

ハーゲン-ポアズイユ流れを理解しよう

10/08/2004

熊谷 朝臣

私の興味の1つは樹木の水分通導・貯留機構だったりします (Kumagai, 2001)。Kumagai (2001)の中では、木を単なる毛細管の集まりと見なしてその水分通導・貯留を徹底して力学的に表現してみせました。私の場合は毛細管の集まり (つまり、導管の集まり) をバルクで考えて、どちらかと言えば木を多孔質媒体と見なしたのですが、実は、導管を円管路と考えるとその通導機能を考える”正統的”手法が古くから存在します (例えば、Tyree and Zimmermann (2002)の教科書など)。この正統的手法の基礎理論が、流体力学の教科書でお馴染みの「ハーゲン-ポアズイユ (Hagen-Poiseuille) 流れ」です。流体力学とか水理学をまじめに勉強した人にとっては、まさに基礎中の基礎であるハーゲン-ポアズイユも生物系 (生理生態) の人にとっては「なんじゃ、そりゃ？」らしく、きちんと理解している人は少ない (ほとんどいない?) ようです。

と言う訳で、本稿では、かの有名な「流量は半径の4乗に比例する」(または、「平均流速は半径の2乗に比例する」) というハーゲン-ポアズイユの法則を導いてみます。

導管をまっすぐで径が一様な無限に長い円管と見なし、その中の定常的な流れを考えます。導管の径は小さく、また導管内の水流は流速が小さいので、レイノルズ数が十分小さい層流状態であると見なせます。

さて、円筒座標を使って導管内の流体塊を考えてみましょう (図1)。

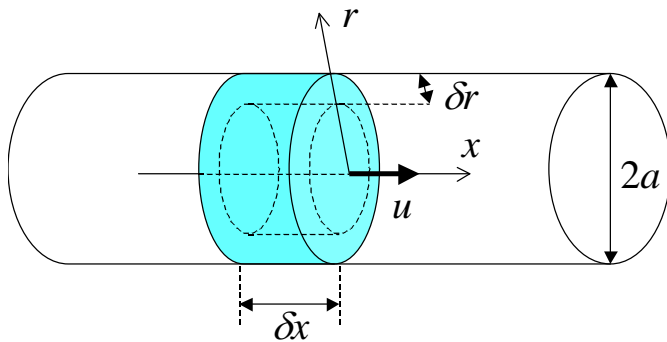


図1. 円筒座標で表現された導管内の流体塊

流体塊の左端からかかる圧力を P とすると右端での圧力は $P + (\partial P / \partial x) \delta x$ です。と言うことは、流体塊を流速 u で右方向へ駆動する圧力差は、

$$(\text{圧力差}) = P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \delta x \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} \delta x \quad (1)$$

で表現されます。ここで、流体塊の中で、さらに、幅 δr のドーナツ状の流体塊を考えます。このドーナツ状流体塊の断面積は、 δr を微小とすると $2\pi r \delta r$ となります。よって、ドーナ

ツ状流体塊にかかる力 F_1 は、

$$F_1 = -2\pi r \delta r \frac{\partial P}{\partial x} \delta x \quad (2)$$

となります。次に、ドーナツ状流体塊と円管の壁面との間のせん断応力を τ とすれば、せん断力は $2\pi r \delta x \tau$ となります。すると、ドーナツ状流体塊とその内側の円盤状の流体塊との間のせん断力は $2\pi r \delta x \tau + (\partial(2\pi r \delta x \tau) / \partial r) \delta r$ で、ドーナツ状流体塊にかかるせん断力差 F_2 は、

$$F_2 = 2\pi r \delta x \tau - \left(2\pi r \delta x \tau + \frac{\partial(2\pi r \delta x \tau)}{\partial r} \delta r \right) = -2\pi \delta x \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} \delta r \quad (3)$$

となります。力のつりあいから $F_1 = F_2$ ですから、(2)、(3) 式より、

$$\frac{\partial(r\tau)}{\partial r} - r \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

が得られます。ニュートン流体ということで、せん断応力は粘性係数 μ と変形速度の関係として、

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} \quad (4)$$

と表されます。すると、(4) 式を (3) 式に代入することで、いかにも解けそうな微分方程式

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{r}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (5)$$

が得られます。もう、これは高校数学の知識で解けますね。境界条件は、壁面で $u = 0$ 、円管の中心で特異性がない、となります。結果、

$$u = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{dP}{dx} \right) (a^2 - r^2) \quad (6)$$

という半径方向への流速分布が得られます。その流速分布形は、 $(\partial P / \partial x) < 0$ であることを考えると図2のような放物線になります。

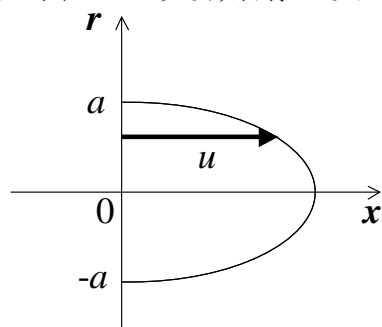


図2. 導管内の水流の流速分布

さて、(6) 式で表現された流速分布に色々細工を加えていきましょう。まず、流速分布を x 軸周りで回転させた体積を求めましょう (これも高校数学ですね)。この計算で得られるのは、導管内の水流の流量 Q です。

$$Q = \left(-\frac{dP}{dx} \right) \frac{\pi a^4}{8\mu} \quad (7)$$

(7) 式を見れば明らかですね。そう、「流量は半径の4乗に比例する」のです。さらに、(7) 式を導管の断面積 πa^2 で割ります。すると得られるのは導管内の水流の平均流速 U_0 です。

$$U_0 = \left(-\frac{dP}{dx} \right) \frac{a^2}{8\mu} \quad (8)$$

「平均流速は半径の2乗に比例する」のは明らかですね。最後にもう1つ細工しましょう。 $r=0$ 、つまり導管中心の流速を考えます。

$$u|_{r=0} = \frac{a^2}{4\mu} \left(-\frac{dP}{dx} \right) = 2U_0 \quad (9)$$

図2を見ても明らかなように導管中心では流速は最大になります。ですから、(9) 式の示すところは、「管中心の流速（最大流速）は平均流速の2倍である」となります。

引用・参考文献

Kumagai (2001) *Agricultural and Forest Meteorology* **109**, 105.

Tyree and Zimmermann (2002) *Xylem structure and the ascent of sap*. Springer.

□