稿では、この色んなところで役立つような「ラグランジュの乗数法」の解説をします。本稿は、女房と彼女の同級生達に捧げたいと思います。

関数 f, g_1, g_2, \dots, g_n を考えます。「 $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)$ ($1 \leq i \leq m$) の極値を求めるときに $g_j = 0$ ($1 \leq j \leq n$) を満足しなければならない。そのときの点 a を求める。」という問題を考えます。

まず、次のような関数を作ります。

$$F = f + \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j \quad (1)$$

ここで、 λ_j は適当な定数で、あとで決めるものです。

明らかに、 $g_j = 0$ ($1 \leq j \leq n$) を満足する点 a に対して、(1) 式は $F = f$ となることに注意して下さい。これを頭に入れながら、まず、 F が極値となる条件を考えます。つまり、

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

ここで、点 a は $\{x_i\}$ ($1 \leq i \leq m$) として表現されていることをもう一度確認して下さい。(2)

式を解くということは、 F の極値を求めることですが、これは λ_j に依存します。そこで、(2) 式で求められた F が極値となる点が $g_j=0$ を満足するように λ_j を選ぶことにします。その点では $g_j=0$ なのですから、 $F=f$ であり、“その点” とは f が極値となる点 a に他ならない、ということになります。

まとめましょう。「 f の極値を求めるときに $g_j=0$ ($1 \leq j \leq n$) を満足しなければならない。そのときの点 a を求める。」ために、解くべき方程式は、

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

$$g_j = 0 \quad (4)$$

$$(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

という連立方程式です。未知数は $x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ の合計 $m+n$ 個になりますが、(3)、(4) 式からなる方程式の数も $m+n$ 個になることを確認して下さい。

□