

ヤコビアンを使った積分変数変換

5/1/2007

熊谷 朝臣

表題の通り、ヤコビアン (Jacobian) って積分、特に、二重積分の変数変換に利用するものとはか考えてなかったのですが、あるデータ y の密度関数 $g(y)$ とデータ y の変換によって得られた $z (= h(y))$ の密度関数 $f(z)$ の関係って、ヤコビアンで繋げられるんですよね。私の最近の論文では、判で押ししたように、確率分布で表現された入力をモデルを通して計算して、それで得られた結果を確率分布で表現する、なんてことをやっています (Kumagai et al., 2004a, 2004b, 2005a, 2005b, 2007)。よくよく考えると、これらの研究ってヤコビアンを使えば、もっとエレガントにできるんじゃないかな、と思ったのです。

そこで本稿では、(新たな研究で使う前に、周りの人に“常識”として知っといてもらおうという魂胆から) まず、単純に積分の変数変換からヤコブ行列とヤコビアンの紹介を行います。次の稿でデータの変換前後の密度関数の関係をヤコビアンを使って表現することを紹介します。

なお、注意ですが、以下の導出の仕方はかなり数学的厳密性に欠けます。あと、証明も直感に頼っていて、全く厳密ではありません。他の**研究資料**にも言えることですが、数学を専門にやってる人は読まない方が良いでしょう。きっと、頭痛が起きます。が、私のような数学を単なる道具として見ている人間には、きっと、分かり易いと思います。

さてさて、まず、高校数学から。 $f(x)$ の積分で x を u に変換するとき、

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(x(u)) \frac{dx}{du} du \quad (1)$$

となるのは知ってますよね。じゃあ、これを xy 平面上の領域 R から uv 平面上のある領域 R' への積分変数変換に拡張します。

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) X du dv \quad (2)$$

まあ、こんな感じになるでしょう。(2) 式は、 xy 平面上の領域 R における $f(x, y)$ の面積 (左辺) は、 f を $x = x(u, v)$ 、 $y = y(u, v)$ を使って uv 平面上の領域 R' へ移したときの面積 (右辺) に等しいと言ってます。(1) 式では、 $dx = (dx/du) du$ という変換をやっています。ここでの“ dx/du ” に相当する係数として $dx dy = X du dv$ なる X を決める必要があるでしょう。

ここで (いきなり)、 xy 平面上での $x = x(u, v)$ 、 $y = y(u, v)$ それぞれの全微分を考えます。それを行列で表現すると、

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (3)$$

となります。(3)式を眺めていると、ここで出てくる 2×2 行列が \mathbf{X} を求める鍵なのかな、という気がしてきませんか？実は、この行列こそが、**ヤコブ行列 \mathbf{J}** と呼ばれているのです。

よーく(3)式を眺めると、 uv 平面上の微小ベクトル (du, dv) は、この \mathbf{J} によって xy 平面上の微小ベクトル (dx, dy) に移されていることが分ります。

$dxdy = \mathbf{X}dudv$ に話を戻します。 uv 平面上で単位ベクトル $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$ を考えます。もちろん面積は1です。これらの単位ベクトルは(3)式により xy 平面上のベクトル $(\partial x/\partial u, \partial y/\partial u)$ 、 $(\partial x/\partial v, \partial y/\partial v)$ に移されます。この2つのベクトルによる面積は、 $|(\partial x/\partial u)(\partial y/\partial v) - (\partial y/\partial u)(\partial x/\partial v)|$ になります。これは、 \mathbf{J} の行列式 $\det \mathbf{J}$ の絶対値に等しいです。

よって、 uv 平面上の微小面積 $dudv$ の $|\det \mathbf{J}|$ 倍が xy 平面上の微小面積 $dxdy$ になりそうだと想像できます。(“想像”で止めておいた方が無難です。本気で証明するのは大変で、“危険”です。)

もうお分かりですね、 $dxdy = |\det \mathbf{J}| dudv$ となります。そして、この $\det \mathbf{J}$ こそが**ヤコビアン**と呼ばれるものです。整理のために、(2)式を書きなおしておきましょう。

$$\iint_R f(x, y) dxdy = \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) |\det \mathbf{J}| dudv \quad (4)$$

ですね。ここらで止めておきますが、 n 次元への拡張も、想像するのはそんなに難しくないと思います。

引用・参考文献

- Kumagai et al. (2004a) *Advances in Water Resources* **27**, 1135.
 Kumagai et al. (2004b) *Water Resources Research* **40**, 10.1029/2003WR002226.
 Kumagai et al. (2005a) *Agricultural and Forest Meteorology* **135**, 110.
 Kumagai et al. (2005b) *Forest Ecology and Management* **206**, 191.
 Kumagai et al. (2007) *Tree Physiology* **27**, 161.

□