

# 数学リメディアル教材

筑波大学生物資源学類

平成 28 年度



# はじめに

本書は高校～大学初級の数学教材です。中学数学を完全に習得している読者を想定し、筑波大学生物資源学類の1年次の基礎数学・物理学・数理科学演習・統計学入門等の授業で使います。

高校数 III 未習の人は多分、中学数学も抜けてるでしょうから、まず中学数学を復習してから取り組もう。そして、できる友人や教員にたくさん質問し、人よりも努力しよう。

高校数 III 既習の人は、ナメてかからないで、謙虚に勉強し直そう。一見簡単そうに見えても手強いよ。

## 正しい勉強の鉄則

正しい方法でやらねば勉強は身につけません。以下の鉄則を守ろう。

### 鉄則 1: 毎日やる!

忙しくても、疲れていても、旅行中でも、どんなときでも少しでもいいから勉強を続ける。途切れさせない。休んでいいのは、病気や怪我でドクターストップがかかったときだけ。

### 鉄則 2: 丁寧に!

その場しのぎの雑な勉強(つまみ食い・読み飛ばし)は何も身につかない。急がばまわれ。全ての解説を読み、実際に鉛筆を持って、全ての証明と例を再現し、問題を解く。わかったこととわからないことを明確に区別し、確実にわかるところに戻る。証明や計算は、途中を飛ばさない。わからないことを必死でやみくもに詰め込むのはヤメような。

### 鉄則 3: 質問する!

解説を読み込んででもわからなければ、躊躇せず、教員でも友人でも、とにかくわかっている人に教えてもらおう。友達と相談し、助け合おう。そういう「コミユカ」も立派な学力!

### 鉄則 4: 定義を大切にする!

定義は、スポーツのルールや、物語の登場人物みたいなもの。覚えないと話になりません。「意味」とか「イメージ」はその後にできるのです。定義を覚え、その上で例や問題を考えてれば、じきにわかるのです。知らない人でも、名前と顔を覚えれば仲良くなれるのと同じ。そして、困ったら定義に戻る!

ちなみに、定義は、一字一句をたがわず丸暗記するようなものではなく、論理的に同じなら、覚えやすいように適当に言い換えても OK。定義の確認には巻末の索引を活用しよう!

### 鉄則 5: 紙をけちらない!

難しいものほど、紙に書いて考えよう。頭の中のイメージや論理を紙の上に可視化しよう。いきなり正解を書こうとせず、当たり前のことや、無駄なようなことも書き出し、式変形や計算は暗算で済ませず、途中経過も書こう。他の人が見てもわかるように、ちゃんと整理して筋の通った解答を書こう。そうすればわかることが多いのです。

そのために、紙はぜいたくに使おう。式が短いと右側に空白ができてしまうけど、「もったいない」とか考えずに、どんどん下に書き進める。1問終わったら次のページ、くらいの勢いで OK。

### 鉄則 6: 誤植訂正は速攻で!

大学教材には誤植はつきもの。この教材も入念にチェックしていますが、毎年必ず 10 個近くの誤植が見つかります。誤植訂正が出たら、すぐにテキストの該当部分を修正。

### 鉄則 7: いらんことを考えない!

この鉄則は、以上の鉄則のまとめです。毎日やる癖をつけるのは、「今日は勉強しようかどうしようか」と悩む無駄を省くため。丁寧にやれば、ケアレスミスが減り、勉強したことが積み上がって行くので無駄に考えることが減る。質問すれば、簡単なことの見落としや、自分でいくら考えてもわからなかったことがわかる。定義は数

学の本質を全部含んでいるので、定義に戻って素直に考えればすんなりわかる。紙をぜいたくに使えば、脳の負担が軽減され、ケアレスミスを見つけやすくなり、本質的な部分に思考を集中できる。

ちなみに、受験秀才は、なまじセンス（ひらめきや直感）が良いので、それに頼ることに慣れ過ぎてしまい、大学では「いらんこと」を考えて迷走する傾向があります。

## 本書の使い方

関数電卓を用意せよ：実際に数値を計算する問題もあるので、関数電卓（三角関数や指数・対数等が計算できる電卓）を用意しましょう。高機能な電卓はとっつきにくいので、安価でシンプルなもの（といっても四則演算しかできないのはダメ）をお薦めします。いろんな授業で使います。スマホやタブレットでも代用可能ですが、それらはテストでは使えません。

参考書：基本的に不要。どうしてもというなら...

小中学校の復習をしたい人へ：「日本一わかりやすい数学の授業」「日本一わかりやすい数学の授業2」「日本一わかりやすい数学の授業3」（創拓社出版）... 小学校高学年から中学までのレベルで、雰囲気はこどもっぽいですが、数学の本質を鋭く捉えている本です。

理科（物理など）の話題についていけない人へ：「発展コラム式 中学理科の教科書 第1分野」（ブルーバックス）... 中学理科をナメてはいけません。この参考書を全部きちんと理解すれば、本書を読むのに困らないでしょう。

### 本書の構成：

- 高校数学を取捨選択し、並べ替えました。特に、早い段階で微積分を学びます。授業ですぐに必要なからです。一方で、2次関数の解の分離や平面図形などはぱったり落としました。
- 高校と違う記号（ベクトルの太字表記等）を使ったり、高校で学ばない数学（対数グラフ、不偏分散、微分方程式、集合の直積など）を少し扱っています。
- 数学類ではないので、厳密性にはそれほどこだわっていません。例えば微積分の極限操作は、数学類で学ぶ理論（ $\epsilon - \delta$  論法）には依らず、近似的・直感的な理解で良しとします。
- そのかわり計算機（電卓やパソコン）をガンガン使います。計算機で数値やグラフを実際にいじって納得することを大切にします。そういう例や問は必ず

実際に自分で計算機を操作してみてください。

- 問題には解答をつけましたが、一部の問題の解答は「略」としました。理解せずにやみくもに解答を丸写しする先輩がこれまでにいたからです。恨むなら先輩を恨んで下さい（^\_^）。「略」とした問題のほとんどは、本文を丁寧に読めば簡単にわかるものです。
- 初出の重要語には 下線 をつけました。これらは索引に載っています。
- 学習の上で勘違いしやすい重要な考え方は、太字で書きました。
- 特に、資源生が間違いやすいことを、「よくある間違い」として示しました。この部分で間違えると、テキストをきちんと読んでいないとみなされ、成績評価で痛い目に会います！
- 各章末に、「演習問題」を設けました。これらはそれまでの内容を総合的に使う問題であり、数学以外の様々な分野への応用例等も盛り込んでいます。それほど難しくはありませんので、自力で考え、楽しみながら取り組んで下さい。なお、これらの解答は、原則的に省略しました。高校数学だけを手っ取り早く自習したいという人は、これらを飛ばしても構いません。
- 脚注（各ページの下欄外コメント）は、理解の補助と、大学数学へ橋渡しのためです。もし脚注が理解できなくても、本文が理解できればOK。
- 「証明終わり」を ■ という記号で表します。その他の記号は、第13章を参照してください。

誤植や間違いを見つけたら、以下にご連絡下さい：

nasahara.kenlo.gw @ u.tsukuba.ac.jp

訂正は、次のウェブサイトに掲示します：

[http://www.agbi.tsukuba.ac.jp/~shigen\\_remedial/](http://www.agbi.tsukuba.ac.jp/~shigen_remedial/)

### 謝辞

微分の定義や定式化は、数理物質科学研究科の西村泰一先生の講義を参考にしました。「よくある質問」は、主に平成20年度以降の「基礎数学 (I, II)」「数理科学演習」でのアンケート等から作りました。意見を寄せてくれたり誤植を教えてくれた受講生とTAの皆さん、特に山崎一磨君と片木仁君に感謝します。組版や作図は、LaTeX (Version 3.1415926), emath (Version f051107c), GNUPLOT (Version 4.6), LibreOffice (Version 4.2.8.2), Ubuntu Linux 14.04LTS で行いました。

平成28年3月23日

筑波大学生物資源学類補習担当 奈佐原顕郎

# 目次

はじめに	i
第 1 章 数と演算	1
1.1 等号	1
1.2 足し算・掛け算と自然数	1
1.3 引き算と整数	2
1.4 割り算と有理数	2
1.5 実数	2
1.6 定義について	3
1.7 無限大	4
1.8 四則演算	4
1.9 数式の書き方	6
1.10 累乗の指数を拡張する	7
1.11 関数電卓の使い方	8
1.12 ネイピア数	9
1.13 対数	9
1.14 ベクトル	10
1.15 位置ベクトル	12
1.16 有効数字	13
1.17 有効数字の計算	14
1.18 ギリシャ文字	16
第 2 章 物理量と単位	19
2.1 物理量は, 数値 × 単位	19
2.2 次元	20
2.3 単位の掛け算と割り算	20
2.4 単位を埋め込んで計算せよ!	21
2.5 無次元量	22
2.6 SI 単位系	22
2.7 単位の換算	25
2.8 力の単位	26
2.9 エネルギーと圧力の単位	27
2.10 dimension check	29
2.11 例外!	29
第 3 章 代数	33
3.1 大小関係	33

3.2	絶対値	34
3.3	階乗	34
3.4	場合の数	34
3.5	多項式	35
3.6	二項定理	36
3.7	平方完成	36
3.8	代数方程式	37
3.9	恒等式	38
3.10	数列	39
3.11	等差数列と等比数列	39
3.12	単調増加・単調減少・収束・発散	40
3.13	数列の和	41
3.14	数学的帰納法	42
3.15	表計算ソフト	43
3.16	表計算ソフトで数列の和	44
第4章	関数	49
4.1	関数のグラフ	49
4.2	平行移動・拡大縮小・対称移動	50
4.3	一次関数と直線のグラフ	52
4.4	関数の和のグラフ	53
4.5	グラフの読み取りと直線近似	53
4.6	関数のグラフと、方程式の解	54
4.7	表計算ソフトでグラフを描く	55
4.8	関数のグラフと不等式の解	56
4.9	偶関数・奇関数	57
4.10	合成関数	58
4.11	逆関数	59
4.12	陰関数	60
4.13	関数のグラフを描く手順	61
第5章	微分	65
5.1	微分の定義	65
5.2	数値微分	69
5.3	微分の公式	69
5.4	線型近似	74
5.5	高階導関数	75
5.6	微分ができない場合	75
5.7	速度・加速度	77
5.8	ベクトルの微分	79
5.9	極大・極小と微分係数	80
5.10	偶関数や奇関数の微分	81
第6章	指数・対数	85
6.1	指数関数	85

6.2	対数 . . . . .	87
6.3	対数微分 . . . . .	89
6.4	ガウス関数 . . . . .	90
6.5	対数グラフ . . . . .	90
6.6	指数関数の微分方程式 . . . . .	92
6.7	放射性核種 (放射能) の崩壊 . . . . .	93
6.8	化学反応速度論 . . . . .	94
6.9	ロジスティック曲線 . . . . .	94
<b>第 7 章</b>	<b>三角関数</b>	<b>99</b>
7.1	三平方の定理 . . . . .	99
7.2	弧度法 . . . . .	99
7.3	弧度法の応用: ビッターリッヒ法 . . . . .	101
7.4	三角関数 . . . . .	102
7.5	三角関数の公式 . . . . .	102
7.6	加法定理 . . . . .	103
7.7	三角関数のグラフ . . . . .	104
7.8	三角形と三角関数 . . . . .	105
7.9	正弦定理と余弦定理 . . . . .	106
7.10	逆三角関数 . . . . .	107
7.11	三角関数の微分 . . . . .	108
7.12	極座標 . . . . .	109
7.13	単振動 . . . . .	110
7.14	三角関数の合成 . . . . .	110
7.15	積和公式と和積公式 . . . . .	111
<b>第 8 章</b>	<b>積分</b>	<b>115</b>
8.1	積分の発想 . . . . .	115
8.2	グラフと積分 . . . . .	116
8.3	数値積分 . . . . .	117
8.4	積分の公式 . . . . .	118
8.5	原始関数と不定積分 . . . . .	121
8.6	部分分数展開 . . . . .	125
8.7	部分積分 . . . . .	126
8.8	置換積分 . . . . .	126
8.9	定積分を求めるには . . . . .	128
8.10	微分と積分の関係 . . . . .	129
<b>第 9 章</b>	<b>積分の応用</b>	<b>133</b>
9.1	円の面積 . . . . .	133
9.2	球の体積 . . . . .	134
9.3	速度・加速度 . . . . .	135
9.4	微分方程式 . . . . .	136
9.5	ロジスティック方程式 . . . . .	138
<b>第 10 章</b>	<b>微分積分の発展</b>	<b>143</b>

10.1	テーラー展開 . . . . .	143
10.2	複素数 . . . . .	145
10.3	オイラーの公式 . . . . .	146
10.4	複素平面 . . . . .	146
10.5	複素数の絶対値 . . . . .	147
10.6	極形式 . . . . .	147
10.7	偏微分 . . . . .	148
10.8	全微分 . . . . .	149
10.9	面積分と体積分 . . . . .	151
10.10	関数と無次元量 . . . . .	152
<b>第 11 章</b>	<b>ベクトル</b>	<b>157</b>
11.1	ベクトルを座標で表す . . . . .	157
11.2	ベクトルの大きさ . . . . .	158
11.3	内積 . . . . .	158
11.4	平面の中の直線と法線ベクトル . . . . .	160
11.5	空間の中の平面と法線ベクトル . . . . .	161
11.6	外積 . . . . .	162
11.7	物理学とベクトル . . . . .	163
11.8	ベクトルの応用 . . . . .	165
11.9	本当のベクトルとは . . . . .	166
<b>第 12 章</b>	<b>行列</b>	<b>171</b>
12.1	行列とは . . . . .	171
12.2	行列の計算 . . . . .	171
12.3	零行列 . . . . .	172
12.4	単位行列 . . . . .	173
12.5	2 次の行列式 . . . . .	173
12.6	逆行列 . . . . .	175
12.7	連立一次方程式 . . . . .	176
12.8	固有値と固有ベクトル . . . . .	177
12.9	対角化 . . . . .	178
12.10	行列の応用: マルコフ過程 . . . . .	179
<b>第 13 章</b>	<b>論理・集合・記号</b>	<b>183</b>
13.1	条件と命題 . . . . .	183
13.2	条件の否定 . . . . .	183
13.3	「かつ」と「または」 . . . . .	184
13.4	逆・裏・対偶 . . . . .	184
13.5	命題の否定 . . . . .	185
13.6	必要条件・十分条件 . . . . .	187
13.7	背理法 . . . . .	188
13.8	集合 . . . . .	188
13.9	集合の直積 . . . . .	191
13.10	数学記号 . . . . .	192

---

第 14 章	確率	197
14.1	事象	197
14.2	確率	198
14.3	独立	200
14.4	確率変数	201
14.5	確率分布	201
14.6	期待値	202
14.7	確率変数の分散と標準偏差	205
14.8	期待値・分散・標準偏差と次元	207
14.9	分散の性質	207
14.10	共分散と相関係数	208
14.11	離散的確率変数と連続的確率変数	208
14.12	確率密度関数・確率分布関数	209
14.13	連続的確率変数の期待値・分散・標準偏差・共分散・相関係数	211
14.14	誤差伝播の法則	212
第 15 章	統計学	219
15.1	母集団と標本	219
15.2	標本平均	220
15.3	標準誤差と大数の法則	221
15.4	標本分散と標本標準偏差	222
15.5	標準化	223
15.6	正規分布	223
15.7	中心極限定理	225
15.8	母平均の区間推定	226
索引		229



# 第1章

## 数と演算

君はこれまでたくさん算数・数学を勉強してきたので、数の掛け算や割り算などは朝飯前だろう。でもそれは「やり方を知ってる」だけで、「そうなる理由」は知らないのでは？ 例えば、

- 1 たす 1 はなぜ 2 なの？
- マイナスとマイナスをかけるとなぜプラス？

などに、自信を持って答えられるだろうか？

大学では、そういう「基礎」にこだわって、数学の体系を再構築することから始める。そうしないと、より高度で強力な数学を築くことができないのだ。

### 1.1 等号

”=”という記号を等号という。数学に等号はつきものだ。まず等号の意味をはっきりさせよう。

2 つのものごと  $a, b$  が互いに等しいとき、

$$a = b \quad (1.1)$$

と書く。そして、以下の 3 つ全てが常に成り立つということ、認めよう：

$$a \text{ が何であっても, } a = a \text{ である。} \quad (1.2)$$

$$a = b \text{ のとき, } b = a \text{ である。} \quad (1.3)$$

$$a = b \text{ かつ } b = c \text{ のとき, } a = c \text{ である。} \quad (1.4)$$

ちょっと待った！君は今、このへんを読んで、「当たり前の話でダルいな」と感じて読み飛ばそうとしたのでは？ そういうのは大学では災いの元。式 (1.2)～式 (1.4) は等号の 公理 だ。公理とは、学問における論理の前提であり、出発点であり、「それらは無条件に成り立つ」と同意するもの。言い換えれば、これらは等号の定義、つまり「等しいという関係」の 定義 だ。話の順序を正せば、『等しいという関係』は式 (1.2)～式 (1.4) を満たすのではなく、『式 (1.2)～式 (1.4) を満たす関係を、数学では「等しい」という』のだ。

これをよくわかっておらず、意味の違う量どうしをなんとなく等号で結んでしまう悪癖をもつ人は多い。

例 1.1

$$A \text{ 君は学生である。} \quad (1.5)$$

ということ、

$$A \text{ 君} = \text{学生} \quad (1.6)$$

と書いてしまう人がいる。すると、式 (1.3) より、

$$\text{学生} = A \text{ 君} \quad (1.7)$$

となってしまう。何か変。さらに、もし B 君も学生であれば、

$$B \text{ 君} = \text{学生} \quad (1.8)$$

$$\text{学生} = B \text{ 君} \quad (1.9)$$

となり、式 (1.4) を式 (1.6) と式 (1.9) に適用すれば、

$$A \text{ 君} = B \text{ 君} \quad (1.10)$$

となって、A 君と B 君は同一人物になってしまう！（例おわり）

問 1 例 1.1 の話は、どこでどのように間違えたか？

### 1.2 足し算・掛け算と自然数

次に、「数とは何か？」を考えよう。

まず、「この世に 1 という数が存在する」ということを、無条件に受け入れよう。でなければ数学は始まらない。そして、「1 を繰り返し足すことによって、新たな数を作ることができる」と約束しよう。そうやってできる数を 自然数 (natural number) と呼ぶ（定義）。それが、1, 2, 3, … などの数だ。

例 1.2 2 とは、 $1+1$  のことである（定義）。 $1+1=2$  という式は、計算の結果ではなく、2 という数の定義。（例おわり）

以後、「左辺を右辺によって定義する」ような等式には、普通の等号“=”ではなく、“:=”という等号を使おう(:=はコロンという記号)。つまり、:=という記号が出てきたら、左辺は右辺によって初めて意味づけられるのだ、と解釈すればOK。上の例で言えば、

$$2 := 1 + 1 \quad (1.11)$$

だ(決して  $1 + 1 := 2$  ではない)。

0は自然数でない。なぜ? 自然数は「1を繰り返し足してできる数」と定義されたが、1を何回足しても0にはならないから。

次に、自然数どうしの足し算というものを考える。例えば  $2+3$  は、

$$2 + 3 = (1 + 1) + (1 + 1 + 1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

というふうに、「1を繰り返し足すこと」に立ち返って定義しよう。

次に、自然数どうしの掛け算というものを考える。例えば2を3回足すことを、「2に3を掛ける」と呼び、 $2 \times 3$ と書く。一般に、 $a, b$ を任意の自然数として、「 $a$ に $b$ を掛ける」とは「 $a$ を $b$ 回足すこと」と定義しよう。

これで、自然数と、その足し算と掛け算が定義できた。どれも小学1, 2年生で習ったことなのに、その理屈はなかなか深いではないか!

### 1.3 引き算と整数

次に引き算を定義しよう。数  $a, b$  について、

$$a = b + x \text{ を満たすような数 } x \text{ を求めること (1.12)}$$

を「 $a$ から $b$ を引く」と呼び、 $a - b$ と書く。

自然数から自然数を引くと、自然数になることもあれば、ならないこともある。例えば  $5 - 2$  は自然数(3)であるが、 $2 - 5$  は自然数ではない。そこで、自然数から自然数を引いてできる数(それは必ずしも自然数ではない)を考えよう。そのような数を 整数 (integer) と呼ぶ(定義)。

例えば2は自然数だが、3という自然数から1という自然数を引いてできるので、整数でもある。同様に考えれば、どんな自然数も整数だ。つまり、自然数は整数でもある。一方、 $2 - 2 = 0$  だから、0は整数である。1 - 2, 1 - 3などを考えれば、 $-1, -2, \dots$  なども整数。すなわち、整数は、

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

などの数である。

### 1.4 割り算と有理数

次に割り算を定義しよう。数  $a, b$  について、

$$a = b \times x \text{ を満たすような数 } x \text{ を求めること (1.13)}$$

を「 $a$ を $b$ で割る」と呼び、 $a \div b$ とか $\frac{a}{b}$ とか $a/b$ と書く。ただし、「0で割る」ことはできないと約束する。

整数を整数(0以外)で割ると、整数になることもあれば、ならないこともある。例えば  $6 \div 3$  は整数(2)だが、 $5 \div 4$  は整数にはならない。そこで、整数を整数(0以外)で割ってできる数を考えよう。すなわち、2つの整数  $n, m$  (ただし  $m \neq 0$  とする) によって、

$$\frac{n}{m} \quad (1.14)$$

と表すことができる数を考える。そのような数を 有理数 (rational number または quotient number) と呼ぶ(定義)。ここで、任意の整数  $n$  は、 $n/1$  と表すことができるので有理数でもある。つまり、整数は有理数でもある。

問2 自然数・整数・有理数を、それぞれ定義せよ。

### 1.5 実数

ところで、円の周長を直径で割って得られる数を 円周率 といい、 $\pi$  という記号で表す。 $\pi$  は、 $3.141592\dots$  という無限に続く小数になるが、これはどんな整数  $n, m$  をもってしても、 $n/m$  というふうには表現できない\*1。同様に、 $\sqrt{2}$ 、つまり「2乗したら2になるような正の数」は、 $1.41421356\dots$  という無限に続く小数になるが、これも、どんな整数  $n, m$  をもってしても、 $n/m$  というふうには表現できない\*2。従って、 $\pi$  や  $\sqrt{2}$  は有理数ではない。このように、無限に続く小数で表現され、なおかつ有理数でないような数のことを 無理数 (irrational number) という。有理数と無理数をあわせて、実数 (real number) と呼ぶ\*3。

\*1 その証明は難しいのでここには載せない。興味があれば「円周率 無理数 証明」で検索してみよう。でも君の今の数学力では理解できないだろうけどね。

\*2 その証明は難しくはないが、「背理法」という考え方が必要なので、ここには載せない。

\*3 実は、この定義は不完全である。無理数や実数の完全な定義は、かなり難しい。数学類や数学科に進んだ学生は、ここで苦しむのだが、我々は生物資源学類だから、ここはスルーして先に進

## 1.6 定義について

ここまでわずかに数ページの中に「定義」という言葉が何回も出てきた! でも、君は「定義」ってどういうことか、わかっているだろうか?

定義とは、言葉の意味を規定すること。A という言葉の定義は、「A とは B である」とか、「B であるようなものを A と呼ぶ」という形式の文章になる。ただしそこには暗黙のルールがある。

まず、定義は、既に定義されている言葉だけで記述しなければダメ。例えば、「自然数とは、1 以上の整数である」はダメだ。なぜなら、整数は自然数が定義された後に、自然数を使って定義されるものであり、自然数の定義の時点では、整数はまだ定義されていないからだ。

次に、定義は、その言葉の指し示す対象を、過不足無く特定できなければダメ。例えば、「自然数とは、1, 2, 3 等のことである」というのは、4 以上の自然数についてきちんと述べていないからダメ。また例えば、「自然数とは、ある種の整数である」は、 $-1$  や  $-3$  が自然数なのかどうかわからないからダメ。

また、定義は、必要最低限のことだけが入っていなければダメ。蛇足があってはダメだ。例えば、「 $\sqrt{2}$  とは、2 乗したら 2 になるような正の無理数」というのはダメ。「無理数」が蛇足だ。「2 乗したら 2 になるような正の数」という条件だけで「2 の平方根」は決まる。それをもとに、 $\sqrt{2}$  が無理数であることが証明されるのだ。

ちなみに、定義から論理的に導かれる事柄を、定理という。「 $\sqrt{2}$  は無理数」というのは、定義ではなく定理。

問 3 円周率とは? という問に、A 君は「3.14」と答えた。それを聞いた B 君は、「それは違う。3.1415926, 以下、ずっと値が続く数だよ」と言った。B 君の発言は A 君の答より少しはましだが、正解とは言えない。なぜか?

よくある質問 1 高校ではそんなに定義定義と言われなかったし、他学類でも定義を覚えるなんて言われていないようですが... そのかわり高校では頻りにテストがあったし、他学類では週に何回も数学の授業があります。それだけやれば、大事な定義は自然に覚えちゃう。でも資源は忙しいのです。週

もう。「いや、気になる!」という人は、「実数の定義」で検索してみよう!

1 回しか数学の授業がないので、覚えるべき定義をさっさと覚えることが必要です。考えるだけでは理解しにくいことも、覚えちゃえば、その後でじわじわと理解できることが多いのです。もし資源が「数学は暗記科目じゃない!」みたいな美しいスローガンでのんびりやったら、多分、1 年間で高校数学の復習すら終わらないよ。

よくある質問 2 先生は、これらの定義をどうやって覚えたのですか? ... 意識して覚えたのではなく、たくさん時間をかけて数学の体系を自分なりに構築し、一つ一つの概念について、ベストな定義を考えていきました。ところがそれは、どの本にも書かれている定義とほとんど同じだったのです。時間の無駄でした。若くて愚かでした。数学では、個々の定義は徹底的に考え尽くされているのです。

よくある質問 3 定義と公理の違いがわかりません... ほぼ同じです。強いて言えば、公理の方が大ききな感じです。

さて、驚くべきことに、ひとつの事柄の定義は、ひとつとは限らず、場合によっては、複数ありえるのだ。例えば円周率  $\pi$  は、「円周の長さをその円の直径で割ったもの」と定義するのが普通だが、

$$\pi = 4 \times \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

というふうに、「奇数の逆数に、正負交互に符号をつけて無限に足し合わせ、最後に 4 倍したもの」とも定義できるのだ! これはだいたい先の大学の数学でないと理解できないから、今はわからなくても OK。これを  $\pi$  と定義すれば、それが「円周の長さをその円の直径で割ったもの」に等しいということが数学的に証明でき、そのことは定理となるのだ。

よくある質問 4 定義が複数あるのなら、どれを覚えればいいのですか? ていうか、複数あるなら、覚える意味、無くないですか? ... ごもつとも。でも、まず代表的な定義を覚えましょう。でないと始まらない。そのうち、他の定義もあり得るといことがわかってきます。

ところで、君が科学的な文章(レポートや答案など)を書くときは、「記号の定義」が重要である。例えば、「円の面積の公式は?」と聞かれて「 $\pi r^2$  です」と答えるのは、不十分。 $\pi$  が円周率を表すことは数学のルールとして OK だが、 $r$  という記号が何かは、数学の中ではルールとして決まっていらないので、「半径を  $r$  とする」という宣言、つまり、 $r$  という記号の定義を述べねばダメな

のだ。大事なことなので大きく書いておこう:

—— 約束 ——

数学のルールとして定まった記号以外の記号は、必ず定義してから使うこと。

どのような記号が数学のルールで定まっているのか? とりあえず,  $0, 1, 2, 3, \dots$  という数字や,  $=, +, -, \times, \div, \int, \sum$  などの演算記号,  $\pi, e$  などの特別な定数,  $\cos, \sin$  などの関数記号, 等々。他にも, 第13章に書いてある記号が, それにあたる。

## 1.7 無限大

さて, 先ほど, 「何かを0で割ることはできない」と述べたが, 0に近い数で割ることはできる。例えば, 1を0.0001で割ると,  $1/0.0001 = 10000$  になる。あるいは, 1を $-0.0001$ で割ると,  $-10000$  になる。このように, 0に近い数で, 0でない何かを割ると, その結果は非常に大きな数になったり非常に小さな数(マイナスの大きな数)になる。「割る数」を0に近づければ近づけるほど, その傾向は際限なく激しくなる。際限なく大きくなる様子を, 象徴的に 無限大 (infinity) と呼び,  $\infty$  という記号で表す。あるいは際限なく小さな数(マイナスの大きな数)になる様子を, 「負の無限大」と呼び,  $-\infty$  という記号で表す。

そういうふうに考えれば,

$$\begin{aligned} 1 \div 0 &= \infty \quad \text{または,} \\ 1 \div 0 &= -\infty \end{aligned} \quad (1.15)$$

と言えなくもなさそうだが, これはダメ。というのも,  $\infty$  は, 「数」ではないのだ。あくまで「0での割り算はできない」という立場を貫こう。

よくある質問5 「示せ」と「証明せよ」は同じことですか? ... 同じです。

よくある質問6 証明せよ, と言われても, 何を既知としてよいかわかりません... 定義と公理, そして, 自分がすでに(既出の問題などで)証明したこと(定理)は, 既知として構いません。

よくある質問7 「証明の終わり」の印に指定はありますか? ... 慣習的には, Q.E.D. とか, 「証明終」とか, 2本斜線とか, が使われます。

## 1.8 四則演算

足し算は「加算」, 引き算は「減算」, 掛け算は「乗算」, 割り算は「除算」とも呼ぶ。加算・減算・乗算・除算の4つをまとめて 四則演算 とか 加減乗除 と呼ぶ。加算・減算・乗算・除算の結果のことを, それぞれ和・差・積・商と呼ぶ。

任意の実数  $a, b, c$  について, 以下のようなルールが成り立つのは, 中学校までの経験から自明だろう。

$$a + b = b + a \quad (1.16)$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (1.17)$$

$$a + 0 = a \quad (1.18)$$

$a$  に足して0になる数, つまり

$$a + (-a) = 0 \quad \text{となる数「} -a \text{」がある。} \quad (1.19)$$

$$a \times b = b \times a \quad (1.20)$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \quad (1.21)$$

$$a \times 1 = a \quad (1.22)$$

$a \neq 0$  ならば,  $a$  に掛けて1になる数, つまり

$$a \times (1/a) = 1 \quad \text{となる数「} 1/a \text{」がある。} \quad (1.23)$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad (1.24)$$

$$0 \neq 1 \quad (1.25)$$

式(1.16), 式(1.20)のように, 計算の順序を逆にしても結果が変わらない, という性質のことを, 交換法則 という。式(1.16)は和の交換法則が成り立つことを, 式(1.20)は積の交換法則が成り立つことを言っている。

式(1.17), 式(1.21)のように, 同種の計算が複数ある場合にどこから手をつけても結果が変わらない, という性質のことを, 結合法則 という。式(1.17)は和の結合法則, 式(1.21)は積の結合法則が, それぞれ成り立つことを言っている。

式(1.24)は, 分配法則 と呼ばれる。

ところで, 振り返ってみると, そもそも掛け算は「自然数を自然数回, 足すこと」と定義した。つまり, 自然数  $a, b$  について, 「 $a$  を  $b$  回足すこと」を  $a \times b$  と定義した。その定義では,  $2.3 \times 1.8$  のような, 小数どうしの掛け算や,  $(-3) \times (-5)$  のような, 負の数どうしの掛け算など, できないじゃないか!

そこで, 掛け算を含めた四則演算を, 自然数や整数だけでなく実数にまで拡張して適用できるように定義し直さねばならない。それをやってくれるのが, 式(1.16)~式(1.25)なのだ。君は, 式(1.16)~式(1.25)を「当たり前すぎてどーでもいいこと」のように思っているか

もしれないが、数学の体系ではそうではない。むしろ、「式 (1.16)~ 式 (1.25) を満たす演算を、四則演算と呼ぶ」のだ。つまり、式 (1.16)~ 式 (1.25) は、四則演算の公理 (定義) なのだ。そして、「自然数だけでなく、どんな数に対しても式 (1.16)~ 式 (1.25) は成り立たねばならない」と要求 (ムチャぶり?) するのだ。そうすると、例えば、以下のようなことが必然的に導かれていくのだ:

例 1.3 任意の実数  $x$  について、 $x \times 0 = 0$  であるのはなぜだろう? まず、式 (1.18) より、 $0+0=0$ 。この両辺に  $x$  をかけると、

$$x \times (0 + 0) = x \times 0 \quad (1.26)$$

$$x \times 0 + x \times 0 = x \times 0 \quad (1.27)$$

となる。この両辺から  $x \times 0$  をひくと、

$$x \times 0 = 0 \quad (1.28)$$

■

例 1.4 マイナスとマイナスをかけたらなぜプラスになるのだろうか? 例えば、 $(-1) \times (-3)$  はなぜ 3 になるのだろうか? それを調べるために、まず、 $(-1) \times (-3 + 3)$  を考える。式 (1.24) より、

$$\begin{aligned} (-1) \times (-3 + 3) &= (-1) \times (-3) + (-1) \times 3 \\ &= (-1) \times (-3) - 3 \end{aligned} \quad (1.29)$$

となる。ところが、 $-3 + 3 = 0$  であることを使うと、

$$(-1) \times (-3 + 3) = (-1) \times 0 = 0 \quad (1.30)$$

でもある。式 (1.29) と式 (1.30) を使うと、

$$(-1) \times (-3) - 3 = 0 \quad (1.31)$$

となる。この両辺に 3 を足すと (つまり左辺の  $-3$  を右辺に移項する)、

$$(-1) \times (-3) = 3 \quad (1.32)$$

となる。つまり、 $-1$  と  $-3$  をかけたら、プラスの 3 になる。 ■

上の例では、わかりやすくするために具体的な数で示したが、任意の実数についても「マイナスかけるマイナスはプラス」が成り立つことも容易に示せる (ここでは述べないが)。このように、「マイナスかけるマイナスはプラス」というのは、四則演算の公理からの必然的な帰結である。このように、整数や実数まで含めた四則演算の性質は、全て式 (1.16)~ 式 (1.25) から導き出せるのだ。

よくある質問 8 それが、マイナス  $\times$  マイナスがプラスになる理由ですか? なんかイメージできないし、ピンと来ません。... この説明の前提は式 (1.16)~ 式 (1.25) ですが、これらは、君にとって難しいことですか? 受け入れられませんか?

いえ、それらはぜんぶ当たり前で納得しています。

... なら、その「当たり前のこと」から出発して導かれた結論である「マイナスかけるマイナスがプラス」も当たり前、ってことになります。

そういう屁理屈っぽいのが大学の数学なのですか?

... 屁理屈ではなく、「公理主義」といいます。これまで直感やイメージに頼って数学をやってきた人には、強い違和感があるでしょう。でも、公理主義は大学の数学では避けて通れない考え方です。もちろん直感も大事ですが、直感で納得できないことも、公理や定義から始まる論理で理解し、納得するのです。

問 4 四則演算の公理を書け。

ところで、上の「四則演算の公理」は、表面上、足し算と掛け算のことばかりだ。引き算や割り算は? 大丈夫。引き算は足し算で、割り算は掛け算で、それぞれ書き換えることができる。つまり、実数  $a, b$  に対して、 $a - b$  は  $a + (-b)$  と書き換えられるし、 $a \div b$  は ( $b \neq 0$  なら)、 $a \times (1/b)$  と書き換えられる。それは、式 (1.19) によって  $-b$  の存在が保証され、式 (1.23) によって  $1/b$  の存在が ( $b \neq 0$  であれば) 保証されるからでもある。だから、上の「四則演算の公理」は引き算や割り算のこともちやんと含んでいるのである。

例 1.5 実数  $a, b$  について、

$$ab = 0 \quad \text{ならば、} \quad a = 0 \text{ または } b = 0 \quad (1.33)$$

であることを証明しよう: まず、 $ab = 0$  が成り立つとする。もし  $a \neq 0$  なら、式 (1.23) より、 $1/a$  が存在する。それを  $ab = 0$  の両辺に掛けると、 $b = 0$ 。同様に、もし  $b \neq 0$  ならば、 $1/b$  が存在し、それを  $ab = 0$  の両辺に掛けると  $a = 0$ 。従って、 $a \neq 0$  かつ  $b \neq 0$  となるようなケースは存在しない。従って、 $a, b$  のうち少なくとも片方は必ず 0 である。 ■

問 5 以下の定理を証明せよ (上の証明のおさらい):

- (1) 任意の実数  $x$  に 0 をかけると 0 になる。
- (2) 実数  $a, b$  について、 $ab = 0$  ならば、 $a$  と  $b$  のうち少なくともひとつは 0 である。

## 1.9 数式の書き方

高校までと大学では、数式を書き表すときの慣習が少し違う。

まず、大学では、数どうしの積を  $\times$  で書くことは少ない。例えば実数  $a, b$  について、 $a \times b$  は  $\times$  を省略して  $ab$  と書いたり、 $\times$  を  $\cdot$  に取り替えて  $a \cdot b$  と書くのが普通。例外は、掛け算の後ろに具体的な値が来るときである。例えば、 $2 \times 3$  について  $\times$  を省略してしまうと  $23$  になってしまい、「にじゅうさん」と区別できないので、 $2 \times 3$  と書く ( $2 \cdot 3$  でも OK)。 $a \times 3$  を  $a3$  と書くのは問題なさそうだが、慣習的にダメ。 $3a$  なら問題ないし、 $a \times 3$ 、 $a \cdot 3$  でも OK。

$\times$  をあまり使わないことには理由がある。後で学ぶが、 $\times$  は、「ベクトルの外積」とか「集合の直積」というものも表す (その意味は今今はわからなくてよい)。これらは、数どうしの積とは全く違う概念である。それらと紛らわしいので、数どうしの積には  $\times$  はあまり使わないのだ。

実数どうしの積には交換法則が成り立つ (式 (1.20)) ので、 $ab$  を  $ba$  と書いても OK。でも君は、小学校で、「3羽のウサギがいます。耳の数の合計は？」という問題は、 $2 \times 3=6$  が正解で、 $3 \times 2=6$  は不正解、と習わなかっただろうか？ あれはウソである。 $2 \times 3=6$  も  $3 \times 2=6$  も両方正解。両者に区別は無い。

とはいえ、無秩序な順番で書いたら見にくい。原則として、具体的な数値は前に書き、それに続けて文字を ABC 順 (辞書順) に並べよう。さっきの  $a \times 3$  は  $3a$  と書く方がよい。 $adcb$  という積は、 $abcd$  と書く方が見やすい。

ただし、複数の文字に関して平等な形にあるような式は、ABC 順にこだわらない方がよいこともある。例えば、

$$ab + bc + ac \quad (1.34)$$

みたいな式。ここには、 $a, b, c$  の3つの変数が平等に出てくる。実際、 $a$  と  $b$  を入れ替えても、 $b$  と  $c$  を入れ替えても、 $a$  と  $c$  を入れ替えても、式は不変。こういう式は、それぞれ1回は先に、1回は後になるように書くと「平等」な感じだ。そこで、

$$ab + bc + ca \quad \text{最後の } ac \text{ をあえて } ca \text{ と書く}$$

の方が式 (1.34) よりスマートだ。これは、単なる ABC 順ではなく、 $a, b, c, a, b, c, \dots$  というふうにくるくるまわ

る順番で書くことに相当するので、「サイクリックな記法」ともいう。

大学の数学では、割り算を  $\div$  で表すことはほとんどない。かわりに/や分数を使う。例えば、実数  $a, b$  について、 $a \div b$  は  $a/b$  と書いたり  $\frac{a}{b}$  と書く。

ところで、/の後ろに複数の数を不用意に並べてはダメ。例えば、

$$1/ab \quad 1/2a \quad 1/2 \cdot 3 \quad 1/3 \times 4$$

などは、/の次の次にくる数 ( $1/ab$  なら  $b$ ) が、分母なのか分子なのかが紛らわしい。もし分母に来るならば、

$$1/(ab) \quad 1/(2a) \quad 1/(2 \cdot 3) \quad 1/(3 \times 4)$$

と書くべきだし、分子に来るなら、

$$(1/a)b \quad (1/2)a \quad (1/2) \cdot 3 \quad (1/3) \times 4$$

と書くか、あるいはいっそ、

$$b/a \quad a/2 \quad 3/2 \quad 4/3$$

と書くべき。しかし、こういう煩わしさは、分数を使えば避けられる。つまり、

$$\frac{1}{ab} \quad \frac{1}{2a} \quad \frac{1}{2 \cdot 3} \quad \frac{1}{3 \times 4}$$

$$\frac{b}{a} \quad \frac{a}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{3}$$

などと書けばよいし、その方が見やすい。約分もしやすいので計算が楽に正確にできる。印刷物では、割り算を文の中に埋め込むために/を使わざるを得ないけど、手計算を紙やノートにやるときは、/にこだわる必要はない。そもそも数学の勉強では紙をケチってはダメ。というわけで、

### 約束

割り算は、できるだけ分数で書こう。 $\div$  は使わない。/は印刷物以外ではなるべく使わない。/を使う時は、分母がどこまでなのかが明らかになるように書こう。

式の中で、演算の優先順を表すためには、( ), { }, [ ] のような括弧を使う。括弧が多重 (入れ子) になるときは、

$$\{[(a-b)c+d]e+f\}g \quad (1.35)$$

のように、( ) の外に { }, その外に [ ] を使うのが慣

習。これを、

$$(((a-b)c+d)e+f)g \quad (1.36)$$

のように同じ形の括弧を多重に使っちゃうと、どの片括弧がどの片括弧に対応するか混乱しやすいので、できるだけ避けよう。ただし、括弧の形が足りなかったり、式展開の途中で気づいて付け足したりすると、この慣習が崩れることもある。そのあたりはスルーで。

よくある間違い 1 マイナス記号「-」を他の演算記号の後ろに直接並べてしまう。たとえば  $2 \times (-3)$  を、 $2 \times -3$  とか  $2 \cdot -3$  と書く... ダメ。こういう癖の大人もいますが、真似しないように! - が演算記号ではなく負の数を表す記号(負号)であり、後ろの数と一体になっているということを表すための括弧( )が必要です。

問 6 以下のような式の書き方は、どこがダメか?

- (1)  $1/2a$                       (2)  $3 \times -4$   
 (3)  $(2(x+1) - 3)/4x$

ここでもうひとつ覚えて欲しいルールがある。「(印刷物では) 変数や定数を表すアルファベットは斜体表記」というものである。斜体とは、 $a, b, c, \dots, A, B, C, \dots$  のように、右に傾いた字体のこと。それに対して普通の  $a, b, c, \dots, A, B, C, \dots$  は立体という。変数や定数を表すときは、斜体を使うのだ。例えば  $x = 5$  は OK だが、 $x = 5$  はダメ。レポートやテスト答案などで手書きする場合はこのルールは気にしないでいいが、パソコンのワープロソフトなどで文書を作るときは気をつけよう。

## 1.10 累乗の指数を拡張する

実数  $x$  と自然数  $n$  について、 $x^n$  とは、 $x$  を  $n$  回掛けることである(定義)。例えば  $2^3$  は、 $2 \times 2 \times 2 = 8$  のことである。このように、同じ数を何回か掛けることを 冪(べき)とか 累乗(るいじょう)と呼ぶ。また、 $x^n$  の  $n$  や  $2^3$  の 3 などのことを 指数と呼ぶ。

この定義から、以下の 2 つの式(定理)を導くことができる( $x$  は任意の実数、 $m$  と  $n$  は任意の自然数とする):

$$x^m \times x^n = x^{m+n} \quad (1.37)$$

$$(x^m)^n = x^{mn} \quad (1.38)$$

式 (1.37) の左辺は  $x$  を  $m$  回掛けたものに、さらに  $x$  を  $n$  回掛けたものを掛けるのだから、結局、 $x$  を  $m+n$

回掛けるのと同じになる。従って右辺に等しい。

式 (1.38) の左辺は「 $x$  を  $m$  回掛けたもの」を  $n$  回掛けるのだから、結局、 $x$  を  $mn$  回掛けるのと同じになる。従って右辺に等しい。

式 (1.37) と式 (1.38) をあわせて指数法則という。

ところで、上の定義では、累乗の指数は自然数に限定されている。そこで、自然数でないような指数による累乗(-3乗とか 1.23乗とか)も許されるように、累乗を拡張しよう。そのためには、指数法則が、自然数以外の  $m, n$  についても成り立つと要求(ムチャぶり?)して、うまくつじつまが合うように累乗を定義し直すのだ。

まず、式 (1.37) を、 $m = 0$  についても成り立つと仮定しよう。すると、

$$x^0 \times x^n = x^{0+n} = x^n \quad (1.39)$$

となる。ここで、 $x$  は 0 以外の実数に限定しよう。式 (1.39) の両辺を  $x^n$  で割れば( $x \neq 0$  だから  $x^n \neq 0$ )、

$$x^0 = 1 \quad (1.40)$$

となる。つまり、0 以外の実数の 0 乗は 1 である。でなければつじつまが合わない。

また、上の式 (1.37) で、 $n$  は自然数で、 $m = -n$  としてみよう。すると  $m$  は負の整数になるが、それでも式 (1.37) が成り立つと要求(ムチャぶり)して、

$$x^{-n} \times x^n = x^{-n+n} = x^0 = 1 \quad (1.41)$$

となる。この最左辺と最右辺を  $x^n$  で割る(ただし、 $x \neq 0$  とする)。すると、

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (1.42)$$

となる。すなわち、マイナス乗は逆数の累乗である。そうでなければつじつまが合わない。例えば、 $2^{-3}$  は、 $1/(2^3)$ 、つまり  $1/8$ 。

次に、式 (1.38) について、 $n$  を 2 以上の自然数とし、 $m = 1/n$  としてみる。すると  $m$  は自然数ではないが、このときも式 (1.38) が成り立つことを要求(ムチャぶり)して、

$$(x^{1/n})^n = x^{n/n} = x^1 = x \quad (1.43)$$

である。従って、 $x^{1/n}$  は、 $n$  乗すると  $x$  になる数である。このような数を「 $x$  の  $n$  乗根」という。すなわち、 $\frac{1}{n}$  乗は  $n$  乗根である。 $x^{1/n}$  のことを  $\sqrt[n]{x}$  と書く。特に、 $n = 2$  のとき、つまり 2 乗根(平方根)を、 $\sqrt{x}$  と書く。例えば、 $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$  である。

ただし、「 $x$  の  $n$  乗根」は複数、存在しうる。無用の混乱を避けるために、 $x^{1/n}$  や  $\sqrt[n]{x}$  は、複数存在しうる「 $x$  の  $n$  乗根」のうち、0 以上の実数のものに限定する\*4。例えば、9 の平方根は  $\pm 3$ 、すなわち「3 と -3」である。しかし、 $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$  である。 $\pm 3$  ではない。

以下の数値 (と、その語呂合わせ) は、記憶せよ：  
 $\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$  (ひとよひとよにひとみごろ)  
 $\sqrt{3} = 1.7320508 \dots$  (ひとなみにおごれや)  
 $\sqrt{5} = 2.2360679 \dots$  (ふじさんろくおーむなく)

注: 実用的には、こんなに多くの桁を覚える必要は無いのだが、語呂合わせは、短すぎても覚えにくいものである。

注:  $\sqrt{5}$  の「ふじさん」の「じ」を 4 だと勘違いする人がたまにいます。4 ではなく、2 である。「不二家」の「じ」である。そもそも、四は「し」とは読むが「じ」とは読まない。

例 1.6 以上のルールは組み合わせできる:

$$4^{-3/2} = (4^{1/2})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

(例おわり)

問 7 以下の値を求めよ:

- (1)  $2^5$                       (2)  $2^{-2}$                       (3)  $10^{-6} \times 10^4$
- (4)  $9^{0.5}$                     (5)  $4^0$                         (6)  $\frac{10^{-3}}{10^{-7}}$

問 8 以下の数を指数で書き換えよ。例:  $1/2 = 2^{-1}$

- (1)  $1/\sqrt{3}$                       (2)  $\sqrt[3]{5}$

本書では詳述しないが、指数法則は、整数や分数 (有理数) の指数のみならず、無理数の指数にも成り立たせることができる。

よくある質問 9 虚数乗はどうなるのですか? ... 虚数 (2 乗するとマイナスの実数になるような数を含む数; 第 3 章で学ぶ) を指数にするような累乗は、「オイラーの公式」というのを使って定義します。本書の後半で学びます。

\*4 ただし、この約束は、 $x$  が負の値だったり、 $x$  や  $n$  が複素数だったりするとき (大学数学で出てくる!) には失効する。

### 1.11 関数電卓の使い方

ところで、実際の数値を扱うときは、計算機を使うことが多い。複雑・大規模な計算にはパソコンやスーパーコンピュータを使うが、2, 3 個の数値を手軽にいじるときは、関数電卓 (またはそれ用のスマホのアプリ) をよく使う。というわけで、関数電卓に慣れるために今から少し練習しよう。

関数電卓はいろんな製品があり、外観も機能もキーの配列も、製品ごとに違うが、典型的なのは図 1.1 のようなやつだ。ここでは、例として、 $2.3^{4.5}$  を求めてみよう。

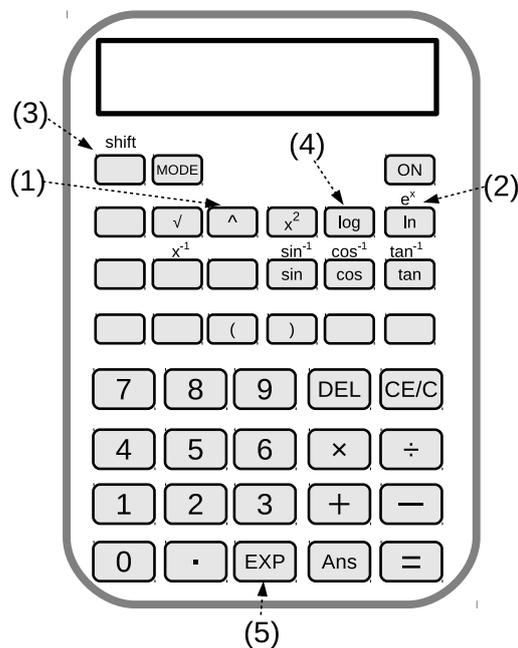


図 1.1 関数電卓。普通の電卓と違って、キーがたくさんある。特に、(2) や (4) のキーがあるところが、普通の電卓との違い。

まず、数字キーを使って 2.3 と入れる。次に、図 1.1 の (1) で示した、「 $x^y$ 」というキーを押す (計算機の業界では、「 $\wedge$ 」は累乗を意味する。なお、製品によっては、「 $\wedge$ 」が無いものもある。その場合は、かわりに「 $x^y$ 」というキーを押す)。そして再び数字キーで 4.5 と入れる。最後に、右下の「=」ボタンを押そう。すると、 $42.43998 \dots$  という答が表示されるだろう。

問 9 以下の数を電卓で小数第 5 位まで求めよ。

- (1)  $2^{3.5}$                       (2)  $1.01^{100}$                       (3)  $\sqrt[3]{5}$

ヒント: 3 乗根は、 $1/3$  乗、つまり、 $0.3333333 \dots$  乗。

## 1.12 ネイピア数

さて、ちょっと唐突だが、大学では「ネイピア数」というものが頻出する。ネイピア数は無理数であり、慣習的に  $e$  という記号で表す。その値は、

$$e = 2.71828 \dots \quad (1.44)$$

である（これは定義ではない。ネイピア数の定義は第 6 章で学ぶ）。これには「似てないやつ」「フナひと鉢ふた鉢」等の語呂合わせがある。この値を、少なくとも 4 桁めまでは記憶せよ。

問 10 式 (1.44) を 10 回書いて、記憶せよ。

$e$  は、数学において、 $\pi$  と同じくらいに重要な数だ。なぜ、どのように重要なのかは、後の章で学ぶ。

$x$  を任意の実数として、ネイピア数の  $x$  乗、すなわち、 $e^x$  のことを、 $\exp x$  と書くこともある。これも大切なことなので、必ず記憶しよう！

約束  
 $\exp x$  とは、 $e^x$  のこと。

関数電卓で  $e^x$  を求めるときは、さっきやったように、2.71828 を「 $\wedge$ 」キーで累乗してもいいのだが、もっと正確で簡単な方法がある：例えば  $e^4$  を求めるときは、図 1.1 の (3) にある「Shift キー」を押し、それに続いて (2) を押す\*5。そして、数字キーで 4 と入れて、最後に = キーを押せばよい。すると、54.598... という答が表示されるだろう。

ただし、製品によっては、この手順を若干、入れ替える必要がある。すなわち、まず 4 を入れて、その後で、Shift キー、(2) のキー（ln キー）、という順序でないとダメなものもある。いろいろ試してみよう！

ちなみに、電卓には図 1.1 の (5) のように、EXP というキーもある。しかし、これは、 $e^x$  ではないことに注意！

問 11 以下の数を電卓で小数第 5 位まで求めよ。

- (1)  $\exp 2$                       (2)  $e^{-1.5}$

\*5 (2) のキーは本来は ln という機能なのだが（その意味は後ほど述べる）、直前に Shift キーが押されていると、ln という機能ではなく、ボタンの上方に書かれた  $e^x$  という機能に、一時的に変わるのだ

よくある質問 10 関数電卓の使い方がわかりません ... 関数電卓は機種によって機能やデザインが違います。とりあえず、間違えることを恐れないで、いろいろ遊んでみよう。また、ネットで「関数電卓の使い方」で検索してみよう。どうしてもわからなければ、質問においで！

## 1.13 対数

正の実数  $a, b$  について、「 $a$  を何乗すると  $b$  になるか」の指数を求める操作（ $a^x = b$  となるような  $x$  を求める操作）を、

$$\log_a b \quad (1.45)$$

とあらわす（ただし、 $a \neq 1$  とする）。これを 対数 ( $\log$ -arithm) とよぶ（定義）\*6。log の右下に小さく書かれた  $a$  を 底 (base) と呼ぶ。

例 1.7

- $\log_2 8 = 3$  である。2 を 3 乗したら 8 になるから。
- $\log_2 1 = 0$  である。2 を 0 乗したら 1 になるから。
- $\log_2 0.5 = -1$  である。2 を  $-1$  乗したら  $1/2$ 、つまり 0.5 になるから。

問 12 以下の値を求めよ（電卓等を使わずに）：

- (1)  $\log_2 4$             (2)  $\log_3 81$             (3)  $\log_{0.1} 0.01$   
(4)  $\log_{10} 1000$     (5)  $\log_{10} 0.01$     (6)  $\log_{10} 1$

10 を底とする対数を 常用対数 と呼ぶ。また、ネイピア数  $e = 2.718 \dots$  を底とする対数を 自然対数 と呼ぶので、ネイピア数のことを「自然対数の底」と呼ぶことも多い。

問 13 以下の言葉の定義を述べよ：

- (1) 対数                                      (2) 常用対数  
(3) 自然対数

常用対数や自然対数はよく使うので、底を省略して  $\log x$  と書かれることが世間ではよくある。その場合、常

\*6 ここで  $a, b$  は正としたが、これらが負であっても、同様のことを考えることは、場合によっては可能である。例えば  $b = -8$ ,  $a = -2$  とすれば、「 $a$  を何乗すると  $b$  になるか」の答えは 3 である。しかし、例えば  $b = 8, a = -2$  とか、 $b = -8, a = 2$  とかになると、 $a$  を何乗しても  $b$  にはならない。このような例外がたくさん生じるのは面倒なので、対数を考えるときは、普通、 $a$  や  $b$  に相当する数をプラスに限定するのだ。

用対数なのか自然対数なのか、読者が空気を読んで判断しなければならない。これはトラブルの種であり危険な慣習である。君はこんな慣習を真似てはダメ。常用対数なら、面倒くさがらずに  $\log_{10} x$  と書くべし。一方、自然対数は、 $\ln x$  と書く慣習もある。 $\ln$  は  $\log$  natural の略である。これは底を誤解する余地が無く、便利なので、我々はこの表記を採用しよう。

約束

対数の底を省略しない。つまり、常用対数や自然対数を、 $\log x$  と書いてはいけない。自然対数 ( $\log_e x$  のこと) は  $\ln x$  と書いてもよい。

生物資源学類「基礎数学 I, II」「物理学 I」等では、上の「約束」を守らない答えは、全て零点!

よくある間違い 2 自然対数  $\ln$  を  $\ln$  とか  $ln$  と書いてしまう...  $l$  は小文字のエルです。数字のイチや、大文字のアイではありません。手書きのときは、筆記体 ( $\ell$ ) で書こう!

よくある質問 11 高校数学では、自然対数は  $\log x$  で OK でした。大学の他の授業や教科書も、 $\log x$  と書いてるのは多いです。 $\log x$  と書いたら零点なんてキツすぎませんか? ... こういう例があります: 森林科学では、木の体積 (それが木材としての商品価値を決める!) を、木の高さ (人の胸の高さで測った幹の直径) で推定します。ある論文で、その推定式が、対数を使って書かれていましたが、底が省略されており、それが 10 なのか  $e$  なのか、わかりませんでした。君ならどうしますか? 10 か  $e$  のどちらかを適当に使いますか? それで間違った計算をして、まだ十分に大きくなっていない木を切っちゃったらどうします? あるいは、君の書く論文で対数の底が書いてないせいで、誰かがそういうミスをしたら、どうします?

関数電卓で自然対数を求める時は、 $\ln$  というキーを使う (図 1.1 の (2))。例えば、 $\ln 3$  を知りたかったら、 $\ln$  キーを押して、その後に 3 を押し、 $=$  キーを押せばよい。製品によっては逆のこともある。つまり、先に 3 を押し、そのあとで  $\ln$  キー、という場合もある。

同様に、常用対数を求める時は、 $\log$  というキーを使う (図 1.1 の (4))。多くの関数電卓では、 $\log$  は常用対数を意味する。例えば、 $\log_{10} 2$  を知りたかったら、 $\log$  キー、2、 $=$  を順に押せば良い (もしくは、2、 $\log$  キーの順)。

問 14 以下の数を電卓で計算し、小数第 5 位まで述べよ。

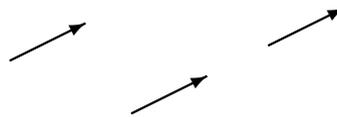
- (1)  $\log_{10} 2$  (2)  $\log_{10} 0.006$  (3)  $\ln 2$  (4)  $\ln 10$

## 1.14 ベクトル

平面や空間の中で、大きさと向きをもつ量 (速度とか力とか) を ベクトル と呼ぶ。ベクトルは物理学や化学に関連した授業で頻繁に出てくるので、ここで基本を学んでおこう。

ベクトルは矢印で図示する。「大きさ」を矢印の長さで表現し、「向き」を矢印の向きで表現するのだ。

ベクトルが空間の中のどこにあるか、ということは考えない (というか、問題にしない)。例えば、風速  $1.0 \text{ m s}^{-1}$  の風が北から南向きに吹く、という現象 (風速) をベクトルとして表現すると、その風がどこの場所で吹いているか、ということは問題にしない。従って、以下に描いた 3 つのベクトルは、いずれも互いに等しいベクトルである (描かれた場所は違っても、矢印の長さと同じだから)。



数を  $a$  や  $x$  のような記号で表すように、ベクトルも記号で表すことが多い。高校数学では

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \dots, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$$

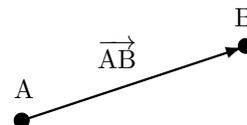
のように、矢印が上に載ったアルファベットで表す。しかし大学では、

$$a, b, c, \dots, x, y, z, A, B, C, \dots, X, Y, Z$$

のように、太字のアルファベットで表すことが多い。手書きすると図 1.2 のようになる。

問 15 図 1.2 を参考にして、太字のアルファベットを全て (小文字・大文字ともに)、3 回ずつ書け。

ベクトルを記号で表すやりかたとして、もうひとつ便利なものがある。下図のように空間に点  $A$ ,  $B$  がある場合...



点  $A$  を始点とし、点  $B$  を終点とするようなベクトルを扱いたいことがよくある。そういうとき、そのベクトルを  $\overrightarrow{AB}$  と書くのだ。

よくある質問 12 さっき、「ベクトルが空間の中のどこにあ

小文字の太字

a b c d e f g h i j k l m n  
o p q r s t u v w x y z

大文字の太字

A B C D E F G H I J K L M N  
O P Q R S T U V W X Y Z

注：小文字と大文字を，字の大きさだけでなく，形ではっきり区別できるように書くこと。例えば，小文字のVを **V** と書く人がいるが，その形では大文字の **V** と区別できない。W と書くべきである。

注：大文字には，**C**, **S** のように，適宜，「ひげ」をつけるとよい。

図 1.2 太字のアルファベットの手書き例。大文字と小文字の書き分けに特に注意が必要なのは，**C** と **c**，**O** と **o**，**P** と **p**，**S** と **s**，**V** と **v**，**W** と **w**，**X** と **x**，**Z** と **z** である。また，**h** と **n** も容易に紛らわしくなるので注意。

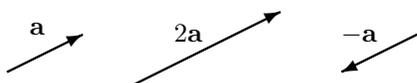
るか，ということはない」とありましたよね。でも，そのベクトル  $\vec{AB}$  は，点 A と点 B (の間) にあります。なんか矛盾してませんか? ... 確かに  $\vec{AB}$  は特定の場所 A, B を使って定義されましたが，それをどの場所を持って行ってもいいのです。例えばもしも別の場所に点 C と点 D があって， $\vec{CD}$  が  $\vec{AB}$  と同じ向きで同じ大きさ (長さ) なら  $\vec{AB} = \vec{CD}$  なので， $\vec{CD}$  のことを  $\vec{AB}$  と呼んでもいいのです (紛らわしいけど間違いではない)。

ベクトル **a** の大きさを  $|a|$  と表す。大きさが 0 であるようなベクトルを **0** と書く。すなわち  $|0| = 0$  である。

さて，「向きを持たず，大きさだけを持つ量」を スカラー と呼ぶ。要するに普通の実数 (2 とか 3.14 とか -5 など) のことだ。

よくある質問 13 なら，スカラーなんて言葉を使わないで，単に実数と呼べばいいじゃないですか? ... それはそうですが，「ベクトルでない量」という意味合いを含ませるためにあえてスカラーと呼ぶのです。

$\alpha$  をスカラー，**a** をベクトルとする。**a** と同じ向きで大きさが  $\alpha$  倍であるようなベクトルを，「ベクトル **a** の  $\alpha$  倍」，もしくは  $\alpha a$  と定義する。ただし，マイナス倍は，向きを逆にする。



スカラーを表す変数は，普通の数の変数と同じように，細字の斜字体で表記する。スカラーとベクトルの表記の違いをよく見比べてみよう：

—— スカラーとベクトルの字体の違い ——

スカラー: *a, b, c, \dots, x, y, z, A, B, C, \dots, X, Y, Z*  
 ベクトル: **a, b, c, \dots, x, y, z, A, B, C, \dots, X, Y, Z**

両者は見た目では明らかに違う。字の太さだけでなく，形も違う。この違いをよく覚えて，スカラーとベクトルを混同しないようにしてほしい。

よくある間違い 3 ベクトルを普通の (矢印もつけない) 細字，つまり *a, b, c, \dots* 等と書いてしまう ... これは，毎年，多くの資源生が何回も何回もやらかします。あまりに深刻なので，大きく書いておこう!

—— 約束 ——

ベクトルは太字で書くか，上付き矢印を書くこと!  
 単なる細字で書いてはいけない!

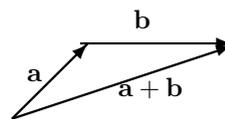
また，太字で書くと決めたベクトルを上付き矢印で書いたり，その逆をしたりしてはいけない。例えば，あるベクトルを **a** と書くと決めたなら，それを  $\vec{a}$  と書いてはいけない。

2つのベクトル **a, b** が，0 でないスカラー  $\alpha$  によって，

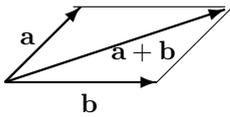
$$\alpha a = b \tag{1.46}$$

と書けるとき，**a** と **b** は互いに 平行 である，という (定義)。これは直感的に明らかだろう。

ここで，ベクトル同士の足し算 (和) を定義しよう: 2つのベクトル **a, b** について，**a** の終点に **b** の始点を置いたときに，**a** の始点から **b** の終点までを結ぶベクトルを，「**a** と **b** の和」，もしくは **a + b** と定義する。

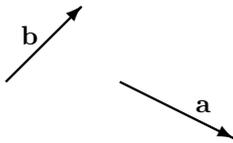


または，こう考えても良い: **a, b** の各始点を共有させるときに，**a, b** が張る平行四辺形の対角線 (始点は各ベクトルの始点) に対応するベクトルが **a + b** である。中学校の理科でやった，平行四辺形を使った力の合成を思い出せばよい。



これらの2つの考え方(定義)は、同等である。

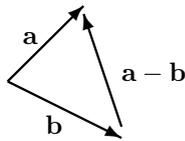
問16 以下の2つのベクトル  $a, b$  について、 $a + b$ ,  $a - b$ ,  $2a + 3b$  を、それぞれ作図せよ。



次に、ベクトル同士の引き算(差)を定義しよう: 2つのベクトル  $a, b$  について、

$$a = b + x \text{ を満たすベクトル } x \text{ を求めること}$$

を「 $a$  から  $b$  を引く」と呼び、 $a - b$  と書く。これは、形式的には式(1.12)とほとんど同じだ。図では以下のようになる:



初心者はこの話で、 $a - b$  の向きを混乱することがよくある。 $a - b$  の終点は  $a$  (の終点) であり、 $a - b$  の始点は  $b$  (の終点) である。これを縮めて、「ベクトルの引き算は終点引く始点」と覚えるとよい。

さて、ベクトルを表す時にいつも矢印を作図するのは面倒くさくて仕方ない。そこで便利なのが「座標」という考えである。これは、図1.3のように、ベクトルを座標平面( $x$ 軸と $y$ 軸があるような平面)の上に、始点が原点  $O$  に来るように<sup>\*7</sup>置き、終点(矢印の先端)から  $x$  軸と  $y$  軸のそれぞれに垂直に線をおろして(方眼紙のように)、原点からそれぞれへの長さを、 $(3, 2)$  のように並べたものである。

これは平面上のベクトルの場合だが、空間のベクトルの場合は、さらに高さ方向の軸( $z$ 軸)があるような座標空間を考えて、 $(3, 2, 1)$  のように3つの数値を並べることで表現できる。こういうのを「座標」と呼ぶ。ベクトル

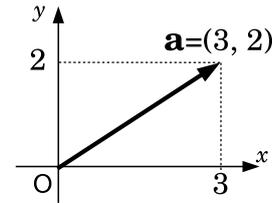


図1.3 ベクトルを座標で表す。

ルは矢印で表しても、座標で表してもよいのである。

座標の利点は、「計算が楽」ということだ。あるベクトルをスカラー倍したりベクトル同士を足したり引いたりするとき、矢印ならいちいち作図しなければならないが、座標なら数値の計算で済む。

例1.8  $a = (1, 2)$  と  $b = (-3, 4)$  について、 $5a + b$  は?  $5a + b = 5(1, 2) + (-3, 4) = (5 \times 1 - 3, 5 \times 2 + 4) = (2, 14)$  (例おわり)

### 1.15 位置ベクトル

前節で述べたように、ベクトルは大きさ(長さ)と向きを持つ量であり、本来は、それが空間のどこにあるかは問われない。でも、空間内のどこかに原点  $O$  を定めれば、空間内の点  $P$  の位置は、ベクトル  $\vec{OP}$  によって表現することができる。このように、空間の点の位置を表すベクトルのことを、位置ベクトルと呼ぶ。位置ベクトルを考えると、空間内のどこかに原点があって、そこを始点とするベクトルを考えているのだという意識を持とう。ただし、その原点が具体的にどこに置かれるのかということは、多くの場合は問題にされない。どこにあるのかは知らなくても、どこかにあるのだ。

位置ベクトルは、次の例のように使う:

例1.9 空間内に2つの点  $A, B$  があり、それぞれの位置ベクトルを  $a, b$  とする。その意味は、どこかに適当な原点  $O$  があって(どこでもよい)、 $a = \vec{OA}$ ,  $b = \vec{OB}$  である、ということだ。このとき、 $\vec{AB} = b - a$  である(なぜかは各自考えてみよう)。また、線分  $AB$  の中点  $C$  の位置ベクトル  $c$  は( $c$  は  $\vec{OC}$  のこと)、

$$c = \frac{a + b}{2} \tag{1.47}$$

である(なぜかは各自考えてみよう)。

では、線分  $AB$  を  $m : n$  に内分する点  $P$  (つまり、線分  $AB$  上であって、 $AP : PB = m : n$  になるような点  $P$ ) は、どこにあるだろうか?  $P$  の位置ベクトルを  $p$  としよ

<sup>\*7</sup> 原点をあらわす  $O$  は「零」ではない。origin の頭文字の「オー」の大文字である。

う (図 1.4)。明らかに,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \mathbf{a} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \frac{m}{m+n} (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &= \frac{na + mb}{m+n} \end{aligned} \quad (1.48)$$

となる。この式の右辺で  $m = n = 1$  とすると式 (1.47) の右辺に一致する! (例おわり)

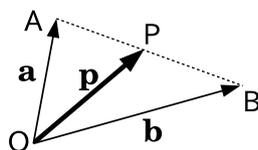


図 1.4 点 A と点 B の間を内分する点 P。

問 17 点 A, B の位置ベクトルがそれぞれ (1, 2) と (3, 6) であるとき,

- (1) AB を 1:2 に内分する点の座標を求めよ。
- (2) AB を 2:1 に内分する点の座標を求めよ。

よくある質問 14 ベクトルは太字よりも上付き矢印を使ったほうが分かりやすいです。... そのうち太字に慣れますよ。

## 1.16 有効数字

現実的な話題で出てくる数値の多くは、誤差を持つ。

例えば、総務省統計局によると、平成 27 年 2 月 1 日現在、日本の総人口は、「1 億 2697 万人」らしい。この推計値に「1 万人」の桁までしかないことに注意しよう。本当は、1 億 2697 万 5678 人とか、1 億 2697 万 1212 人のように、万よりも小さな桁にも何か数があるはず。でも、誤差のために、そこまでの詳しい数は出せないのだ。というのも、日本では、1 日に約 3 千人 (約 30 秒に 1 人) のペースで赤ちゃんが生まれるし、同じくらいのペースで人が亡くなっている。それらの人の生死は等間隔で起きるわけではないし、起きてすぐに総務省に報告が来るわけでもないから、誤差ゼロで人口を推計することはほぼ無理だし、意味ないのだ。

そこで、上の「1 億 2697 万」という数は、億から万までの位の数字、つまり、1, 2, 6, 9, 7 だけが意味あると考える。このように、誤差を含む数値において、意味のある数字のことを「有効数字」と呼ぶ。そして誤差は、有効数字の中で、最も小さな位の数 (上の例では 7) に影響する程度だろうと考える。従って、最も小さな位の数は、

信用できない (意味がない) わけではないが、ちょっと怪しいぞ (上の例では、7 が 6 とか 8 になってもおかしくないかも)、と疑ってかかるのだ。

誤差のある数値を扱う時は、常に有効数字を意識しよう。まず、数値の有効数字がどの桁までなのかをはっきりさせよう。そのときに注意が必要なのは「0」という数字の扱いである。

例えば、「A 君、今、いくら持ってる?」という間に、A 君が「だいたい 1200 円」と答えたとする。このとき、おそらく真実は 1100 円から 1300 円くらいの間にある (誤差は 100 円くらい) と考えるのが常識的な判断だろう。この場合、有効数字は 1 と 2 の 2 桁であり、それよりも下の 2 桁の 0 は、有効数字ではなく、位取りのため (数値の桁を表現するため) の 0 であるにすぎない。ところが、A 君は実際は几帳面な人で、10 円単位で財布の中身を把握していたとするなら、A 君の「だいたい 1200 円」の意味するところは、1190 円から 1210 円くらい、ということになる。その場合、1, 2 だけでなく、その次の 0 (つまり 10 円の位の 0) も、有効数字である。

つまり、0 という数字は困ったもので、「位取りの 0」と「有効数字の 0」という 2 つの異なる役割を担う。それが紛らわしくて、数値を見ただけでは判断できないのだ (そういう意味では、上の人口の「1 億 2697 万人」の例でも、ホントは有効数字の 0 が万よりも小さな位、例えば千とか百にもあったかもしれない)。

ところが、小数点が現れると、有効数字がはっきりすることがある。例えば、100.0 という表現を考えよう。これは数学的には 100 と同じ。だから、100.0 なんて書かずに、100 と書けば良いように思う。実際、小数点より右側には、位取りのために末尾 (右端) に 0 を付け加える必要は無い。にもかかわらず、わざわざ 100.0 というふうに小数点の右側に 0 がある場合、この 0 は位取りの 0 ではなく、有効数字の一部であると解釈するしかない。すると、それよりも大きな位の数は、全部有効数字のはずである。従って、100.0 は、1, 0, 0, 0 という 4 つの数が有効数字である、つまり有効数字は 4 桁である、と自信を持って判断できるのだ。ところが、単に 100 と表していたら、自信を持って有効数字であると判断できるのは最初の 1 だけだ。

では例えば、0.0012 の有効数字はどれだろうか? 1, 2 は当然、有効数字である。しかし、それより上位にある 3 つの 0 は、小数の位取りを表す 0 と考えるのが適当である。従って、0.0012 の有効数字は、1 と 2 の 2 桁である。

問 18 以下の数のそれぞれについて、有効数字を指摘せよ。

- (1) 5.3      (2) 1230.5      (3) 5300      (4) 0.0230

このように、有効数字は、表現法によっては曖昧になってしまう。有効数字をはっきりさせたいときは、数値をあえて小数を使って書く。つまり、小数×「10の累乗」の形で書くのである。例えば、1200円を、

$$1.2 \times 10^3 \text{ 円} \quad (1.49)$$

とか、

$$1.20 \times 10^3 \text{ 円} \quad (1.50)$$

というふうを書くのだ。式(1.49)の場合は有効数字は1と2だけ(100円の位まで意味がある)だが、式(1.50)の場合は有効数字は1, 2, 0となる(10円の位まで意味がある)。数学的には、 $1.2 \times 10^3$ と $1.20 \times 10^3$ は同じなのだが、現実世界において誤差を含む数としては、これらは別物なのである。

### 1.17 有効数字の計算

では、有効数字を計算(四則演算)の中でどのように扱うかを述べる。

例として、4.56と1.2という数値の和を考える。それを筆算でやってみよう。その際、「怪しい数」を以下のように追跡する：まず、4.56は有効数字3桁で、最後の6がちょっと怪しいのでその6を で囲っておこう。1.2は有効数字2桁で、最後の2がちょっと怪しいのでその2を で囲っておこう。さて、怪しい数が足されて得られた数は、怪しさが「伝染」してくるはずなので、その数も、 または で囲う。どちらの形で囲うかは、その怪しさが伝染してきたもとの数を囲う形で決める。ただし、怪しい数からの繰り上がりによって受ける影響は無視する(怪しくないのみならず)。

すると、図1.5のようになる：

$$\begin{array}{r} 4.5 \text{ (6)} \\ + 1.2 \text{ (2)} \\ \hline 5.7 \text{ (7) (6)} \end{array}$$

図 1.5 誤差を含む数どうしの和。怪しい数を で囲ってある。

有効数字を考えなければ、結果は5.76になる。最初の

(1の位の)5は怪しくないが、その右(0.1の位)の7は、1.2の最小位の有効数字の怪しさの影響を受けているから、怪しい。この時点で、さらに右の6はあまり意味が無い。なぜなら、0.1の位の7が、6とか8かもしれないなら、それよりも詳細な(桁の小さい)情報にこだわっても仕方が無いからである。というわけで、この答の有効数字は、最初の5と次の7の2桁と考えるのが妥当だろう。そこで、3桁目の6を切り捨てるか切り上げよう。このように、無意味な桁を切り捨てたり切り上げたりすることを「丸める」という。多くの場合は、四捨五入によって丸めるので、ここでは6を切り上げて最終的な答を5.8としておこう。しかし、「常に四捨五入が正しい」というわけではなく、場合によっては値によらず切り上げたり切り捨てたりする方が妥当なこともある。

よくある質問 15 「怪しい」とか「妥当だろう」とか「としておこう」とか、なんかテキトーというか、いい加減な感じですね。。。... そうです。後で述べるように、有効数字というのは、テキトーでイイカゲンなものなのです。

このように、足し算では、最終的な答の有効数字は、次のような手順で決める：まず、足す前の数の有効数字の最小(右端)の位をチェック。上の例では「4.56」の右端は0.01の位であり、「1.2」の右端は0.1の位だ。次に、それらの中で、最も大きな位に注目する。上の例では、0.1と0.01の比較となり、大きいのは0.1の位である。その位を、最終的な答の有効数字の最小の位とする。上の例では、5.76のうち、有効数字は0.1の位まで、つまり5と7が有効数字となる。そして、それより1つ小さな位を丸める。上の例では0.01の位の数、すなわち6を四捨五入すると切り上がって、5.8となる。こうして最終的な値を確定する。

ここでは詳しくは述べないが、引き算も同様だ。引く数と引かれる数のそれぞれについて有効数字の最小位をチェックし、最小位の大きい方を最終結果の有効数字の最小位とし、それよりも1桁小さな数を丸めればよい。

問 19 以下の計算を行え。ただし、これらはいずれも誤差を含む数値とし、有効数字に気をつけて、無意味な数を書かないように気をつけよ。電卓を使ってよい。丸めは四捨五入で行え。

- (1)  $5.3 + 6.6$       (2)  $0.023 + 123.5$   
(3)  $100.2 - 13$

こんどは、4.56と1.2の積を考えよう。それを筆算でやってみよう。先ほどの和の例と同様に、「怪しい数」

を追跡する。すると、図 1.6 のようになる:

$$\begin{array}{r} 4.5 \textcircled{6} \\ \times 1.2 \textcircled{2} \\ \hline 9 \textcircled{1} \textcircled{2} \\ 45 \textcircled{6} \\ \hline 5.4 \textcircled{7} \textcircled{2} \end{array}$$

図 1.6 誤差を含む数どうしの積。怪しい数を や で囲ってある。例えば、3 段目の 9, 1, 2 は、右端の 2 が 1 段目の 6 の怪しさと 2 段目の 2 の怪しさの両方の影響を受けているので、 と の両方で囲ってある。

有効数字を考えなければ、結果は 5.472 になる。最初の (1 の位の) 5 は怪しくないが、その右 (0.1 の位) の 4 は怪しい。この時点で、さらに右の 7 や 2 はあまり意味が無い。なぜなら、0.1 の位の 4 が、3 とか 5 かもしれないなら、それよりも詳細な (桁の小さい) 情報にこだわっても仕方が無いからである。

というわけで、この答の有効数字は、最初の 5 と次の 4 の 2 桁と考えるのが妥当だろう。そこで、3 桁目の 7 を切り捨てるか切り上げる。ここでは四捨五入によって 7 を切り上げて最終的な答を 5.5 としておこう。

このように、掛け算では、最終的な答の有効数字は、次のような手順で決める: まず、掛ける前の数の有効数字の桁数をチェックする。上の例では「4.56」の 3 桁と、「1.2」の 2 桁である。次に、それらの中で、最も小さな有効数字桁数に注目する。上の例では、3 桁と 2 桁の比較となり、最小は 2 桁である。その桁数を、最終的な答の有効数字の桁数とする。上の例では、5.472 のうち 5 と 4 の 2 桁が有効数字、となる。そして、最小の有効数字 (上の例では 4) よりも 1 桁小さな数値を丸め (上の例では四捨五入の結果、7 が切り上がって 4 が 5 になる)、最終的な数を確定する。

ここでは詳しくは述べないが、割り算も同様。割る数と割られる数のそれぞれについて有効数字の桁数をチェックし、桁数の小さい方を最終結果の有効数字の桁数とし、それよりも 1 桁小さな数を丸めればよい。

問 20 以下の計算を行え。ただし、これらはいずれも誤差を含む数値とし、有効数字に気をつけて、無意味な数を書かないように気をつけよ。電卓を使ってよい。丸めは四捨五入で行え。

- (1)  $5.3 \times 2.6$                       (2)  $0.023 \times 123.5$   
 (3)  $100.2/13$

例 1.10 長さ 16 cm の棒を 3 等分したとき、1 本の長さは? 小数で表せば、 $(16 \text{ cm})/3=5.333\cdots \text{ cm}$ 。このとき、「16 cm」の有効数字は 2 桁なので、結果の有効数字も 2 桁でよからう。3 桁目を四捨五入し、「5.3 cm」が妥当な答だろう。... ちょっと待て! 「3 等分」の「3」は有効数字 1 桁では? なら、結果も有効数字 1 桁、つまり「5 cm」が正しいのでは? と思った人がいるかもしれない。でもそれは違うのだ。棒を 3 本に分けよ、と言われて「うっかり 3.1 本に分けちゃいました」なんてことはあり得ない。つまり、この「3」の誤差は、半端な小数ではなく、0, 1, 2 などの整数のはず。でも、よほどのうっかり屋さんでも 3 本を 2 本や 4 本に間違えることはなかろう。従って、この場合の誤差は 0。つまり、「3 本」は、実は  $3.0000\cdots$  本、つまり有効数字が無限にある (小数点以下に有効数字の 0 が無限に続く) と考えるのが妥当なのだ。従って、この割り算の有効数字は、「割られる数」である「16 cm」の有効数字の桁数で決まるのだ。

ここで、「小数にせずに、 $\frac{16}{3} \text{ cm}$  というふうに分数のままにしておけばいいじゃないか」と思う人もいるだろう。数学的にはそれで正解である。でもこれが、機械工作等の実務だったらどうだろうか? 「 $\frac{16}{3} \text{ cm}$ 」よりも「5.3 cm」の方が、ものさしで測り取るのは簡単なので、実務的な現場では、数値は分数でなく小数で表しておきたい、ということがよくあるのだ。(例おわり)

ここで注意。有効数字というのは、実は、あまり厳密な考え方ではない。

例 1.11  $3.47 \times 2.88$  を考えよう。有効数字を考えなければ、

$$3.47 \times 2.88 = 9.9936$$

となる。3.47 も 2.88 も有効数字 3 桁だから、結果の有効数字は 3 桁のはず。なので、4 桁目 (3) 以降を丸めて、

$$3.47 \times 2.88 = 9.99$$

となる。ところが、この計算と微妙に違う、 $3.47 \times 2.89$  を考えよう。有効数字を考えなければ、

$$3.47 \times 2.89 = 10.0283$$

となる。3.47 も 2.89 も有効数字 3 桁だから、結果の有効数字は 3 桁、ということで、4 桁目以降 (283) を丸めて、 $3.47 \times 2.89 = 10.0$

となる。ここで、変な気がしないだろうか? これらの 2 つの計算は、ほとんど同じような数値を扱っている (2.88 が 2.89 に変わっただけ)。ところが、結果の有効数字は、前者 (9.99) では 0.01 の桁までであったのに、後者 (10.0) では 0.1 の桁までしかない。つまり、後者の誤差

は前者の誤差の10倍!? (例おわり)

こういうのが有効数字の弱点である。上述の「積の有効数字の扱い方」を厳密に適用すると、繰り上がりが発生する瞬間に、いきなり有効数字が1桁、引き上げられてしまい、誤差が突然に10倍になる、という、本来は起きるはずのないことが起きてしまうのだ。

本来、誤差のある数は、その誤差も明示的に表記するのが科学的に正しい態度だ。例えば、3.47の誤差が0.01程度であるとわかっていれば、「 $3.47 \pm 0.01$ 」と書くべき。そして、計算の中で、そのように表された誤差もきちんと追跡すれば(そのやり方は後の章で学ぶ)、変なこととは起きない。

でもそれは結構面倒くさい。だから、誤差の大きさの追跡はサボって、「有効数字」で勘弁してもらうのだ。そういう状況で「有効数字は3桁? 4桁?」と考えすぎるのは不毛である。そんなことに悩むくらいなら、1桁余分に多くとっておくか、あるいは真剣に誤差の大きさを追跡するべきだ。

それでもあえて「有効数字」にこだわりたければ、上の例について言えば、掛け算における有効数字の扱い方をここでは緩めて、 $3.47 \times 2.89 = 10.0283$ を、暫定的に有効数字4桁として、10.03とするのが良いように私は思う。君はどう考えるだろうか?

問21 長さ6.4 cmの棒が2本ある。これを繋ぎあわせて1本の棒にしたら、長さは何cmか?

- (1)  $6.4 \text{ cm} + 6.4 \text{ cm} =$ という計算で、有効数字に気をつけて、答えを求めよ。
- (2)  $6.4 \text{ cm} \times 2 =$ という計算で、有効数字に気をつけて、答えを求めよ。
- (3) これらの答の有効数字の桁数が違うことを、どのように解釈すればよいか?

ところで、例えば4.2という値(有効数字)は、実際のところ、どのくらいの範囲の値を意味するのだろうか? よくあるのが、「4.15以上4.25未満」という説明である(末尾を四捨五入して4.2になる範囲)。実はそうとも限らないのだ。「4.1以上4.3未満」や、「4.0以上4.4未満」であっても、4.2という有効数字で表現してよいのだ。

「なぜ!?!」と思う人には逆に聞こう。「4.1以上4.3未満」を有効数字で表すのに、4.2以外にどのような適切な表現があるだろう? 4.1や4.3は偏っているからダメ

だし、4や5は論外である。なら、4.2しか無いではないか!?!

問22 以下の数値を、「±いくら」を使わずに、有効数字で表すとどうなるか?

- (1)  $13.2 \pm 0.1$     (2)  $13.2 \pm 0.2$     (3)  $13.2 \pm 0.6$

このように、「有効数字」は、おおざっぱな考え方である。だから「有効数字を何桁にするのが正解か?」というのは、あまりこだわっても仕方ないのだ。

よくある質問16でも高校の物理や化学では、有効数字の桁数を1つでも間違えたら減点されました... 大事なのは、あなた自身がどう考えるかです。あなたが「正しい」と確信することにダメ出しされたなら、その相手と議論すればよいのです。それが学問です。

### 1.18 ギリシャ文字

数学では、数や概念を表すのに、たくさんの記号を必要とする。とりあえず英語のアルファベットだけでは足りないので、ギリシア文字もよく使う。以下に、特によく使うギリシア文字を示す。手書きでの書き方も含めて、君は必ずこれらを記憶せよ。

問23 図1.7, 図1.8, 図1.9, 図1.10に出ているギリシア文字を全て、3回ずつ書け。

アルファ $\alpha$	$\alpha$		右上や右下が出過ぎないように。
ベータ $\beta$	$\beta$	$\times \beta$	なめらかに一筆書き。ドイツ語の「エスツェット」にならないように。
ガンマ $\gamma$	$\gamma$	$\times \gamma$	なめらかに一筆書き。アールの小文字にならないように。
デルタ $\delta$	$\delta$	$\times \delta$	数字の8にならないように。
イプシロン $\epsilon$	$\epsilon$ , $\epsilon$		2つの書き方がある。両者は別の記号として区別する。
ゼータ $\zeta$	$\zeta$		$\epsilon$ の最後を曲げる。(ひらがなの「ち」にちよつと似ている。)
エータ $\eta$	$\eta$	$\times \eta$	エヌの小文字にならないように、右下を伸ばす。
シータ $\theta$	$\theta$		

図1.7 ギリシア文字の小文字( $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta$ )の書き方。×がついているのは、よくある間違った書き方。

ラムダ $\lambda$	$\lambda$		漢字の「入」にちよつと似ている。
カッパ $\kappa$	$\kappa$	$\times k$	一筆書き。kやKにならないように、頭を抑える。
ミュー $\mu$	$\mu$	$\times \mu$	左下から一筆書き。ユーuにならないように、左下を伸ばす。
ニュー $\nu$	$\nu$	$\times \nu$	ヴイvにならないように、左下を尖らせて左に突き出す。
クシー $\xi$	$\xi$		ゼータの最後にひとつひねりを加える。
パイ $\pi$	$\pi$		
ロー $\rho$	$\rho$		真ん中から書き始め、左回りに左下まで伸ばす。
シグマ $\sigma$	$\sigma$	$\times \sigma$	右上から書き始める。数字の6にならないように。

図 1.8 ギリシア文字の小文字 ( $\lambda, \kappa, \mu, \nu, \xi, \pi, \rho, \sigma$ ) の書き方。×がついているのは、よくある間違った書き方。

タウ $\tau$	$\tau$	$\times \tau$	下端は右にちよつと曲げるとよい。左に曲げたらJになってしまう!
ファイ $\phi$	$\phi, \phi$		2つの書き方がある。両者は別の記号として区別する。
カイ $\chi$	$\chi$		英語のxの筆記体と似ている。
プサイ $\psi$	$\psi$		左上を左にちよつと曲げると、雑に書いても $\phi$ と区別しやすい。
オメガ $\omega$	$\omega$	$\times \omega$	w (Wの小文字) と区別するために、左右上端を内側に向ける。

図 1.9 ギリシア文字の小文字 ( $\tau, \phi, \chi, \psi, \omega$ ) の書き方。×がついているのは、よくある間違った書き方。

ガンマ $\Gamma$	$\Gamma$	$\times \Gamma$	まず左上から左下、次に左上から右上。
デルタ $\Delta$	$\Delta$		細長い三角形。活字だと一部の線が太いが、手書きでは気にしない。
シータ $\Theta$	$\Theta$		細長いヘリポート。
ラムダ $\Lambda$	$\Lambda$		地図の針葉樹の記号に似ている。
クシー $\Xi$	$\Xi$		
パイ $\Pi$	$\Pi$		小文字のパイと違って、足はまっすぐ。
シグマ $\Sigma$	$\Sigma$		
ファイ $\Phi$	$\Phi$		
プサイ $\Psi$	$\Psi$		
オメガ $\Omega$	$\Omega$		

図 1.10 ギリシア文字の大文字 ( $\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi, \Omega$ ) の書き方。×がついているのは、よくある間違った書き方。

よくある間違い 4 以下の文字の書き分けができない:  
 $\gamma$  と  $r$ ,  $\delta$  と  $8$ ,  $\eta$  と  $n$ ,  $\kappa$  と  $k$ ,  $\mu$  と  $u$ ,  $\nu$  と  $v$ ,  $\sigma$  と  $6$ ,  $\chi$  と  $x$ ,  $\omega$  と  $w$ 。

よくある質問 17 高校まで三角形を「 $\Delta$ 」とかいていたのですが、デルタ「 $\Delta$ 」と三角形「 $\triangle$ 」は書き分けがあるのですか? ... 手で書くときは、 $\Delta$  はちよつと細長く、しかも右に傾いた感じで書きます。ちなみに  $\Delta$  は大学では「ラブラシアン」という概念を意味する記号でもあります。

よくある質問 18  $\Omega$  って「オーム」じゃないんですか? ... 中学校理科で習った電気抵抗の単位  $\Omega$ 。これを「オーム」と呼ぶのは、「オームの法則」というのを発見した Ohm さんという物理学者の名に由来します。ちょうど電流の単位を A と書いて「アンペア」と呼ぶのと同じ。「エー」とは呼ばないでしょ (アンペアは Ampere という物理学者の名に由来します)。Ohm さんの頭文字だから、大文字の O にしたかったのかもしれませんが、数字の零と紛らわしいので、O に対応するギリシア文字の  $\Omega$  を採用した、というわけです (多分)。

よくある質問 19 携帯電話の記号のところにギリシア文字が入っているのですが、 $\iota$  や  $o$  とは何ですか? ... それぞれイオタ、オミクロンといいます。数学ではあまり使いません。

よくある質問 20  $\xi$  とか  $\eta$  とかって、これまで実際に見たことはありません。本当に使うのですか? ... 大学で専門的な勉強をしていくと、いろんなところで出てきますよ。

### 演習問題

演習問題 1 もし「0で割る」ことができるなら、どのような矛盾が生じるか? 割り算の定義に基いて述べよ。

### 演習問題 2

式 (1.45) のすぐ後に「ただし  $a \neq 1$  とする」という条件があった。もし  $a = 1$  を考えると、どのような困ったことが起きるか? ヒント:  $a = 1$  の具体的な場合を考えてみよ。例えば、 $\log_1 2$  はどのようになるだろうか? 定義にあてはめて考えよう。

### 演習問題 3

三角形 ABC の各頂点に、互いに等しい質量のおもりがくっついている。辺 BC の中点を D とすると、この3つのおもりの重心は、線分 AB を 2:1 に内分する点にあることを、位置ベクトルを使って示せ。ヒント: A, B, C の各位置ベクトルを  $a, b, c$  とすると、3つのおもりの重心の位置ベクトル  $r$  は、 $r = (a + b + c)/3$  である (これは重心の定義)。

## 問の解答

ここに解答が出ていない問題は、解答が省略されていると思って欲しい(演習問題以外は、簡単な問題か、テキストのどこかに既に答が書いてある問題だ)。各自、自力で考えて解こう。また、略解と書かれているところは、最終的な答だけを述べているが、君はきちんと導出過程も書くこと。

答1 ここでは「A君は学生である」の「は」を等号のように扱って、「A君=学生」と書いてしまったのが間違い。学生にはA君以外の人もあるし、A君は学生以外の属性(男性とか、茨城県出身とか、...)も持つので、「A君」と「学生」は同じではない。

答2 自然数とは、1を繰り返し足してできる数。整数とは、自然数から自然数をひいてできる数。有理数とは、整数を(0以外の)整数で割ってできる数。

答3 「3.1415926, 以下, ずっと値が続く数」には、3.1415926111... や、3.1415926222... など、いろいろな数があるので、この発言では円周率をひとつの数に特定できない。

答4 略(がんばれ!)

答5 略(本文の該当箇所をまとめればOK)

答6 (1)  $a$  が分母なのか分子なのかわからない。(2)  $3 \times (-4)$  と書くべき。(3) 二重括弧は外側を  $\{\}$  に。また、末尾の  $x$  が分母なのか分子なのかわからない。

答7

- (1) 32                      (2)  $1/2^2 = 1/4$   
 (3)  $10^{-2} = 1/100$       (4)  $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$   
 (5) 1                        (6)  $10^4$

答8 (1)  $3^{-1/2}$       (2)  $5^{1/3}$

答9 略解として小数第3位までで打ち切った値を示す。レポートでは小数5位まで書くこと。(1) 11.313 (2) 2.704 (3) 1.709

答10 略。(がんばれ!)

答11 略解として小数第3位までで打ち切った値を示す。レポートでは小数5位まで書くこと。(1) 7.389 (2) 0.223

答12

- (1) 2      (2) 4      (3) 2      (4) 3      (5) -2      (6) 0

答13 略。

答14 略解として小数第3位までで打ち切った値を示す。レポートでは小数5位まで書くこと。(1) 0.301 (2) -2.221 (3) 0.693 (4) 2.302

答15 略。(がんばれ!)

答16 略。図の上に作図してみよ。ベクトルはどこに置くかを問題としない(どこに置いてもよい)ことに注意!

答17 点A, Bの位置ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  とすると

$$(1) \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3} = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) \quad (2) \frac{\mathbf{a} + 2\mathbf{b}}{3} = \left(\frac{7}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

答18 (1) 5, 3の2桁。(2) 1, 2, 3, 0, 5の5桁。(3) 5, 3は確実に有効数字だが、そのあとの2つの0は有効数字かどうかわからない。(4) 2, 3, 0の3桁。

答19 (1) 11.9      (2) 123.5      (3) 87

答20 (1) 14      (2) 2.8      (3) 7.7

答21 (1) 12.8 cm      (2) 13 cm      (3) 略(君の考えを正直に述べよ)

答22 (1) 13.1 から 13.3 までなので、0.1の桁が不確定と見て、13.2。(2) 13.0 から 13.4 までなので、これも0.1の桁が不確定と見て、13.2。(3) 12.6 から 13.8 までなので、1の桁が不確定とみて、13。

答23 略。(がんばれ!)

よくある質問 21 演習問題は解かなきゃダメですか? ... あなたの野心次第です。演習問題は、自分で考える力を養い、理解を深めることが目的。とりあえず最低限の数学がわかりたいだけなら、演習問題は飛ばしましょう。数学を自分の武器にしたいなら、演習問題に挑戦するとよいでしょう。ちなみに演習問題を解けば、授業のレポートでボーナス点がつきます。

よくある質問 22 演習問題の答が欲しいです... 考えることを楽しんで欲しいので、あえて載せていません。どうしても知りたければ質問において。一緒に考えよう!

よくある質問 23 勉強すれば本当に数学が好きになりますか? リメディアル教材の内容を出来るようになる自信がありません... 「はじめに」に載っている勉強法を守って丁寧にやれば大丈夫。そうすると、だんだん楽しくなって、数学が好きになってきます。やみくもに焦ってストイックに頑張るだけでは、すぐに心折れちゃって、数学が嫌いになっちゃうよ。

## 第2章

# 物理量と単位

### 2.1 物理量は、数値×単位

数学は数を抽象的な概念として扱う。例えば数学で「方程式  $3x = x + 4$  の解は  $x = 2$  である」という時の  $x = 2$  は、何か具体的なものの量を想定してはいない。

一方、現実の様々な問題では、何らかの実体を伴った具体的な量を扱う。例えば「君の身長」や「君の 100 m 走の記録」は具体的な実体を表す量である。このように、具体的な実体を表す量のことを **物理量** と呼ぶ<sup>\*1</sup>。

物理量は、通常、160 cm とか 12.3 秒というふうに、数値と単位の積（掛け算）で表される。君は 160 cm というとき、cm という単位は、160 という数値のオマケか添え物のように思っているかもしれないが、そうではない。160 cm とは

$$160 \times \text{cm} \quad (2.1)$$

という意味だ（積を表す  $\times$  は省略されている）。つまり、160 cm は、「cm（センチメートル）を 160 個ぶん集めた量（長さ）」だ。同様に、12.3 秒とは 12.3× 秒であり、「秒を 12.3 個ぶん集めた量（時間）」だ。このように、物理量の大きさは「何の何個分」という形で表され、その「何の」に相当するのが **単位** (unit) である<sup>\*2</sup>。

物理量の扱いで、数値が正しくても単位を間違えると大惨事になる。

例 2.1 1999 年 9 月 23 日、米国の火星探査機「マーズ・クライメート・オービター」が、火星に到達した直後に、消息を断った。探査機を制御する 2 つのチームが、片方はメートルやキログラムという単位を使い、もう片方はヤードやポンドという単位を使っており、データ共有に失敗して、制御不能で事故に至ったらしい。

\*1 物理が嫌い!苦手!という人もいるが、世の中の量のほぼ全ては「物理」量であり、その計測や扱いにおいて、物理学の考え方は必要である。

\*2 「単位」は多義語であり、大学の授業をいくつ履修したか（英語では“credit”）を表する時も使う。

例 2.2 2000 年 3 月 30 日、埼玉県川口市の病院で、ある患者が、薬剤を過剰投与され、死亡した。医師の指示では薬剤は 80 mg だったが、処方箋には、80 アンブルと記入され（1 本のアンブルには 10 mg の薬剤が入っている）、結果的に、看護師が 800 mg の薬剤を投与したらしい。（例おわり）

しかし、大変残念ながら、伝統的に、生物資源学類生の多くは、単位が苦手であり、単位を平気で付け忘れる<sup>\*3</sup>。当然、そのような答えは不正解であり、0 点である。いにしへの資源生曰く、「単位 (unit) を忘れて単位 (credit) を落とす」と。

よくある質問 24 そこまで単位にこだわらなくてもいいのでは? ... 君が農家で、単位を間違えて基準を超える濃度で農薬撒いたらどうなります? 野菜全部出荷停止ですよ。

でも、高校や、大学でも他の授業では、単位の付け忘れは減点だけです。0 点なんて、厳しすぎませんか? ... そんなぬるい教育をするから大惨事が起きるのです。

でも、「三角形 AB について辺 AB の長さを 1 とする」みたいに、最初から単位が無い問題文もあるじゃないですか? ... 数学でよくあるそういう問題は、AB の長さが 1 cm であっても、1 m であっても、1 km であっても通用するように作られているのです。こういうときは答にはもちろん単位をつける必要は無いし、つけてはダメ。

物理でも、「力を  $F$  とし、質量を  $m$  とする...」みたいに、単位が書かれていない問題がありますよね? ... 単位はその  $F$  や  $m$  の中に含まれているのです。例えば  $m$  を実際に数値で表すと、「 $m = 3 \text{ kg}$ 」や「 $m = 3000 \text{ g}$ 」と書いたりします。このとき、 $m$  には、3 や 3000 という数値だけでなく kg や g という単位も一緒に入っているのです。

「 $t$  秒の時間で、毎秒 2 m の速さで、6 m 進んだ。 $t$  を求めよ」みたいな問題は? 「 $t = 3$  秒」ですか? 「 $t = 3$ 」ですか? ... 問題文で、その時間は「 $t$  かける秒」で定義されている（単位

\*3 その一部は、単位に自信がないから、「つけ忘れたふり」をしてごまかしてるのだろう。

は変数  $t$  の外に出されている) ので,  $t$  は単位を持っていません(後述する無次元量)。従って  $t = 3$  が正しいです。でもこういう書き方は稚拙であり, 大学では一般的ではありません。

さて, 複数の物理量どうしを足したり引いたり, 大小を比べたりするには, 単位を揃える必要がある。例えば, 「 $20 \text{ cm} + 1.23 \text{ m} = ?$ 」という問は,

$$0.2 \text{ m} + 1.23 \text{ m} = 1.43 \text{ m} \quad (2.2)$$

$$20 \text{ cm} + 123 \text{ cm} = 143 \text{ cm} \quad (2.3)$$

というふうに, ひとつの単位に揃えないと計算できない。また,  $20 \text{ cm}$  と  $1.23 \text{ m}$  のどちらが大きい? という問に,  $20$  と  $1.23$  という数の大小だけで判断して「 $20$ の方が大きい!」というのは愚かである。

こういう話をアタリマエだ!と思わずに, よく考えよう。式 (2.2) を丁寧に考えれば, まず左辺の 2 つの項を  $m$  という量でくくって, 左辺  $= (0.2 + 1.23) m$  という式を立て, その括弧内を普通に数どうしの足し算で計算し, 右辺の  $1.43 m$  に至るのだ。この「共通する量でくくる」ところで, 暗黙のうちに分配法則 (式 (1.24)) を逆向きに使っているのだ! それは,  $0.2 m$  や  $1.23 m$  という量を, ともに「同じ単位の何倍か」に揃えたからできたのだ。改めて, 単位は単なる添え物ではなく, 物理量の重要な一部だと感じられるではないか!

## 2.2 次元

さて, どんなに頑張っても単位を揃えられないような量どうしも存在する。例えば  $20 \text{ cm}$  と  $5$  時間がそうである。前者は長さ, 後者は時間を表すのだから, 単位は揃えられない。

こう考えれば, 世の中の様々な物理量は「互いに単位を揃えられるかどうか」という観点で分類できるだろう。そういう性質を「次元」と呼ぶ。上の例では,  $20 \text{ cm}$  という量は「長さ」という次元を持ち,  $5$  時間という量は「時間」という次元を持つ。

問 24 (本節で出てきた) 次元とは何か?

次元が違う量どうしは, 足したり引いたり, 大小を比較したりはできない。実際,  $20 \text{ cm}$  と  $5$  時間を「足す」ことはできないし, 無理に  $20$  と  $5$  を足して  $25$  を得ても, それはもはや何の物理量も表さない。「 $20 \text{ cm}$  と  $5$  時間はどちらが大きいか」などという問も無意味である。

## 2.3 単位の掛け算と割り算

ところで, 単位は, 普通の数と同じように掛け算ができる:

例 2.3 隣接する 2 辺の長さが  $2 \text{ m}$  と  $3 \text{ m}$  であるような長方形の面積は,

$$2 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 6 \text{ m}^2 \quad (2.4)$$

である。このとき, 結果に  $\text{m}^2$  という単位が出てきたのは, 「面積を求めたから」というよりも, 「 $m$  を 2 回掛けたから」なのだ。(例おわり)

単位は, 割り算もできる:

例 2.4  $100 \text{ m}$  の距離を  $20$  秒で走る人の (平均の) 速度は,

$$\frac{100 \text{ m}}{20 \text{ 秒}} = 5 \text{ m/秒} \quad (2.5)$$

となる。このとき, 単位どうしの割り算の結果として, 速度の単位「 $\text{m/秒}$ 」が出てきた。この単位の/ $\text{秒}$ という記号は, 割り算の記号なのだ。従って,  $\text{m/秒}$  を  $\frac{\text{m}}{\text{秒}}$  と書いても OK である。(例おわり)

よくある質問 25 割算に/ $\text{秒}$ という記号をなるべく使わない, という約束がありましたが,  $\text{m/秒}$  は OK なのですか? ... 慣習的に, 単位の中では/ $\text{秒}$ をよく使います。例外ということにしておきましょう (国際規格でも認められている)。

「 $5 \text{ m/秒}$ 」は「 $5$ メートル毎秒」とか「毎秒  $5$ メートル」とも言われる。このような「毎...」は, 「... という単位あたり」と同じ事である。「 $5$ メートル毎秒」は「 $1$ 秒あたり  $5 \text{ m}$ 」と同じである。そして, 「...あたり」は「...で割る」という意味である。たとえば, 「りんご  $6$  個を  $3$  人で分けるとき, 一人あたりいくつ?」という問には,  $6 \text{ 個} \div (3 \text{ 人})$  で計算するだろう。

困ったことに, 世の中にはこの「毎...」や「...あたり」を省略するという悪習がある。決して真似てはいけぬ。

例 2.5 日本の GDP (国内総生産) は,  $1$  人あたり約  $4$  万ドルと言われることがある。これは,  $1$  人あたり 1 年間あたり 約  $4$  万ドル, もしくは約  $4 \text{ 万ドル}/(\text{人} \cdot \text{年})$  が正しい。

例 2.6 テレビの天気予報では, 「台風の中心付近の最大瞬間風速は  $40 \text{ m}$ 」などと言われるが, これは 毎秒  $40 \text{ m}$ , もしくは  $40 \text{ m/秒}$  が正しい。

例 2.7 放射線量を表すときに使われる Sv (シーベルト) と Sv/h (シーベルト毎時) は全く違う単位なのに、後者を省略して前者のように言うてしまう報道が多い。これはヤバイ。例えば  $1 \mu\text{Sv/h}$  と  $1 \mu\text{Sv/s}$  は、/h や/s を省略したら同じ表現になってしまうが、実際は、後者は前者の 3600 倍である。(例おわり)

こういう悪習を人前で晒すと恥をかく。その恥は、本人だけでなく、出身大学まで及ぶ。

ここまで読んで、君は「面倒くさ!」と思ってるかもしれないが、単位は君を助けてくれることもある。次節では小学校レベルの問題を扱うが、意外に苦手な人も多い。そういう問題で、単位が役に立つのだ。

## 2.4 単位を埋め込んで計算せよ!

ところで、式 (2.4) を、次のように書く人が多い:

$$2 \times 3 = 6 \text{ m}^2 \quad (2.6)$$

高校の参考書もこういう記法を勧めてたり、大学教員にもこう書く人がいるが、これは変だ。なぜか? もしこういう書き方が OK なら、「2 辺の長さが 2 cm と 3 cm の長方形の面積は?」という問題についても、

$$2 \times 3 = 6 \text{ cm}^2 \quad (2.7)$$

と書けるはずだ。式 (2.6) と式 (2.7) の左辺は共通なので、等号の公理 (式 (1.4)) から、

$$6 \text{ m}^2 = 6 \text{ cm}^2 \quad (2.8)$$

これは明らかに変だ!。その原因は、式 (2.6) と式 (2.7) の左辺に単位を埋めこまなかったことにある。単位を持つ量の計算は、式の中に数値だけでなく単位も埋め込むべきなのだ。そうすれば、単位の誤記や、単位のつけ忘れという重大なミスを防止できる。

式の中に単位を埋め込みたくなければ、式 (2.6) や式 (2.7) の右辺の単位も書かなければよい。それは、単位を外した数値<sup>\*4</sup>の間の計算であり、論理的には問題ない。そして出てきた数値に改めて単位をつけた答を、別の場所に書くのだ。それもめんどくさい人は、

$$2 \times 3 = 6 \quad [\text{m}^2] \quad (2.9)$$

と書いたりする。この場合、右の方の  $[\text{m}^2]$  は、「最後に出てきた数値にこの単位を掛けたものが、最終的な答え

ですよ」という事情を書き添えた「メモ」であり、等式の一部ではない。

しかしこれはいずれも不合理な慣習である。やはり単位を埋め込んで計算すべきなのだ。そうすれば、単位が計算を助けてくれることがあるのだ。

例 2.8 120 g で 600 円の肉は、900 g でいくらか? もちろん、「120 g あたり 600 円」だから 1 g あたり... と考えて、ここは割り算、ここは掛け算、というふうに進めてもいいが、単位を頼りに考えると楽なのだ:

$$\frac{600 \text{ 円}}{120 \text{ g}} \times 900 \text{ g} = \frac{600 \times 900 \text{ 円} \cdot \text{g}}{120 \text{ g}} = 4500 \text{ 円} \quad (2.10)$$

式 (2.10) の左辺には、それぞれの数値に単位をつけた。つまり、単位を式に埋め込んだ。数値と単位は掛け算の関係なので、順番を入れ替えて、数値の計算と、単位の計算に分離する。そして数値は数値で計算し、単位は約分して簡単にする。そうすれば、最後に「円」という欲しかった量の単位が現れ、立式が正しかったことが裏付けられる。もしもこの問題を、うっかり

$$\frac{120 \text{ g}}{600 \text{ 円}} \times 900 \text{ g} = \dots \quad (2.11)$$

とやっちゃったら、最終的な単位が  $\text{g}^2/\text{円}$  になる。これは意味不明なので、何か間違っていた、とわかるのだ。

例 2.9 小学校で、速さと道のりと時間の関係を、

「速さ=道のり ÷ 時間」

「道のり=速さ × 時間」

「時間=道のり ÷ 速さ」

と習った。これを、いわゆる「みはじ」、つまり

$$\frac{\text{み}}{\text{は} \mid \text{じ}} \quad (2.12)$$

という図式(「み」は道のり、「は」は速さ、「じ」は時間)で覚えた人も多いだろう(「みはじ」以外にも「きはじ」とか「はじき」とか「木の下にはげ爺さん」などのバージョンもあるらしい)。しかし、このような図式を忘れても、単位をチェックすれば正しく計算できる。実際、速さを m/秒、道のりを m、時間を秒で表すならば、例えば速さ 3 m/秒で時間 5 秒だけ走るときの道のりは、単位も埋め込んで正しく計算すれば

$$3 \frac{\text{m}}{\text{秒}} \times 5 \text{ 秒} = 15 \text{ m} \quad (2.13)$$

となり、無事に距離の単位 m が出てくる。ところが、これを割り算にしたりすると、 $\text{m}/\text{秒}^2$  や  $\text{秒}^2/\text{m}$  という、

\*4 それは後述する「無次元量」である。

変な単位が出てくる。そういう変な単位にならないように、すなわち、目標とする単位が最終的に残るように立式すればよいのだ。(例おわり)

「速さ、道のり、時間」のように、互いに積や商の関係にあるような3つの量を処理するという状況は、他にもたくさんある。それらのひとつひとつに「みはじ」みたいなのを考えるのはきりがない。単位を埋め込んで、単位を手がかりに処理すればいいのだ。

よくある質問 26 でも、このやりかた、めんどくさいです。... 私も最初はそうでした。でも、結局はこの方が正確で便利なのです。数値だけの計算だと、ミスしやすいのです。ミスの発見と修正には多くの時間が必要ですからね。それに、学校のテストならミスは減点ですが、仕事でのミスは重大事故や大損害になりかねません。

問 25 以下の問を、単位を式の中に埋め込んで解け。

- (1) 5時間で500リットルの水が出る蛇口から2時間で流れ出る水の量を求めよ。
- (2) 5時間で500リットルの水が出る蛇口から4 m<sup>3</sup>の水を出すのに、どのくらいの時間がかかるか?
- (3) つくば市の水田面積は約4900 ha、コメの収穫は年間21,000 tである(つくば市ホームページ)。つくば市の水田は1年間で、単位面積あたり、どのくらいのコメがとれるか? kg/m<sup>2</sup>という単位で答えよ。
- (4) つくば市で、単位質量のコメの生産に必要な水田の面積を求め、m<sup>2</sup>/kgという単位で答えよ。
- (5) 筑波大学の筑波キャンパスは、約260万m<sup>2</sup>である。これと同じ面積の水田をつくば市で借りたら、年間何トンのコメがとれるか?
- (6) 日本の成人1人は年間約60 kgのコメを消費する。生物資源学類1年生約130人の消費するコメをつくば市の水田だけでまかなうなら、どのくらいの面積の水田が必要か?

## 2.5 無次元量

ところで、同じ次元を持つ量どうしの割り算は、面白い結果になる。例えば、直径 $d$ の円の周長を $S$ とすると、 $d$ も $S$ も次元は「長さ」であり、数値と単位(cmやmなど)の積で表現される。ところが $d$ と $S$ をひとつの単位に揃えた上で $S/d$ という量を計算すると、長さの単位は約分されて消え、3.141592... という数だけが残る(これは円の大きさがどうであれ一定値であり、それが

円周率 $\pi$ である)。この量には単位が無い! このように、単位を伴わずに数だけで表現できる量を無次元量とか無名数という。

物理量を数と単位の積で表すとき、その数は無次元量である。例えば、ある長さ $L$ が、 $L = 15 \text{ cm}$ であるとす。この両辺をcmという量(1 cm)で割ると、

$$L/\text{cm} = 15 \quad (2.14)$$

となる。左辺は、 $L$ もcmも長さという次元の量であり、従って、その割り算は無次元量になる。従って、右辺の15は無次元量である。

式(2.14)は見慣れない、奇妙な印象を受ける式かもしれない。しかしこれは国際的にも認められた、立派な表記法である。特に、科学的な論文の表やグラフの中で、このような表記がしばしば用いられる。

## 2.6 SI 単位系

いろんな単位を無秩序に併用すると混乱する。そこで、それぞれの次元に対応する単位をひとつずつ決めて、統一的に使うと便利だ。そのように定めた単位のセットのことを単位系と呼ぶ。科学の世界では、一般的に、SI 単位系(国際単位系ともいう)と呼ばれる、国際的に合意決定された単位系を優先的に使う。

SI 単位系は、まず、以下の7つの単位が骨格である:

- 長さの単位: m (メートル)
- 質量の単位: kg (キログラム)
- 時間の単位: s (秒)
- 電流の単位: A (アンペア)
- 温度の単位: K (ケルビン)
- 物質質量(個数)の単位: mol (モル)
- 光量の単位: cd (カンデラ)

これらの7つの単位をSI 基本単位と呼ぶ。

問 26 SI 基本単位とは何か?

これら以外の次元を持つ量のほとんどは、これらの基本単位の積や商で表現される(これをSI 組み立て単位と呼ぶ)。例えば、面積はm<sup>2</sup>で表されるし、速さはm s<sup>-1</sup>で表される。

m s<sup>-1</sup>はm/sと表記してもよい。ただし、/を使う記法では、/の右側(つまり分母)に複数の単位が来る場合には注意! 例えば、kg/m<sup>2</sup> s という書き方は、sは分母なのか、分子なのか、はっきりしなもので、ダメ。kg/(m<sup>2</sup> s)とか、 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$ とか、kg m<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>と書くルールだ。kg/m<sup>2</sup>/s

と書く人もいるが、これも紛らわしいのでやめよう。

組み立て単位で、積の順序は任意である。例えば、 $\text{kg m s}^{-2}$  を  $\text{m kg s}^{-2}$  と書いても OK。ということは、 $\text{s}^{-2} \text{kg m}$  と書いても OK なのだが、「マイナス乗」をする単位 (分母に来る単位) は後ろの方に書くのが慣習的なので、そういう書き方は滅多にしない (間違いでは無いが、見た人は多分、驚く)。

さて、以下のような単位は、SI 単位ではないが、慣習的によく使われる:

- min (minute, つまり, 分)。1 min = 60 s。
- h (hour, つまり, 時間)。1 h = 60 min = 3600 s。
- a (アール)。1 a = 100 m<sup>2</sup>。
- L または ℓ (リットル)。1 L = 10<sup>-3</sup> m<sup>3</sup>。
- cc (cubic centimeter)。1 cc = 1 cm<sup>3</sup> = 10<sup>-6</sup> m<sup>3</sup>。
- t (トン)。1 t = 10<sup>3</sup> kg。

リットルは、小文字のエル (l) でも書くが、数字の 1 と紛らわしいので、筆記体 (ℓ) が大文字 (L) で書く。

問 27 以下の単位を、SI 基本単位で表わせ。

- (1) min            (2) h            (3) a  
(4) L            (5) cc           (6) t

巨大な数値や微小な (0 に近い) 数値は、位取りのための 0 がたくさん必要なので、煩雑である。そこで、位取りの記号を使う。例えば 1000 m を 1 km と書いたり、0.01 m を 1 cm と書くのだ。10<sup>3</sup> を k、10<sup>-2</sup> を c で表すのだ。こういうのを、接頭辞 という。SI 単位系は、以下のような接頭辞 (SI 接頭辞) を定めている:

10 <sup>15</sup>	ペタ	P	10 <sup>-15</sup>	フェムト	f
10 <sup>12</sup>	テラ	T	10 <sup>-12</sup>	ピコ	p
10 <sup>9</sup>	ギガ	G	10 <sup>-9</sup>	ナノ	n
10 <sup>6</sup>	メガ	M	10 <sup>-6</sup>	マイクロ	μ
10 <sup>3</sup>	キロ	k	10 <sup>-3</sup>	ミリ	m
10 <sup>2</sup>	ヘクト	h	10 <sup>-2</sup>	センチ	c
			10 <sup>-1</sup>	デシ	d

P と p, M と m が紛らわしいが、「大文字は巨大な数を表す」と覚えればよい。

例 2.10 μm はマイクロメートルと読む (昔はミクロンとも呼ばれていたが、その呼び方は廃止された)。ps はピコ秒と読む。(例おわり)

接頭辞は、単体では単位にはならない。よく「50 kg」

や「時速 50 km」を「50 キロ」と言うが、そういうのはダメである。2 cm を「2 センチ」、5 mm を「5 ミリ」と言うのもダメ。私的・口語的に使うのはまあ許せるが、科学的・公的な記録・連絡・発表などの中では慎もう。

注意: h は「ヘクト」と「時間」(hour) でかぶってるし、m は「ミリ」と「メートル」でかぶっている。しかし、ヘクトやミリのよな接頭辞は、hPa や mg のように必ず何らかの単位を伴って、最初の文字として現れる。このことを意識すれば、これらを混同することはない。

問 28 以下の SI 接頭辞は 10 の何乗を表すか?

- (1) G            (2) M            (3) k            (4) h  
(5) d            (6) c            (7) m            (8) μ

よくある質問 27 質量の SI 基本単位って g (グラム) じゃダメなんですか? kg は g に接頭辞 k がついているので、kg よりも g の方が基本的な気がしますが... ダメです。質量の SI 基本単位は kg です。kg 以外の SI 基本単位 (m や s 等) は接頭辞の無い、単体での単位だから、kg が基本単位、ていうのは違和感ありますよね。でもこれは例外で、接頭辞 k のついた"kg" が基本単位です。だから、mg (ミリグラム) のように、質量の単位に接頭辞がつくときは基本単位 (kg) でない単位 (g) に接頭辞がつく、という異例のスタイルになって気持ち悪いですね。でも決まりですから仕方ありません。

2 乗や 3 乗のある単位の中に接頭辞があるときは要注意である。接頭辞は直後に来る単位とまず結びつく。そして、単位の 2 乗や 3 乗は、その「接頭辞つきの単位」についてかかる。例えば、km<sup>2</sup> は、(km)<sup>2</sup> であり、k(m<sup>2</sup>) ではない!

例 2.11

$$1 \text{ km}^2 = 1 (\text{km})^2 = (10^3 \text{ m})^2 = 10^6 \text{ m}^2 \quad (2.15)$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1 (\text{dm})^3 = (10^{-1} \text{ m})^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 \quad (2.16)$$

$$1 \text{ cm}^2 = 1 (\text{cm})^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2 \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} 0.03 \text{ km}^2 &= 0.03 (\text{km})^2 = 0.03 \times (10^3 \text{ m})^2 \\ &= 0.03 \times 10^6 \text{ m}^2 = 3 \times 10^4 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

(例おわり)

よくある間違い 5 1 km<sup>2</sup>=1000 m<sup>2</sup>, 1 cm<sup>3</sup>=0.01 m<sup>3</sup> 等と誤解... これは、k や c が、m<sup>2</sup> や m<sup>3</sup> にかかるものと勘違いすることによって発生する、大変危険なミスです。

よくある質問 28 なぜですか? 普通、ab<sup>2</sup> と書いたら a×(b<sup>2</sup>) ですよ。なら km<sup>2</sup> は k×(m<sup>2</sup>) の方が合理的じゃないです

か?... そう言われても、どうしようもありません。国際的に合意された社会的慣習で  $\text{km}^2$  は  $(\text{km})^2$  と決まっているのです。

そう言われても、すぐに忘れそうです...  $\text{km}^2$  は「平方キロメートル」と読むでしょ? 「メートル」のすぐ隣にあるのは「キロ」だから、「キロメートル」を「平方」する、という実体を、言葉がきちんと表現しています。英語でも、 $\text{km}^2$  は square kilometer と言います。こちらも「 $\text{km}$  の 2 乗 (square)」ですね。kilo と meter の間にスペースが無いことに注意。kilometer で 1 語です。

なるほど。他にも手がかりはありませんか?... 単位はわかりやすい量を使うのが普通です。1  $\text{km}^2$  は 1 辺が 1  $\text{km}$  の正方形の面積。わかりやすいですね。もしこれが 1000  $\text{m}^2$  だとしたら、1 辺の長さが  $\sqrt{1000\text{m}^2} = 31.62\cdots \text{m}$  の正方形を考えねばなりません。中途半端でわかりにくいでしょ?

1 ha は、100 a である。これはふつうに a にヘクト、つまり 100 をかければよい (変な気をきかせて 100 を 2 乗したりしてはいけない)。1 a = 100  $\text{m}^2$  だから、1 ha = 100 a = 100 × 100  $\text{m}^2$  = 10000  $\text{m}^2$  である。

よくある質問 29 ha はよく聞きますが、ka (キョアール) とか da (デシアール) とかもあるのですか?... 原理的にはあり得ますが、まず使いませんね。1 ka の正方形の 1 辺は、 $\sqrt{1000 \times 100\text{m}^2} = \sqrt{10^5\text{m}^2} = 10^2\sqrt{10}\text{m} = 316.27\cdots \text{m}$  となって、めんどくさい値になります。だから好まれないでしょう。

図 2.1 に面積の単位 ( $\text{m}^2$  から  $\text{km}^2$  まで) を図解した。

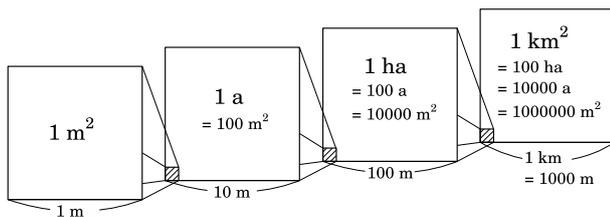


図 2.1 いろいろな大きさの正方形の面積

問 29 以下の量を書き換えよ:

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| (1) 1 m を km で。                       | (2) 1 km を m で。                        |
| (3) 1 cm を m で。                       | (4) 1 $\text{m}^2$ を $\text{km}^2$ で。  |
| (5) 1 $\text{km}^2$ を $\text{m}^2$ で。 | (6) 1 $\text{cm}^2$ を $\text{m}^2$ で。  |
| (7) 1 $\text{m}^3$ を $\text{km}^3$ で。 | (8) 1 $\text{km}^3$ を $\text{m}^3$ で。  |
| (9) 1 $\text{cm}^3$ を $\text{m}^3$ で。 | (10) 1 $\text{dm}^3$ を $\text{m}^3$ で。 |
| (11) 1 dL を $\text{m}^3$ で。           | (12) 1 $\mu\text{m}$ を m で。            |
| (13) 1 $\mu\text{m}$ を nm で。          | (14) 1 mg を kg で。                      |
| (15) 1 $\text{km}^2$ を ha で。          |  |

注: dL は、小学校以外ではほとんど使われない。これは、1 dL の立方体の 1 辺が、 $(0.0001\text{m}^3)^{1/3} = 0.0464\cdots \text{m}$  という中途半端な数値になるからだろう。

問 30 以下の量を書き換えよ (導出過程も書け):

- (1) 0.009  $\text{km}^2$  を  $\text{m}^2$  で。 (2) 0.00003  $\text{km}^3$  を  $\text{m}^3$  で。

問 31 以下の各小問内で、挙げられた 2 つの単位が互いに等しいことを示せ:

- (1) mL と  $\text{cm}^3$ 。 (2) L と  $\text{dm}^3$ 。  
 (3) kL と  $\text{m}^3$ 。 (4) Gt と Pg。

注: もともと L は「質量 1 kg の水の体積」と定義されていたが、水は温度や圧力によって体積を微妙に変えるので、体積の単位としてふさわしくない。現在は、L は  $10^{-3}\text{m}^3$  のことであると再定義され、なおかつ、古い定義 (水 1 kg の体積) と紛らわしいので、L はなるべく使わず、かわりに  $\text{dm}^3$  (立方デシメートル) と言おう、というのが SI 単位系の立場である。

SI 単位系では他にもいろいろな約束が決まっている。特に、以下を覚えておこう:

- 変数や定数を表すアルファベットは斜体表記せよ。  
例:  $x = 5$  は OK,  $x = 5$  はダメ。
- 特定の関数を表すアルファベットは立体表記せよ。  
例:  $\sin x$  は OK,  $\sin x$  はダメ。
- 単位を表すアルファベットは立体表記せよ。  
例: 面積を表す 5  $\text{m}^2$  は OK, 5  $\text{m}^2$  はダメ。
- 数値と単位の間には半角スペースをあけよ。  
例: 5  $\text{m}^2$  は OK, 5 $\text{m}^2$  はダメ。
- 組み立て単位は、単位どうしの間には半角スペースをあけよ。  
例: 速度を表す 2  $\text{m s}^{-1}$  は OK, 2  $\text{ms}^{-1}$  はダメ。
- 接頭辞と単位の間にはスペースをあけるな。  
例: 3 kg は OK, 3 k g はダメ。

最後の 2 つは特に大切。そのおかげで、1 ms (1 ミリ秒) と 1 m s (1 メートル秒) が区別できる。

科学技術文書のほとんどはこういう表記を使っている。日本では JIS 規格になっている\*5。本書も極力、この表記法に従う (一部、コンピュータソフトの仕様上の制限の為にうまくできなかったところもあるが)。

レポートや卒業論文ではこれらに注意しよう。ただし、手書きでは無理に守らなくてもよい。立体と斜字体

\*5 しかし、なぜか日本の小中学校の検定教科書では、単位が斜体で書かれている。高校の教科書では立体になっているのだが...

の書き分けや、「半角スペース」は手書きでは無理だし。そこで、手書きの時は、単位を括弧 [ ] の中に入れて書いたりする。例えば、5.3 m/s を、5.3 [m/s] と書くのだ。

## 2.7 単位の換算

例 2.12 7.5 km h<sup>-1</sup> という量を、m s<sup>-1</sup> という単位に換算してみよう。

$$\begin{aligned} 7.5 \text{ km h}^{-1} &= 7.5 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 7.5 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \\ &= 7.5 \times \frac{1000}{3600} \text{ m s}^{-1} = 2.08 \dots \text{ m s}^{-1} \\ &\doteq 2.1 \text{ m s}^{-1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

最後に 2.08 の 8 を四捨五入した。有効数字を考えたからである。7.5 の有効数字が 2 桁であると判断されたので、結果も有効数字 2 桁にした。

例 2.13 2.0 g/s という量を、kg/h という単位で換算してみよう。

$$\begin{aligned} 2.0 \text{ g/s} &= 2.0 \frac{\text{g}}{\text{s}} = 2.0 \frac{10^{-3} \text{ kg}}{(1/3600) \text{ h}} = 2.0 \times \frac{3600}{1000} \text{ kg/h} \\ &= 2.0 \times 3.6 \text{ kg/h} = 7.2 \text{ kg/h} \end{aligned} \quad (2.20)$$

(例おわり)

これらの例でわかるように、単位の換算は機械的にできる。組み立て単位を構成する各単位 (h, s, km, m, kg, g など) を、それぞれ別の単位に換算し、そこで出てきた係数を計算すればよいのだ。

上の例のやり方がよくわからない人には、かわりに、次の方法を勧める。例 2.12 は、

$$7.5 \text{ km h}^{-1} = 7.5 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (2.21)$$

$$= 7.5 \frac{\text{km}}{\text{h}} \frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} \frac{\text{h}}{3600 \text{ s}} \quad (2.22)$$

$$= 7.5 \frac{1000}{3600} \frac{\text{km}}{\text{h}} \frac{\text{m}}{\text{km}} \frac{\text{h}}{\text{s}} \quad (2.23)$$

$$= \frac{75}{36} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2.08 \dots \text{ m s}^{-1} \quad (2.24)$$

$$\doteq 2.1 \text{ m s}^{-1} \quad (2.25)$$

ここで、式 (2.21) から式 (2.22) に行く時に、

$$\frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} \quad \text{と} \quad \frac{\text{h}}{3600 \text{ s}} \quad (2.26)$$

をかけているが、これらは両方とも 1 だ。なぜなら、1000 m=1 km であり、両辺を km で割ると、

(1000 m)/km=1 となる。同様にして h/(3600 s)=1 も言える。これらの 1 は単位を持たぬ量 (無次元量) だ。1 を掛けても、掛けられた量は何も変化しない。そこで、式 (2.26) のような、「1 と等しい量」を自由にどんどん掛けて、消し去りたい単位を約分していくのだ。

よくある間違い 6 7.2 km/h = 25920000 m/s という、とんでもない間違いをする... これは、3600 で割らねばならぬところを、3600 を掛けてしまったミスです。この手のミスは、計算過程で単位を埋め込まずに、数値だけで処理すると発生しがちです。でも、そもそも、7.2 km/h は徒歩 (小走り) や自転車くらいの速さなので、秒速 2500 万メートルなんかになるわけがありません。こういうミスをする人は、物理量を実際の現象と結びつけて感覚的に把握する習慣をつけましょう。

問 32 上で述べた、1 を掛けていく方法で、例 2.13 の単位換算をやり直せ。

問 33 以下の量を書き換えよ。上で示した 2 つの方法のどちらを使っても構わない。ただし、導出過程も書くこと。電卓を使っても OK。

- (1) 340 m/s を km/h で。(音速)
- (2) 3.00 × 10<sup>8</sup> m/s を km/h で。(光速)
- (3) 1.0 g/cm<sup>3</sup> を kg/L で。(水の密度)
- (4) 1.0 g/cm<sup>3</sup> を t/m<sup>3</sup> で。(水の密度)
- (5) 1.3 g/L を kg/m<sup>3</sup> で。(空気の密度)
- (6) 0.05 kg/h を g/s で。

上のような問題では、結果を科学の法則や現象に整合しているかチェックしよう。例えば (1) は音速だが、音速といえば飛行機だ。音速を超えると急に抵抗が大きくなって燃料をたくさん喰うので、多くの旅客機は音速より少し遅く飛ぶ。従って、(1) は、旅客機が 1 時間で飛べる距離とだいたい同じはず。飛行機に乗ったことのある人は、旅客機は 1 時間で東京から九州とか北海道の手前くらいまで飛ぶと知っているだろう。

問 34 以下の量とおおよそ桁が合うような、具体的な現象や事物 (数値を使わずに表現できるもの) を述べよ。例: 1 ha ... 日本の平均的な農家 1 戸の耕作面積, 1 L ... コンビニで売ってる中くらいの大きさのお茶の PET ボトル。

- |          |                      |                            |
|----------|----------------------|----------------------------|
| (1) 1 mL | (2) 1 m <sup>3</sup> | (3) 1 mg                   |
| (4) 1 g  | (5) 1 kg             | (6) 1 t                    |
| (7) 1 μm | (8) 10000 km         | (9) 100000 km <sup>2</sup> |

ところで、物質の量は、多くの場合は質量で表すが（「質量保存の法則」があるから!）、体積で表すこともある。例えば  $3 \text{ m}^3$  の水を「 $3 \text{ t}$  の水」と言ったりもする。すなわち、

$$3 \text{ m}^3 \text{ の水} = 3 \text{ t の水} \quad (2.27)$$

と言ってよい。だからといって、

$$\text{m}^3 = \text{t} \quad (\text{これは間違い!!}) \quad (2.28)$$

と言ってはダメ。そもそも  $\text{m}^3$  は体積、 $\text{t}$  は質量なのだから、これらが同じなわけがない。もし式 (2.28) が正しければ、 $1 \text{ m}^3$  の空気の質量も  $1 \text{ t}$  になってしまう。式 (2.27) が成り立つのは、水の密度がほぼ一定だからだ。密度が一定であれば、質量と体積は比例するから、どちらを使っても実用上は構わない。しかし、そこには「密度」という重要な量が背後にあることを忘れてはダメ。

問 35 コメの量も、重さ（質量）で表したり、体積で表したりする。コメのバルク密度を調べよ。（バルク密度とは、たくさんの米粒を容器に入れた時のように隙間も含んだ状態での密度）それを元に、 $10 \text{ kg}$  のコメの体積を求めよ。

よくある質問 30 式 (2.27) で両辺の「の水」を約分すれば  $3 \text{ m}^3 = 3 \text{ t}$  になるから、式 (2.28) も正しいのでは? ... ダメ。約分は「何か×何か」の形の量について片方の「何か」を割って消すこと。「 $3 \text{ m}^3$  の水」は、「 $3 \times 1 \text{ m}^3$  の水」です。 $1 \text{ m}^3$  の水が3個分、という意味。でも君の考えでは、「 $3 \text{ m}^3 \times \text{水}$ 」と解釈して「水」だけを約分しています。これは無茶。「水」とだけ言われたら、コップ1杯の水を思い浮かべられる人も、太平洋の全ての海水を思い浮かべられる人もいます。それを規定しないで約分するのはダメですよ。

## 2.8 力の単位

理系はどんな分野でも、力やエネルギーの概念（中学理科の1分野）が基礎だ。さらにその基礎は、

—— 運動の法則（ニュートンの運動方程式） ——

質量  $m$  の物体が力  $F$  を受けたとき、物体の速度は変化する。その変化率、つまり加速度（速度の変化を時間で割ったもの）を  $a$  とすると、

$$F = ma \quad (2.29)$$

である。これは中学理科や高校の物理基礎で学んだ! こ

れを知らない人は物理が嫌いだとか苦手だとか文系だったとか言う以前に、大学生としてヤバイ。細胞やイオンを知らないというくらいのヤバさである。

ちなみに式 (2.29) で、 $F$  は force (力)、 $m$  は mass (質量)、 $a$  は acceleration (加速度) のそれぞれ頭文字から取られている。このように、科学の数式で出てくる記号は、その量の頭文字から取られることが多い。

この式は、本書の他の多くの数式とは根本的に性格が異なる。本書の多くの数式は「定義」や「公理」か、それらをもとに導出される「定理」か、それらを用いた計算式だ。ところが、この式はそのいずれでもない。数式の格好をしているが、自然の摂理を表す「基本原理」(基本法則ともいう)である。そしてこの式の根拠は、公理でも論理でもなく、実験事実である。

よくある間違い 7 「運動方程式を書け」という問に対して「 $F = ma$ 」とだけ答える...  $F, m, a$  のそれぞれが何を意味するかも、書き添えなければなりません。

よくある質問 31  $F$  と  $a$  の活字の形がなんか他と違うっぽいんですが... .. よく気づきましたね。これは P.10 あたりで学んだ「ベクトル」です。力には大きさだけでなく向きもあるから、ベクトルです。加速度もそうです。だから、ベクトルの書き方（太字）で書いているのです。

さて、SI 単位系では力の単位は  $\text{N}$ （ニュートン<sup>\*6</sup>）である。式 (2.29) において、 $F$  をその単位である  $\text{N}$  に置き換え、 $m$  をその単位である  $\text{kg}$  で置き換え、 $a$  をその単位である  $\text{m s}^{-2}$  で置き換えると、

$$\text{N} = \text{kg m s}^{-2} \quad (2.30)$$

となる。これが  $\text{N}$  という単位の定義である。この式を忘れても、 $F = ma$  を覚えていれば、上記のように考えればすぐに思い出せるだろう。

よくある質問 32 加速度の単位が  $\text{m s}^{-2}$  になる、というのがわかりません。... 加速度は、ざっくりいうと、速度の変化を時間で割ったものです（正確な定義は後の章で説明します）。速度の単位は  $\text{m s}^{-1}$  ですから、速度の変化（つまり、ある時刻の速度ひく別の時刻の速度）の単位も  $\text{m s}^{-1}$  です。それを時間（単位は  $\text{s}$ ）で割るのだから、最終的に単位は  $\text{m s}^{-2}$  になります。

ところで、君は「重さ」と「質量」の違いを理解してい

\*6 いわずと知れたイギリスの物理学者の名前。運動の法則と万有引力の法則を発見した、科学界のスーパースター。

るだろうか? 重さはその物体に働く重力のこと。重力は力的一种だ。だから重さは力の単位 (SI 単位系では N) で表すのが、科学的には正しい。重さは場所によって変わる。同じ物体でも、月面上での重さは地上での重さの約 1/6 になるし、国際宇宙ステーションの中 (いわゆる無重力空間) では重さは 0 N だ。

一方、質量は、力とは別の量だ。地球上だろうが月面上だろうが無重力空間中だろうが、同じ物体の質量は不変である。地球上で 1 kg の物体は、月や国際宇宙ステーションに持って行っても 1 kg なのだ。

えっ!? どういうこと!? と思う人は、ホントにヤバイ。ここから先を慎重に読んでしっかり考え、必ず理解しよう。まず質量とは何だろう? それは式 (2.29) が教えてくれる。式 (2.29) によると、一定の力  $F$  を物体にかけたとき、質量  $m$  が大きいほど加速度  $a$  は小さいし、 $m$  が小さいほど  $a$  は大きいことがわかる。つまり質量  $m$  は物体の「速度の変えにくさ」(加速度は速度が単位時間あたりにどれだけ変化するか、という量であることに注意!)、つまり「動かしにくさ」を表す。それは無重力空間でも変わらない。国際宇宙ステーションの中に 1 kg の物体と 10 kg の物体の 2 つをぷかぷかと浮かせて、それらを同じ力で同じ時間だけ押すと、1 kg の物体の方がずっと速く飛んでいくだろう。

では重さとは何か? それは、式 (2.29) とは別の重要な物理法則が教えてくれる。それは、「どんな物体どうしにも、互いに引き合う力が生じ、その大きさは、2 つの物体の質量の積に比例し、距離の 2 乗に反比例する」という法則だ。そのような力のことを重力と言うのだ。地表で物体が地球から受ける重力は、その物体の質量と地球の質量の積に比例し、地球半径の 2 乗に反比例する。地球質量と地球半径はほぼ一定なので、「地表限定」の条件下では、重力 (つまり重さ) は、物体の質量だけで決まる。1 kg の物体の重さ (重力) は地表上のどこでも約 9.8 N でほとんど変わらないので、「1 kg の物体の地上での重さ」を力の単位としてもよいだろう。そう定義された力の単位のことを、kgf という (kg 重ともいう)。正確な定義では、

$$1 \text{ kgf} := 9.80665 \text{ N} \quad (2.31)$$

である。実際、土木や建築等の工学では力を kgf で表すことが多い。しかし、kgf は SI 単位系の単位ではないので、科学では kgf を使うことは避ける方がよい。

ところで、世の中では往々にして kgf の  $f$  が略されて「kg」と言われてしまう。一方、日常生活では、質量と重さは頻りに混同され、「A 君の体重は 60 kg」というよ

うな表現が多い。でも体重とは「体の重さ」なので、正しくは「A 君の体重は 60 kgf」もしくは「A 君の質量は 60 kg」とすべきである。

日常生活では体重と質量を混同したり、kgf を kg と誤記しても困らないので、そんなにこだわる必要は無い。しかし科学の世界では、明確に区別せねばならない。

よくある質問 33 中学校で、「100 g = 1 N」と習ったのですが... ..それは間違い。100 g は質量、1 N は力なので、両者は互いに次元が異なるから、等号で結ぶことはできません。ただ、「質量 100 g の物体にかかる重力は約 1 N である (正確には 0.98 N)」というのは正しいし、私がチェックした中学校の教科書にはそのように載っていました。「100 g = 1 N」のような乱暴な間違いが載っているのは、塾のプリントや参考書のようなものです。

そのどこがダメなのか、いまいわかりません... ..例えて説明しましょう。1 L の水の質量は (ほぼ) 1 kg です。だからといって、1 L = 1 kg と言ってはダメでしょう。左辺は体積、右辺は質量なのだから。それと同じこと。

問 36 60 kgf は何 N か? 有効数字 2 桁で。

## 2.9 エネルギーと圧力の単位

次に、仕事とエネルギーの定義を確認しよう。これらも中学校理科であり、「大学生なら知らなきゃヤバイ」ことである:

### 仕事とエネルギーの定義

物体に力をかけて移動させるとき、力と、その力の方向に動いた距離との積を、「仕事」という。仕事と等価な量 (仕事に形を変えることができる量) のことを「エネルギー」という。

ざっくり言えば、「仕事 = 力 × 距離」である。SI 単位系では、仕事の単位は J (ジュール<sup>\*7</sup>) だ。「仕事 = 力 × 距離」で、「仕事」をその単位である J で置き換え、「力」をその単位である N で置き換え、「距離」をその単位である m で置き換えれば、

$$J = \text{N} \cdot \text{m} \quad (2.32)$$

となる (定義)。式 (2.32) を忘れても、「仕事 = 力 × 距離」を覚えていれば、思い出せるだろう。

<sup>\*7</sup> イギリスの物理学者の名前。電気回路で出る熱に関する「ジュールの法則」を発見した人。

エネルギーは仕事と等価な量なので、エネルギーの SI 単位は仕事と同じ J である。

また、中学校理科で学んだように、面に一様に力がかかるとき、その力を面積で割ったものを圧力という。ざっくり言えば、「圧力=力/面積」だ。SI 単位系では、圧力の単位は Pa (パスカル<sup>\*8</sup>) である。「圧力=力/面積」で、「圧力」をその単位である Pa で置き換え、「力」をその単位である N で置き換え、「面積」をその単位である m<sup>2</sup> で置き換えれば、次式になる：

$$Pa = N/m^2 = N m^{-2} \quad (2.33)$$

これが Pa の定義である。式 (2.33) を忘れても、「圧力=力/面積」を覚えていれば、思い出せるだろう。

また、中学校理科で学んだように、ある時間内になされた仕事や、出入りした熱や、エネルギーの増減量を、その時間で割ったものを、仕事率又は熱効率という。ざっくり言えば、「仕事率=仕事/時間」である。SI 単位系では、仕事率の単位は W (ワット<sup>\*9</sup>) である。「仕事率=仕事/時間」において、「仕事率」をその単位である W で置き換え、「仕事」をその単位である J で置き換え、「時間」をその単位である s で置き換えれば、

$$W = J/s = J s^{-1} \quad (2.34)$$

となる。これが W の定義である。式 (2.34) を忘れても、「仕事率=仕事/時間」を覚えていれば、思い出せるだろう。

よくある間違い 8 W と J を混同する ... J と W は明確に異なる単位です。W=J/s, J=W s です。

ところで、電気的なエネルギーや電気がする仕事を「電力量」という。また、電気がする仕事の仕事率を「電力」という。

よくある間違い 9 W は電気専用の単位だと思っている ... W は仕事率の単位なので、電力以外の仕事率にも使われます。おそらくこういう誤解をする人は、中学校で習った W=A×V (A はアンペア, V はボルト) に引きずられているのでしょう。それは間違いではないけど、W の定義ではありません。

\*8 フランスの哲学者かつ物理学者の名前。「人間は考える葦である」との言葉を残した人。

\*9 イギリスの発明家の名前。蒸気機関を開発して、産業革命に貢献した人。

問 37

- (1) ニュートンの運動方程式を書け。
- (2) 仕事の定義を書け。
- (3) エネルギーの定義を書け。
- (4) 圧力の定義を書け。
- (5) 仕事率の定義を書け。

問 38 以下の問に答えよ。導出過程も書くこと。

- (1) 質量 2 kg の物体を加速度 3 m s<sup>-2</sup> で加速するのに必要な力は何?
- (2) ある物体を 2 N の力で 4 m だけ移動させるのに必要なエネルギーは何?
- (3) 2 m<sup>2</sup> の平面に 10 N の力がかかっている状態の圧力は何?
- (4) 100 W の電球が、2 秒間に消費する電力量は何?

問 39 以下を示せ：

- |                             |                            |
|-----------------------------|----------------------------|
| (1) N = J / m               | (2) Pa = J m <sup>-3</sup> |
| (3) J = Pa m <sup>3</sup>   | (4) J/Pa = m <sup>3</sup>  |
| (5) W = N m s <sup>-1</sup> | (6) J = W s                |

問 40 J, Pa, W を、それぞれ SI 基本単位 (kg, m, s) の組み合わせで表わせ。

問 41 以下の量を書き換えよ：

- (1) 1 kWh を J で。
- (2) 1 hPa を Pa で。

ところで、圧力の単位に atm (気圧) というのがある。定義は 1 atm := 1013.25 hPa である (hPa の h を忘れる人が多い)。atm は atmosphere の略である。1 atm のことを 1 気圧ともいう。

問 42 以下の問に答えよ。電卓を使ってもよい。

- (1) 1 atm を Pa で表わせ。
- (2) 1 atm を kPa で表わせ。
- (3) 1 Pa を atm で表わせ。
- (4) ある巨大な台風 (実際にあった!) の中心付近での地気圧は 895 hPa だった。この圧力を atm で表わせ。

高校の化学や物理で学んだように、理想気体の圧力  $P$ 、体積  $V$ 、モル数  $n$ 、絶対温度  $T$ 、気体定数  $R$  の間には、 $PV = nRT$  という関係が成り立つ (理想気体の状態方程式)。また、 $R = 8.3145 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$  である。

問 43 1.0000 mol の理想気体が、温度 273.15 K、

1013.25 hPa にあるときの体積を計算し, L で表せ。電卓使用可。

問 44 気体定数  $R = 8.3145 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  の値を,  $\text{atm L mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  という単位で書き換えよ。電卓使用可。途中経過も書け。ヒント:  $\text{J} = \text{Pa m}^3$ 。

ところでエネルギーの単位にカロリー (cal) というのもある。定義は,  $1 \text{ cal} := 4.184 \text{ J}$  である (記憶せよ)。もともと, 1 cal は「質量 1 g の水の温度を  $1^\circ\text{C}$  上げるのに必要な熱量」と定義されていたのだが, それは条件次第で微妙に異なるので, 今は上のように J との関係で定義されている。

問 45 常温・液体の水の比熱を,  $\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  という単位で表わせ。

問 46 以下の問に答えよ:

- (1) 成人ひとりが 1 日に食物から摂取するエネルギーは約 2500 kcal である。この量を J で書き換えよ。
- (2) 上記のエネルギーを全部熱にすると, 体積  $0.5 \text{ m}^3$  の水 (風呂桶 1 杯くらい!) の温度を何 K だけ上げることができるか?
- (3) 上記のエネルギーを全部仕事にすると, 質量 10 kg の物体を地上からどのくらいの高さまで持ち上げることができるか?

## 2.10 dimension check

ここで, ひとつ, 便利な道具を紹介しよう。

例 2.14 高校の物理基礎で学んだように, 質量  $m$  の物体が速さ  $v$  で移動しているとき, その物体の持つ運動エネルギー  $K$  を次式で定義する:

$$K := \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.35)$$

この両辺の単位を SI 単位で考えよう。まず  $1/2$  は無次元量なので単位なし。  $m$  の単位は kg,  $v^2$  の単位は  $(\text{m s}^{-1})^2 = \text{m}^2 \text{ s}^{-2}$ 。従って, 右辺の単位は  $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ 。これは J である (問 40 参照)。一方, 左辺の  $K$  は「エネルギー」と呼ばれる以上, SI 単位では J で表現できるはずである。従って, この両辺は, 同じ単位で揃えることができる (次元が同じ!)。 (例おわり)

このように, ある式について, 両辺が同じ単位を持てるかを調べる (すなわち両辺で次元が一致している

か調べる) を, dimension check という。等式の両辺は, 互いに同じ物理量を表すのだから, 同じ単位で表すことができる (次元が一致している) はず。ところが, 何かミスをする (例えば式 (2.35) の  $v^2$  の 2 乗を忘れて), 左辺と右辺で単位は一致しなくなることが多いので, これは, その式が正しくできているかどうかの検算に使える。

実は, これに似た考え方を, 既に例 2.8 や例 2.9 で紹介した。つまり, 単位を式に埋め込んで計算すれば, 結果的に dimension check にもなるのだ。

問 47 高校の物理基礎で学んだように, 地表付近で, 質量  $m$  の物体が高さ  $h$  にあるとき, その物体の持つ位置エネルギー  $U$  は次式で表される<sup>\*10</sup>。

$$U = mgh \quad (2.36)$$

$g$  は重力加速度と呼ばれる定数で,  $g \doteq 9.8 \text{ m s}^{-2}$  である。この式を dimension check せよ。

問 48 半径  $r$  の球の表面積  $S$  と体積  $V$  はそれぞれ

$$S = 4\pi r^2 \quad (2.37)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (2.38)$$

である。ところが, 君の友人 A 君は, この公式を逆に覚えている ( $V = 4\pi r^2$ ,  $S = 4\pi r^3/3$  と覚えている)。dimension check を使って, A 君に間違いを教えてあげるには, どう言えばよいか? <sup>\*11</sup>

## 2.11 例外!

ここで, 少しやっかいな話。「物理量は数値と単位の積」と述べたが, そうではない場合が存在するのだ。

もし物理量が「数値と単位の積」なら, その「数値」が 0 のときにはその物理量は 0 である。例えば, 0 m は長さが 0 (無い) ということである。

すると, 「数値が 0 でも物理量が 0 にならない場合」は, 「数値と単位の積」ではない, ということになる (これは上で述べたことの対偶である。対偶がわからない人は, 索引で調べよ)。そして, 実際にそのような場合があ

<sup>\*10</sup> これは位置エネルギーの定義ではない。位置エネルギーは, これとは別の式で定義され, そこからこの式が演繹される。また, 大学では位置エネルギーを「ポテンシャルエネルギー」と呼ぶ。

<sup>\*11</sup>  $S$  は surface の頭文字,  $V$  は volume の頭文字, そして  $r$  は radius の頭文字に由来する。このように, 量を表す記号 (アルファベット) は, その英単語に由来することが多い。それも公式を覚えたり思い出したりするときの手がかりになる。

るのだ!

例 2.15 温度はそもそも、分子の平均運動エネルギーに比例するような物理量であり、その単位として K (ケルビン) が使われる。当然、分子の平均運動エネルギーが 0 のときの温度は 0 K である。ところが、温度を摂氏で表すと、0 °C のときは 273 K であり、0 K ではない。

例 2.16 pH は、水溶液の中の水素イオンの濃度  $[H^+]$  の指標であり、次式で定義される:

$$pH := -\log_{10} \frac{[H^+]}{\text{mol L}^{-1}} \quad (2.39)$$

問 49 次式を示せ:

$$[H^+] = 10^{-pH} \text{ mol L}^{-1} \quad (2.40)$$

問 50 pH が 0 の水溶液(そんなものが現実としてあるかどうかはここでは考えない)の水素イオン濃度は?

問 51

- (1) 水素イオン濃度が  $0.005 \text{ mol L}^{-1}$  のとき pH は?
- (2) pH=5.6 のとき、水素イオン濃度は中性 (pH=7) のときの何倍か?
- (3) pH=5.0 の塩酸と、pH=3.0 の塩酸を、等量、混ぜ合わせたら、pH はどのくらいになるか? ただし塩酸はすべて解離するものとする。

ここで示した 2 つの例は、「数値と単位の積」ではない。つまり、°C や pH という単位は、普通じゃない、変な単位である。こういう単位は、単位同士の掛け算、割り算、約分はできないし、それを利用した単位換算法も使えないし、式 (2.14) のような表現もできないし、dimension check も使えない。なので、こういう単位の中から計算や変換は、ケースバイケースで慎重に対応しなければならない。

よくある質問 34 「ケースバイケースで慎重に対応」って、具体的にはどういうことですか?... いちばん簡単なのは、単位換算や他の量と一緒に計算する時にはそういう量を「数値と単位の積」に書き換えてしまうことです。°C は K に、pH は  $\text{mol L}^{-1}$  に書き換えてしまうのです。

## 演習問題

演習問題 4 0 °C は 273 K である。つまり、

$$0 \text{ } ^\circ\text{C} = 273 \text{ K} \quad (2.41)$$

である。ところが、この両辺を 2 倍すると、

$$0 \text{ } ^\circ\text{C} = 546 \text{ K} \quad (2.42)$$

になってしまう。この 2 つの式に式 (1.4) を使うと、

$$273 \text{ K} = 546 \text{ K} \quad (2.43)$$

となってしまう。どこでどのように間違ったのか?

演習問題 5 生物資源学類で農業を学ぶとき、古い単位が出てくることがよくある。以下のそれぞれの単位について、その由来と、相互の関係、そして SI 基本単位でのくらかいを調べよ:

長さの単位: 寸, 尺, 丈, 間, 町, 里

面積の単位: 畳, 坪, 畝, 反, 町

体積の単位: 合, 升, 斗, 石

質量の単位: 貫

演習問題 6 伝統的に、生物資源学類生の多くには、教員がテキスト・プリント・口頭で繰り返し注意しても、必要な単位を付け忘れるという性質がある。「単位の付け忘れ」に関する君の体験を述べ、このミスを解消できる、人道的で手間と費用の少ない教育法を提案せよ。ちなみに「テストで減点」とか「呼び出して説教」というのはあまり効果が無いことがわかっている。

よくある質問 35 教育とは手間のかかるものだと思います... それは一般論として正しい。しかし、「単位を付け忘れる」という悪癖は、本来は小中学校で矯正されるべきことだし、たとえそれに失敗したとしても、高校での勉強の中で「単位つけないのはまずくね?」と気づくべきことです。大学がわざわざ「手間をかけて教育」するようなことではありません。

よくある質問 36 大学で高校数学の復習なんて、ゆるくないですか? ... ゆるくないです。高校数学は、大学入試の問題演習が中心ですので、「問題は解けるけど、基礎を理解していない」という人が、驚くほど多いのです。そんな状態のままで大学数学を詰め込まれ、消化不良を起こして脱落する大学生がたくさんいます。高校数学の復習は、全ての大学生に必要なのです。

よくある質問 37 テストとかで後から見ると信じられないようなミスをしちます。ミスが減らす方法ってありますか? ... 人間だからミスはなかなか無くせないですよ。むしろミスしてミスから学ぶのです。ただし、ミスを指摘されているのに気付かず同じミスを繰り返したり、最初からテキストで注意喚起されているところをミスするのはダメです。

## 問の解答

答 24 「お互いに単位を揃えることができるかどうか」という観点で共通する性質。

答 25

- (1)  $\frac{500 \text{ リットル}}{5 \text{ 時間}} \times 2 \text{ 時間} = 200 \text{ リットル}$
- (2)  $\frac{5 \text{ 時間}}{500 \text{ リットル}} \times 4 \text{ m}^3$   
 $= \frac{5 \text{ 時間}}{500 \text{ リットル}} \times 4 \times 10^3 \text{ リットル} = 40 \text{ 時間}$
- (3)  $\frac{21000 \text{ t}}{4900 \text{ ha}} = \frac{21000 \times 10^3 \text{ kg}}{4900 \times 10^4 \text{ m}^2} = \frac{2.1 \times 10^7 \text{ kg}}{4.9 \times 10^7 \text{ m}^2}$   
 $\doteq 0.43 \text{ kg/m}^2$
- (4) (3) の逆数。  $1/(0.43 \text{ kg/m}^2) \doteq 2.3 \text{ m}^2 \text{kg}^{-1}$
- (5)  $0.43 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \times 260 \times 10^4 \text{ m}^2 \doteq 110 \times 10^4 \text{ kg} = 1100 \text{ t}$
- (6)  $60 \frac{\text{kg}}{\text{人}} \times 130 \text{ 人} \times 2.3 \frac{\text{m}^2}{\text{kg}} \doteq 18000 \text{ m}^2 = 1.8 \text{ ha}$

答 26 略 (本文に書いてある)。

答 27 (略解) いずれも, kg, m, s の 3 つの単位のどれかで表すことができる。(1) 60 s。(2) 3600 s。(3) 100 m<sup>2</sup>。  
 以下, 略。

答 28 略 (本文に書いてある)。

答 29 (略解)

- (1) 1 m=10<sup>-3</sup> km。1 m=0.001 km と書いても OK。
- (4) 1 m<sup>2</sup>=1 × (10<sup>-3</sup> km)<sup>2</sup>=10<sup>-6</sup> km<sup>2</sup>。
- (8) 1 km<sup>3</sup>=1 × (10<sup>3</sup> m)<sup>3</sup>=10<sup>9</sup> m<sup>3</sup>。
- (11) 1 dL=10<sup>-1</sup> L=10<sup>-1</sup> × 10<sup>-3</sup> m<sup>3</sup>=10<sup>-4</sup> m<sup>3</sup>。他略。

答 30 (略解) (1) 9 × 10<sup>3</sup> m<sup>2</sup>。(2) 3 × 10<sup>4</sup> m<sup>3</sup>。

答 31 (略解)

- (1) mL=10<sup>-3</sup> L = 10<sup>-3</sup> × 10<sup>-3</sup> m<sup>3</sup>=10<sup>-6</sup> m<sup>3</sup>。  
 cm<sup>3</sup>=(10<sup>-2</sup> m)<sup>3</sup>=10<sup>-6</sup> m<sup>3</sup>。よって, mL = cm<sup>3</sup>。
- (2), (3) は略。(4) Gt=10<sup>9</sup> × 10<sup>3</sup> kg=10<sup>12</sup> kg。  
 Pg=10<sup>15</sup> g=10<sup>12</sup> kg。よって, Gt=Pg。

答 32

$$2.0 \text{ g/s} = 2.0 \frac{\text{g}}{\text{s}} = 2.0 \frac{\text{g}}{\text{s}} \frac{\text{kg}}{1000 \text{ g}} \frac{3600 \text{ s}}{\text{h}}$$

$$= 2.0 \frac{\text{g}}{\text{s}} \frac{\text{kg}}{1000 \text{ g}} \frac{3600 \text{ s}}{\text{h}} = \frac{2.0 \times 3600 \text{ kg}}{1000} \frac{\text{g}}{\text{h}} = 7.2 \text{ kg/h}$$

答 33 (略解)

(1) 1220 km/h。(有効数字 3 桁とみなした。4 桁で 1224 km/h でも OK)。

(2) 1.08 × 10<sup>9</sup> km/h。(3) 1.0 kg/L。(4) 1.0 t/m<sup>3</sup>。(5) 1.3 kg/m<sup>3</sup>。(6) 1.4 × 10<sup>-2</sup> g/s。

答 34 与えられた量に対して 0.5 倍から数倍の違いがある事物で OK (ざっくり!)。以下は例。レポートではここに挙げた例を答えてはならない。

- (1) 1 mL ... インフルエンザワクチンの容量 (0.5 mL)。  
 (2) 1 m<sup>3</sup> ... 銭湯の小さな浴槽の容量。  
 (3) 1 mg ... キロシュウジョウバエ 1 匹の質量。  
 (4) 1 g ... 1 円玉 1 個の質量。  
 (5) 1 kg ... サッカーボールの質量 (0.5 kg)。  
 (6) 1 t ... 軽自動車 1 台の質量。  
 (7) 1 μm ... 大腸菌 1 匹の大きさ。  
 (8) 10000 km ... 地球の直径 (13000 km)。  
 (9) 100000 km<sup>2</sup> ... 北海道の面積 (83500 km<sup>2</sup>)。

答 35 略。

答 36 60 × 9.8 N ≐ 590 N

答 37 略 (本文に書いてある)。

答 38

- (1) 2 kg × 3 m s<sup>-2</sup> = 6 kg m s<sup>-2</sup> = 6 N  
 (2) 2 N × 4 m = 8 N m = 8 J  
 (3) (略解) 5 Pa  
 (4) (略解) 200 J

答 39 (略解)

(1) J = N m の両辺を m で割る。(2) Pa=N/m<sup>2</sup> の右辺に, 前小問で示した N=J/m を代入。(3) 以下は略。

答 40 式 (2.32) の右辺の N に式 (2.30) を代入すると,

$$J = \text{kg m s}^{-2} \quad \text{m} = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-2} \quad (2.44)$$

式 (2.33) の右辺の N に式 (2.30) を代入すると,

$$\text{Pa} = \text{kg m s}^{-2} / \text{m}^2 = \text{kg m}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (2.45)$$

式 (2.34) の右辺の J に式 (2.44) を代入すると,

$$W = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-2} / \text{s} = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-3} \quad (2.46)$$

答 41 (1) 1 kW h = (10<sup>3</sup> W) × (3600 s) = 3.6 × 10<sup>6</sup> W s = 3.6 × 10<sup>6</sup> J。(2) 1 hPa = 10<sup>2</sup> Pa = 100 Pa。

答 42

(1) 1 atm := 1013.25 hPa = 1.01325 × 10<sup>3</sup> × 10<sup>2</sup> Pa = 1.01325 × 10<sup>5</sup> Pa。

- (2)  $1 \text{ atm} = 101.325 \times 10^3 \text{ Pa} = 101.325 \text{ kPa}$   
 (3) (1) より,  $1 \text{ Pa} = 1/(1.01325 \times 10^5) \text{ atm} = 9.86923 \times 10^{-6} \text{ atm}$ .  
 (4)  $895 \text{ hPa} = 895 \times 10^2 \times 9.86923 \times 10^{-6} \text{ atm} = 0.883 \text{ atm}$ .

答 43

$$\begin{aligned} V &= \frac{nRT}{P} \\ &= \frac{1.0000 \text{ mol} \times 8.3145 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \times 273.15 \text{ K}}{1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}} \\ &= \frac{8.3145 \times 273.15 \text{ J}}{1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}} = 2.2414 \times 10^{-2} \text{ J/Pa} \\ &\doteq 2.2414 \times 10^{-2} \text{ m}^3 = 2.2414 \times 10^{-2} \times 10^3 \text{ L} \\ &= 22.414 \text{ L} \end{aligned}$$

なお, J/Pa を  $\text{m}^3$  に置き換えたところがわからない人は, 問 39(4) を参照せよ。

答 44 問 39(3) より,  $\text{J} = \text{Pa m}^3$ . また,  $\text{m}^3 = 10^3 \text{ L}$ .  
 従って,  $\text{J} = 10^3 \text{ Pa L}$ . また, 問 42 より,  
 $\text{Pa} = 9.86923 \times 10^{-6} \text{ atm}$ . 従って,  
 $\text{J} = 10^3 \times 9.86923 \times 10^{-6} \text{ atm L} = 9.86923 \times 10^{-3} \text{ atm L}$ .  
 従って,  $R = 8.3145 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$   
 $= 8.3145 \times 9.86923 \times 10^{-3} \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1}$   
 $= 0.082058 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1}$ .

答 45 物質を温めるときに, 投入した熱量を  $Q$ , 温度変化を  $\Delta T$ , 質量を  $m$  とすると, 比熱は  $Q/(m\Delta T)$  と定義される。常温では液体水は, 1 g に 1 cal の熱を与えると 1 K だけ温度が上がる。すなわち,  $Q=1 \text{ cal}$ ,  $m=1 \text{ g}$ ,  $\Delta T=1 \text{ K}$  をその定義に代入すればよい。すなわち,

$$\frac{1 \text{ cal}}{1 \text{ g} \times 1 \text{ K}} = \frac{4.184 \text{ J}}{10^{-3} \text{ kg} \times 1 \text{ K}} = 4184 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

答 46 おおよその略解 (君は計算過程もきちんと述べ, 有効数字を適切に考えること): (1) 約  $10^7 \text{ J}$ . (2) 約 5 K  
 (3) 約 100 km

答 47 SI 基本単位で表すことを考える。ポテンシャルエネルギーはエネルギーなのだから J, すなわち N m, すなわち  $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2}$  という単位で表される。右辺は,  $m$  は kg,  $g$  は  $\text{m s}^{-2}$ ,  $h$  は m という単位で表される。従って,  $mgh$  は  $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2}$  という単位で表される。左辺と右辺はともに同じ単位 ( $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ ) で表されるので, 両辺の

次元は一致している。

答 48  $r$  は半径なので, SI 基本単位で表すと m で表現できる。A 君の記憶している公式では,  $V$  は「無次元量  $\times r^2$ 」なので  $\text{m}^2$  という単位で表される。すなわち  $V$  が表すものは体積ではなく面積になってしまう。同様に, A 君の記憶している公式では,  $S$  は面積でなく体積を表すことになってしまう。

答 49 式 (2.39) の両辺に (-1) をかけると,

$$-\text{pH} = \log_{10} \frac{[\text{H}^+]}{\text{mol L}^{-1}} \quad (2.47)$$

となる。対数の定義から,

$$10^{-\text{pH}} = \frac{[\text{H}^+]}{\text{mol L}^{-1}}$$

となる。ここから与式を得る。 ■

答 50 式 (2.40) の右辺に  $\text{pH}=0$  を代入すると,

$$[\text{H}^+] = 10^0 \text{ mol L}^{-1} = 1 \text{ mol L}^{-1}$$

答 51

(1)  $[\text{H}^+] = 0.005 \text{ mol L}^{-1}$  のとき,

$$\begin{aligned} \text{pH} &= -\log_{10} \frac{[\text{H}^+]}{\text{mol L}^{-1}} = -\log_{10} \frac{0.005 \text{ mol L}^{-1}}{\text{mol L}^{-1}} \\ &= -\log_{10} 0.005 \doteq 2.3 \end{aligned}$$

(2) 式 (2.40) より,

$$\text{pH}=5.6 \text{ のとき } [\text{H}^+] = 10^{-5.6} \text{ mol L}^{-1}$$

$$\text{pH}=7.0 \text{ のとき } [\text{H}^+] = 10^{-7.0} \text{ mol L}^{-1}$$

である。前者を後者で割ると,  $10^{-5.6}/10^{-7} = 10^{1.4} \doteq 25.1$ . すなわち, 約 25 倍。

(3) 2 つの塩酸の体積をそれぞれ  $x \text{ L}$  とする。 $\text{H}^+$  の物質量は,

$$\text{pH}=5.0 \text{ の液には, } 10^{-5}x \text{ mol.}$$

$$\text{pH}=3.0 \text{ の液には, } 10^{-3}x \text{ mol.}$$

2 つの塩酸を混ぜ合わせたとき,  $\text{H}^+$  の濃度は,

$$\begin{aligned} \frac{10^{-5}x \text{ mol} + 10^{-3}x \text{ mol}}{x \text{ L} + x \text{ L}} &= \frac{10^{-5} + 10^{-3}}{2} \text{ mol L}^{-1} \\ &= 5.05 \times 10^{-4} \text{ mol L}^{-1} \end{aligned}$$

従って,  $\text{pH} = -\log_{10}(5.05 \times 10^{-4}) \doteq 3.3$

## 第3章

# 代数

過去の受講生の言葉: 「予習大切。やんなきゃできない。」

### 3.1 大小関係

実数には大小関係がある。当たり前のように思えるが、任意の2つの実数  $a, b$  について、

$$\begin{cases} a \text{ は } b \text{ より大きい } (a > b) \\ a \text{ は } b \text{ より小さい } (a < b) \\ a \text{ と } b \text{ は等しい } (a = b) \end{cases}$$

のうち、どれか1つだけが成り立つ。 (3.1)

これは公理である。後に述べる虚数には、このような性質は存在しない。

「 $a$  は  $b$  以上である ( $a > b$  または  $a = b$  である)」を、高校までは  $a \geq b$  と書いたが、大学では  $a \geq b$  と書く。同様に、高校までの  $a \leq b$  は大学では  $a \leq b$  と書く。

実数  $a$  が  $0 < a$  のとき、「 $a$  は正である」という。実数  $a$  が  $a < 0$  のとき、「 $a$  は負である」という。

大小関係にはさらに以下の公理がある: すなわち、任意の実数  $a, b, c$  について、

$$a < b \text{ かつ } b < c \text{ ならば } a < c \quad (3.2)$$

$$a < b \text{ ならば } a + c < b + c \quad (3.3)$$

$$0 < a \text{ かつ } 0 < b \text{ ならば } 0 < ab \quad (3.4)$$

これらから、以下の式 (3.5)~式 (3.13) のような定理が導かれる。煩雑なのでその証明は示さないが、割と簡単なので、興味あれば自力で証明してみよう。

$$a < b \iff 0 < b - a \quad (3.5)$$

つまり、等式と同様に移項ができる。ここで、 $\iff$  は「同値」とか「必要十分」と呼ばれる関係を表す。片方が成り立てばもう片方も必ず成り立つような関係である (第13章参照)。

$$a < b \text{ かつ } 0 < c \text{ なら, } ac < bc \quad (3.6)$$

$$a < b \text{ かつ } c < 0 \text{ なら, } ac > bc \quad (3.7)$$

つまり、正の数を両辺にかけても不等号は変わらないが、

負の数を両辺にかけると不等号は逆転する。

$$a \neq 0 \iff 0 < a^2 \quad (3.8)$$

つまり、0以外の実数は、2乗すると正になる。

$$0 < 1 \quad (3.9)$$

$$0 < a \iff 0 < 1/a \quad (3.10)$$

つまり、逆数は符号を変えない。

$$0 < ab \iff (0 < a \text{ かつ } 0 < b) \text{ または } (a < 0 \text{ かつ } b < 0) \quad (3.11)$$

つまり、積が正なら、2つの実数の符号は同じ。

$$ab < 0 \iff (0 < a \text{ かつ } b < 0) \text{ または } (a < 0 \text{ かつ } 0 < b) \quad (3.12)$$

つまり、積が負なら、2つの実数の符号は異なる。

$0 \leq a$  かつ  $0 \leq b$  のとき、

$$a \leq b \iff a^2 \leq b^2 \quad (3.13)$$

つまり、2つの実数が0以上なら、それぞれ2乗しても大小関係は変わらない。

問 52 0以上の任意の実数  $a, b$  について次が成立し、等号は  $a = b$  のときに限って成り立つ。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (3.14)$$

これを「相加平均・相乗平均の関係」という。これを証明せよ。ヒント: 両辺とも0以上だから、左辺<sup>2</sup> ≥ 右辺<sup>2</sup>を言えればよい。つまり、左辺<sup>2</sup> - 右辺<sup>2</sup> ≥ 0を言えればよい。

アドバイス: 数値は左から小さい順に並べるのが直感的なので、 $<$ を使うように心がけ、 $>$ はなるべく使わないのがよい。例えば、 $0 > a$  という式が出てきたら  $0 < a$  と書き直すのだ。

### 3.2 絶対値

任意の実数  $a$  について、その絶対値  $|a|$  を以下のように定義する:

- $0 < a$  のときは  $|a| := a$
- $a < 0$  のときは  $|a| := -a$
- $|0| := 0$

要するに、「正の数はそのままで、負の数は符号(マイナス記号)を取ったもの」である。この定義から、以下の定理が導出される:  $a, b$  を任意の実数として、

$$0 \leq |a| \quad (3.15)$$

$$|-a| = |a| \quad (3.16)$$

$$|ab| = |a||b| \quad (3.17)$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (\text{ただし } b \neq 0 \text{ とする}) \quad (3.18)$$

その証明は、ここでは煩雑なので示さないが、割と簡単。

2つの実数  $a, b$  について、 $|a - b|$  を、 $a$  と  $b$  の距離という。絶対値は「その数と0との距離」でもある。いずれ、実数以外のものについても「絶対値」という概念を考えるとときが来る。そういうときは、むしろ「絶対値は0(原点)からの距離」と考えるほうがスムーズである。

### 3.3 階乗

自然数  $n$  について、1 から  $n$  までの自然数を全て掛けたものを、 $n$  の階乗と呼び、 $n!$  と書き表す(定義):

$$n! := 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n \quad (3.19)$$

また、 $n = 0$  のときは式(3.19)は使えないので、別途、0の階乗、つまり  $0!$  は1とする(定義)。負の整数の階乗(例えば  $(-3)!$  など)は考えない。

よくある質問 38 なぜ  $0! = 1$  なのですか?  $0! = 0$  の方が、しっくりくるのですが... 式(3.19)より、 $n! = (n-1)! \times n$  が成り立ちますね。これを、 $n = 1$  についても成り立つ、と仮定すると、 $1! = (1-1)! \times 1$ 、つまり  $1! = 0!$  となります。  $1! = 1$  なので結局  $1 = 0!$  となります。つまり、 $0! = 1$  は、間接的に式(3.19)の拡張になっているのです。

例 3.1  $3!$  は  $1 \times 2 \times 3$ 、つまり6である。(例おわり)

問 53 以下の値を求めよ:

- (1)  $4!$    (2)  $5!$    (3)  $0!$    (4)  $1!$    (5)  $(-5)!$

### 3.4 場合の数

例 3.2  $a, b, c$  という3つの文字を、(繰り返し使うことなく)並べる順番のパターンは何通りあるだろうか? 全て書き出してみると、以下の6通りが見つかる:

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$

でもは、書き出さないで「6通り」と知るにはどうすればよいだろう? 最初の文字は  $a, b, c$  の3文字のうちどれでもよい。でも次の文字には、最初に使った文字は使えないので、残りの2文字しか使えない。最後の文字は、残りの1文字しか使えない。従って、 $3 \times 2 \times 1 = 3!$  で6となるのだ。(例おわり)

例 3.2 のように考えれば、異なる  $n$  個のものを並べる順番は、 $n!$  通りある。

問 54 5人の子供を1列に並べる順番は何通り?

例 3.3  $a, b, c, d, e$  の5文字から、重複を許さずに3文字を選んで並べる順番は、何通り? 最初の文字は5文字のどれか。次は残り4文字のどれか。最後は残り3文字のどれか。従って、 $5 \times 4 \times 3$  で60通り。(例おわり)

異なる  $n$  個のものから  $m$  個を選び出して並べる順番のことを順列といい、その数を、 ${}_n P_m$  と書く。例3.3のように考えれば、 ${}_n P_m$  は、以下のように  $m$  個の自然数を掛けたもの:

$${}_n P_m = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1) \quad (3.20)$$

となる。この右辺は、

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) \cdot (n-m) \cdots 2 \cdot 1}{(n-m) \cdots 2 \cdot 1}$$

つまり  $n! / (n-m)!$  に等しいから、次式が成り立つ:

$${}_n P_m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (3.21)$$

問 55  $n$  を任意の自然数とする。  ${}_n P_n = n!$  であることを示せ。

問 56 8人の学生からなるサークルで、会長・副会長・会計係をそれぞれ1人ずつ選出する。複数の役職の兼務はできない。全部で何通りの選出の仕方があるか?

例 3.4 今度は、 $a, b, c$  という3つの文字を、繰り返し使うことも許して、2つ並べる順番を考えよう。例えば、 $aa, cb$  などである。これらは何通りあるだろうか? 実際に、全て書き出してみよう。このとき、辞書に英単語が

並ぶような順序で書き出すと、漏れや重複を起こさずに正確にできる。つまり、

aa ab ac  
ba bb bc  
ca cb cc

となる(9通り)。では、このように書き出さないで「9通り」という答えを得るにはどうすればよいだろうか？最初の文字は a, b, c のうちどれでもよい(3文字)。次の文字も, a, b, c のうちどれでもよい(3文字)。従って、 $3 \times 3 = 3^2$  で9となるわけだ。(例おわり)

同様に考えれば、異なる  $n$  種類の記号を、繰り返し OK で  $m$  個並べる順番のパターンは、 $n^m$  通り存在する。

問 57 0 と 1 という 2 つの数字を、繰り返し使うことも許して、8 つ並べる順番のパターンは、何通り？

さて、異なる  $n$  個のものから  $m$  個を選び出す場合(選び出すだけで、並べたりはしない)の数を、 ${}_n C_m$  と書こう。 ${}_n C_m$  はどんな式になるだろうか？まず、 ${}_n P_m$  は、 $n$  個から  $m$  個を選び出して(そのパターンは  ${}_n C_m$  通り)、次にその  $m$  個を順に並べる(そのパターンは  ${}_m P_m = m!$  通り)、と考えることもできるから、

$${}_n P_m = {}_n C_m \times m! \quad (3.22)$$

となる。従って、

$${}_n C_m = \frac{{}_n P_m}{m!} \quad (3.23)$$

であることがわかる。ここで式(3.21)を使うと、

$${}_n C_m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (3.24)$$

となる。式(3.24)は、 $m=0$  についても考えることができる。式(3.24)を改めて  ${}_n C_m$  の定義とし、これを二項係数と呼ぶ。二項係数  ${}_n C_m$  は、稀に以下のように書くこともある\*1。

$$\binom{n}{m} \quad (3.25)$$

例 3.5 10 種類の花から 3 種類を選んで花束を作る場合、選び出す場合の数は、以下ようになる：

$${}_{10} C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

(例おわり)

問 58 以下の値を述べよ ( $n$  は 3 以上の整数)：

- (1)  ${}_4 C_1$       (2)  ${}_5 C_2$       (3)  ${}_5 C_3$   
(4)  ${}_n C_3$       (5)  ${}_n C_0$       (6)  ${}_n C_n$

問 59  $n, m$  は自然数で、 $n > m$  とする。次式を証明せよ：

$${}_n C_m = {}_n C_{n-m} \quad (3.26)$$

問 60 40 人の生徒がいる学級から、3 人の代表者(その 3 人は同じ地位)を選び出す場合の数を求めよ。

### 3.5 多項式

数(定数)や文字(変数)の積であらわされた式を単項式という。

例 3.6  $3x$  や  $2xy$  や  $abc^2$  はいずれも単項式である。(例おわり)

ひとつ以上の単項式の和であらわされた式を多項式(polynomial)という(単項式は多項式の種類である)。

例 3.7  $1 + 3x + x^2$  や、 $x + y + 2xy$  は、いずれも多項式である。一方、 $\frac{1}{1+x}$  や、 $\sqrt{1+x+x^2}$  は、多項式ではない。これらはどんなに変形しても単項式の和では表せないからである。(例おわり)

多項式の中の個々の単項式を項(term)と呼ぶ。

多項式の中で、文字(変数)の掛け算が最も多い項について、その掛け算の回数をその多項式の次数という。次数  $n$  の多項式を、 $n$  次多項式(もしくは  $n$  次式)という。

例 3.8  $x^3 + 2x - 1$  について、 $x$  の掛け算が最も多い項は  $x^3$  であり、その回数は 3 だから、この多項式の次数は 3 で、この多項式は 3 次式。

例 3.9 以下の多項式：

$$x^3 y + x^2 y + 1 \quad (3.27)$$

について、 $x$  と  $y$  の掛け算が最も多い項は  $x^3 y$  であり、その回数は 4 だから、この多項式の次数は 4 で、この多項式は 4 次式。(例おわり)

複数の文字があっても、どれか特定の文字に着目してそれを変数とみなし、それ以外の文字を定数と見る場合もある。その場合は、その特定の文字だけについて次数

\*1 残念なことに、これは後に学ぶ「列ベクトル」と同じ表記(かぶっている)。紛らわしいので注意!

を考える。式 (3.27) は,  $x$  に着目するならば 3 次式,  $y$  に着目するならば 1 次式。

例 3.10  $ax^2 + bx + c$  について,  $x$  を変数として  $a, b, c$  を定数とみなせば, これは  $x$  に関する 2 次式である。(例おわり)

多項式どうしの足し算, 引き算, 掛け算は, いずれも多項式になる。しかし, 割り算は微妙。多項式を多項式で割って多項式にならないことがある。

例 3.11  $x+1$  を  $x^2+3$  で割ったら  $(x+1)/(x^2+3)$  となるが, これは多項式ではない(例おわり)。

ところで変数  $x$ (エックス) を,  $\chi$  と書く人がいるが, 感心できない。 $\chi$  は「カイ」というギリシア文字であり,  $x$  ではない。 $\chi$  は数学(特に統計学)や物理学でしばしば使われる。 $\chi$  と区別するために, 変数の  $x$  は英語文章の  $x$  と違って 2 つの半円をくっつけるように書くのだ。

問 61 以下の多項式を展開せよ(これは  $x$  と  $\chi$  を書き分ける練習):

$$(x + 2\chi)(2x + \chi)(x - \chi) \quad (3.28)$$

よくある質問 39 今まで  $x$  を  $\chi$  と書いていたので戸惑いました。... これからは  $x$  と書きましょう。しばらく気をつけていれば, 矯正できますよ。

### 3.6 二項定理

$n$  を任意の自然数とする。多項式  $(a+b)^n$  を展開することを考えよう。例えば,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (3.29)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (3.30)$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad (3.31)$$

となる。こういうとき, 各項の係数はどういう規則で決まるのだろうか?  $(a+b)^n$  を展開すると,  $n$  個の  $(a+b)$  のそれぞれから,  $a$  と  $b$  のどちらかを選び出し, それらを掛けあわせてひとつの項ができる。従って, どの項も  $a$  または  $b$  を合計  $n$  回掛けたものになっている。従って, 展開後の各項は, 係数  $\times a^m b^{n-m}$  の形をしている ( $m$  は 0 以上  $n$  以下の整数)。  $a^m b^{n-m}$  の項は,  $n$  個の  $(a+b)$  から  $m$  個の  $a$  と  $n-m$  個の  $b$  を選び出した積であり, その選び方の数は,  $a$  の選び方の数, すなわち  ${}_n C_m$  通り存在する ( $a$  を選んだ時点で  $b$  は自動的に決まるから,  $a$  の選び方だけを考えればよい)。つまり,  $a^m b^{n-m}$  の項

の係数は  ${}_n C_m$  である。要するに,

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= {}_n C_n a^n \\ &+ {}_n C_{n-1} a^{n-1} b \\ &+ {}_n C_{n-2} a^{n-2} b^2 + \dots \\ &+ {}_n C_m a^m b^{n-m} + \dots \\ &+ {}_n C_1 a b^{n-1} \\ &+ {}_n C_0 b^n \end{aligned} \quad (3.32)$$

となる。これを 二項定理 という。これは, P.35 式 (3.26) を使って, 以下のように書くこともできる:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= {}_n C_0 a^n \\ &+ {}_n C_1 a^{n-1} b \\ &+ {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots \\ &+ {}_n C_m a^{n-m} b^m + \dots \\ &+ {}_n C_{n-1} a b^{n-1} \\ &+ {}_n C_n b^n \end{aligned} \quad (3.33)$$

問 62

- (1)  $(x+1)^7$  を展開したときの,  $x^3$  の係数を求めよ。
- (2)  $(2x-3)^6$  を展開したときの,  $x^3$  の係数を求めよ。

### 3.7 平方完成

$x$  に関する 2 次式

$$ax^2 + bx + c \quad (\text{ただし } a \neq 0 \text{ とする}) \quad (3.34)$$

を, 適当な定数  $b', c'$  を用いて

$$a(x+b')^2 + c' \quad (3.35)$$

の形に変形することを, 平方完成 という。

例 3.12 平方完成の例:

$$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \quad (3.36)$$

(例おわり)

一般に,  $ax^2 + bx + c$  を平方完成するときは, まず  $x^2$  の係数で  $x^2$  の項と  $x$  の項をくくる:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \quad (3.37)$$

そして () の中の,  $x$  の係数を取り出して半分にし, とりあえず  $x$  とその数の和の 2 乗を考える:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad (3.38)$$

これを变形すると、次のようになる：

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad (3.39)$$

これを使えば、式 (3.37) は次のようになる：

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \quad (3.40)$$

これで平方完成できた。実際、

$$b' = \frac{b}{2a}, \quad c' = -a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$$

とみなせば、式 (3.40) は式 (3.35) の形になっている。

問 63 以下の 2 次式を平方完成せよ：

- (1)  $x^2 + 4x + 5$                       (2)  $x^2 + x + 1$   
 (3)  $x^2 - 2x - 1$                       (4)  $2x^2 + 4x + 3$   
 (5)  $4x^2 + x + 1$

よくある質問 40 平方完成って何の役に立つのですか？ ...  
 後で出てくるように、2 次方程式の解の公式を求めるのに使います。また、2 次方程式は「2 次形式」という数学理論の基礎であり、その中で平方完成は大切な役割を果たします。「2 次形式」は、機械学習 (いわゆる人工知能) の基礎でもあります。

### 3.8 代数方程式

多項式だけで構成される等式を 代数方程式 という。

例 3.13

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad (3.41)$$

$$x^2y + xy^2 + xy = x + 1 \quad (3.42)$$

などは代数方程式である。(例おわり)

代数方程式が成りたつような文字 (変数) の値を、代数方程式の 解 または 根 と呼ぶ。式 (3.41) の解 (根) は、 $x = -1, 2$  である。

$n$  を自然数とする。次数  $n$  の多項式からなる代数方程式を「 $n$  次方程式」という。式 (3.41) は 2 次方程式である。

一般に、代数方程式は、多項式を因数分解し、各因数を 0 とすることによって解く (解を求める) ことができる。

例 3.14 式 (3.41) は、

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) = 0 \quad (3.43)$$

と因数分解できるため、 $x + 1 = 0$  または  $x - 2 = 0$ 、つ

まり  $x = -1, 2$  が解になる。... ここで P.5 の式 (1.33) を使ったことに気づいただろうか? (例おわり)

因数分解の結果、同じ因数が複数回、現れることもある：

例 3.15 以下のような 2 次方程式を考えよう：

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (3.44)$$

これは、 $(x - 1)^2 = 0$  と因数分解できるので、 $x = 1$  だけが解 (根) である。(例おわり)

この例のように、同じ因数 (この場合は  $x - 1$ ) が複数回、掛け合わさったとき、その因数から得られる解 (根) を、重解 とか 重根 と呼ぶ。

問 64 次の方程式を因数分解で解け。

- (1)  $x^2 - x - 6 = 0$                       (2)  $x^2 - 3x + 2 = 0$   
 (3)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

変数が 1 個だけの 2 次方程式なら、因数分解しなくても公式を使って解ける。それを考えよう：

問 65  $x$  に関する 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (3.45)$$

の解の公式を導こう。ただし  $a, b, c$  は実数とし、 $a \neq 0$  とする。

- (1) 与式の両辺を  $a$  で割ってから平方完成し、次式を導け：

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (3.46)$$

- (2) これを变形し、次式を導け：

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.47)$$

- (3) これを变形し、次式 (2 次方程式の解の公式) を導け：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.48)$$

この公式 (3.48) は、1 変数の 2 次方程式ならどんなのも解いてくれる。

さて、解の公式 (3.48) の中の、平方根記号  $\sqrt{\quad}$  の内側を  $D$  と書いて、2 次方程式の 判別式 と呼ぶ。すなわち、

$$D := b^2 - 4ac \quad (3.49)$$

である。係数  $a, b, c$  が全て実数のとき、判別式  $D$  の正負によって、2 次方程式の解の様子は大きく異なることを説明しよう。判別式  $D$  を使って式 (3.48) を書き換えると、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (3.50)$$

となる。もし  $D=0$  なら、

$$x = \frac{-b}{2a}$$

となる。つまり式 (3.45) の解は 1 つだけ (それは重解である。理由は考えてみよう)。また、もし  $D \neq 0$  なら、

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{または} \quad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad (3.51)$$

となり、解は 2 つ出てくる。このとき、もし  $D > 0$  なら式 (3.51) は両方とも実数で OK だが、問題は  $D < 0$  のときである。 $D < 0$  なら  $\sqrt{D}$  は実数でなくなってしまうのだ! なぜなら、 $\sqrt{D}$  は「2 乗したら  $D$  になるような数 (のうちの 0 以上の数)」だが、そもそも実数は 2 乗してマイナスになるようなことはない。

この窮地を救うアクロバットは、「2 乗するとマイナスの実数になるような数を無理やり考える」という作戦である。まず、2 乗したら  $-1$  になるような数を考える。それを 虚数単位 と呼び、 $i$  と表記する。つまり、

$$i^2 = -1 \quad (3.52)$$

である。あるいは、 $i = \sqrt{-1}$  である。

虚数単位の実数倍を、純虚数 と呼ぶ。例えば  $2i$  とか  $-\sqrt{3}i$  は純虚数だ。純虚数は 2 乗したらマイナスの実数になる。例えば  $(2i)^2 = 2^2 \times i^2 = -4$ 、 $(-\sqrt{3}i)^2 = (-\sqrt{3})^2 \times i^2 = -3$  である。そして、実数と純虚数の和で表される数を 虚数 と呼ぶのだ。例えば、 $1 + 2i$  とか  $\sqrt{3} - \sqrt{2}i$  は虚数である。

$D < 0$  のとき、 $\sqrt{D}$  は純虚数になり、そのとき式 (3.51) は、両方とも虚数になるのだ。

例 3.16 方程式

$$x^2 + 3x + 5 = 0 \quad (3.53)$$

について、 $D = 3^2 - 4 \times 1 \times 5 = -11 < 0$  である。従ってこの方程式は 2 つの虚数の解を持つはず。実際、式 (3.48) を使えば、

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2} \quad (3.54)$$

となる ( $\sqrt{-1} = i$  を使った)。(例おわり)

よくある質問 41 これ、高校でやったけど、何の役に立つのでしょうか? ... 光で食品検査をするときに、どの波長の光がどのくらい吸収されるかは、この虚数解の  $\sqrt{D}$  の部分で決まったりします。地震のときの建物の揺れ具合とかもそうです。高校化学で「共有結合」を習ったでしょうけど、共有結合には「結合性軌道」と「反結合性軌道」というのがあって (大学で習います)、 $\pm\sqrt{D}$  は、そのエネルギーを表したりもします。

2 つの実数  $a, b$  と虚数単位  $i$  を用いて、 $a + bi$  と書ける数を 複素数 という。

よくある質問 42 複素数と虚数はどう違うのですか? ... 虚数は複素数の一種です。 $a + bi$  で、特に  $b \neq 0$  のときのことを虚数というのです。 $b = 0$  のときは  $a$  つまり実数になってしまいますから、実数も複素数の一種です。要するに、複素数は、実数と虚数をひっくるめた数です。

ここでは証明はしないが、次の定理が成り立つ: 次数が  $n$  の 1 変数代数方程式は ( $n$  は自然数とする)、重解を含めて、複素数の範囲で  $n$  個の解を持つ。これを 代数学の基本定理 という。この定理は「 $n$  次の多項式は、 $n$  個の 1 次式の積で因数分解される」と言い換えることができる。この定理は、大学の数学を学ばねば証明できないので、今は「そういうものか」と思っておいてほしい。

問 66 次の方程式を複素数の範囲で解け。

$$(1) \quad x^2 + x + 2 = 0 \quad (2) \quad x^2 + 3x + 1 = 0$$

### 3.9 恒等式

前節で見たように、多くの方程式は、変数がある特定の値 (解) のときにだけ成り立つ。ところが、いつでも無制限に成り立つ方程式もある。そういうのを 恒等式 という。

例 3.17 次の方程式

$$x^2 = 1 \quad (3.55)$$

は、 $x = 1$  か  $x = -1$  のときだけで成り立つので恒等式ではない。一方、

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \quad (3.56)$$

という方程式は、 $x$  がどんな値でも必ず成り立つので、恒等式である。(例おわり)

ある等式が恒等式になることを、「その等式は恒等的に成り立つ」と言うこともある。恒等式については、等号を“=”のかわりに“ $\equiv$ ”で表記することもある。

### 3.10 数列

数を適当な順番にならべたものを 数列 とか 級数 という。例えば、

$$\{a_n\} = \{1, 3, 5, \dots, (2n-1), \dots\} \quad (3.57)$$

は、奇数を小さい順に並べてできた数列である。数列を表すときは、このように“ $\{ \}$ ”を使う。この括弧は、後に学ぶが、「集合」を表す記号である。

ここで、 $a_n$  は、この数列における  $n$  番めの数である(それを第  $n$  項と呼ぶ。この例では、 $n$  は 1 以上の整数)。例えば

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5 \quad (3.58)$$

である。

$a_1$  や  $a_n$  などの、右下に書かれる数字は、その数の順番を示すものであり、数列の 添字 と呼ぶ。添字は「そえじ」と読む。添字は 1 から始まるとは限らず、0 や負の整数などから始まる場合もある。

数列の最初の項を 初項 と呼ぶ。式 (3.57) の数列の初項は  $a_1 = 1$  である。

例 3.18

$$\{b_n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\} \quad (3.59)$$

は、初項を 1 とし、それを次々に 2 倍していくことで得られる数列である。(例おわり)

式 (3.57) の第  $n$  項は、

$$a_n = 2n - 1 \quad (3.60)$$

という式で表現できる。試しに、この式の  $n$  に 2 や 3 などを代入してみよう。ちゃんと  $a_2 = 3, a_3 = 5$  になる。このように数列の第  $n$  項を添字  $n$  の式で表したものを、数列の 一般項 という。このように一般項を簡単な関数で表すことができる数列もあるが、そうでない数列もある。

例 3.19 サイコロを何回もふって、たまたま出た目を順

に並べた数列は、たとえば

$$\{6, 3, 3, 4, 2, 5, 6, 2, 3, 1, \dots\} \quad (3.61)$$

のようになるが、一般項を添字の簡単な関数で表現することはできない。(例おわり)

しかし、数学では、一般項を何らかの簡単な関数で表現できる数列をよく扱う。その中でも代表的なのが、以下に述べる等差数列と等比数列である。

### 3.11 等差数列と等比数列

等差数列 は、等しい間隔 (公差 という) で値がだんだん変わっていく数列である。すなわち、ある数列  $a_n$  が、全ての  $n$  について

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (d \text{ は定数}) \quad (3.62)$$

を満たすとき、この数列を公差  $d$  の等差数列という(定義)。例えば、式 (3.57) は、公差 2 の等差数列だ。公差  $d$  の等差数列  $a_n$  の一般項は、

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad (3.63)$$

$$a_n = a_0 + nd \quad (3.64)$$

などとなる。式 (3.63) は初項が  $a_1$  の場合であり、式 (3.64) は初項が  $a_0$  の場合である。なぜか? 理由は簡単なので各自考えよ。注:  $a_1 = a_0 + d$  を使って式 (3.63) の  $a_1$  を消去すれば式 (3.64) になる。

等比数列 は、等しい倍率 (公比 という) で値がだんだん変わっていく数列である。すなわち、ある数列  $a_n$  が、全ての  $n$  について

$$a_{n+1} = r a_n \quad (r \text{ は定数}) \quad (3.65)$$

を満たすとき、この数列を公比  $r$  の等比数列という(定義)。例えば、式 (3.59) は、公比 2 の等比数列だ。

公比  $r$  の等比数列  $a_n$  の一般項は、

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} \quad (\text{初項が } a_1 \text{ の場合}) \quad (3.66)$$

$$a_n = a_0 \times r^n \quad (\text{初項が } a_0 \text{ の場合}) \quad (3.67)$$

などとなる。なぜか? 理由は簡単なので各自考えよ。

問 67 以下の数列の一般項を表す式を述べよ。ただし、添字は 1 からはじまるとする。

- (1) 初項 1, 公差 2 の等差数列
- (2) 初項 10, 公差 -1 の等差数列
- (3) 初項 3, 公比 3 の等比数列

(4) 初項 1, 公比  $1/2$  の等比数列

式 (3.62) や式 (3.65) のように, 数列の, 隣接するいくつかの項の間に成り立つ関係式のことを, その数列の漸化式 (ぜんかしき) という。

### 3.12 単調増加・単調減少・収束・発散

数列をつくる数が, 項順に次第に大きくなる場合, その数列は 単調増加 する, という。

例 3.20

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \quad (3.68)$$

は単調増加する数列である。(例おわり)

もう少し丁寧に言おう。数列  $\{a_n\}$  が単調増加する, とは, いかなる  $n$  についても,

$$a_n < a_{n+1} \quad (3.69)$$

が成り立つ, ということである。

一方, 数列の数が, 項順に次第に小さくなる場合, その数列は 単調減少 する, という。

例 3.21

$$\{2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, \dots\} \quad (3.70)$$

は単調減少する数列である。(例おわり)

もう少し丁寧に言おう。数列  $\{a_n\}$  が単調減少する, とは, いかなる  $n$  についても,

$$a_n > a_{n+1} \quad (3.71)$$

が成り立つ, ということである\*2。

例 3.22

$$\{1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots\} \quad (3.72)$$

は単調増加も単調減少もしない数列である。(例おわり)

問 68 以下の実数列は, 単調増加するか, 単調減少するか, それともどちらでもないか, 述べよ。証明は不要。

- (1) 公差が正である等差数列。
- (2) 公差が負である等差数列。
- (3) 初項が正で公比が 1 より大きい等比数列。

- (4) 初項が負で公比が 1 より大きい等比数列。
- (5) 初項が正で公比が負である等比数列。
- (6) 初項が正で公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列。
- (7)  $\{a_n = 1/n\}$  ただし  $n$  は 1 以上の整数。

さて, 無限個の数からなる数列について, 項数が進むにつれて, 値がどのようにになっていくのか, ということを考えてみよう。

例 3.23 一般項が

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (3.73)$$

と書ける数列, すなわち

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots\right\} \quad (3.74)$$

という数列は, 単調増加するが, 項数が進むにつれて増加は次第にゆっくりになり, 限りなく 1 に近づいて行く。(例おわり)

この例 3.23 のように, ある数列が, 項数が進むにつれて有限な一定値  $a$  に限りなく近づく場合, その数列は  $a$  に 収束する という。収束しないことを 発散する という。

例 3.24  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  という等差数列は, 単調増加する数列であり, 項数が進むにつれて, 値は果てしなく大きくなっていく (無限大)。従ってこの数列は収束しない, すなわち発散する数列である。(例おわり)

問 69 以下の実数列は, 収束するか, 発散するか? 収束するならどういう値に収束するか? 証明は不要。

- (1) 公差が正である等差数列。
- (2) 公差が負である等差数列。
- (3) 初項が正で公比が 1 より大きい等比数列。
- (4) 初項が負で公比が 1 より大きい等比数列。
- (5) 公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列。
- (6) 公比が 0 より小さく  $-1$  より大きい等比数列。
- (7)  $\{a_n = 1/n\}$

\*2 式 (3.69) や式 (3.71) において, それらの不等号, つまり  $<$  や  $>$  に等号も入っている場合, つまり  $\leq$  や  $\geq$  の場合を, それぞれ「広義単調増加」「広義単調減少」と言う。

## 3.13 数列の和

数列を、初項から順に足したものを、数列の和と呼ぶ。  
すなわち、数列  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  について、

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (3.75)$$

を、第  $n$  項までの和と呼ぶ。

例 3.25  $\{a_n\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$  に対して、第 3 項までの和は、

$$1 + 3 + 5 = 9 \quad (3.76)$$

となる。(例おわり)

式 (3.75) を以下のように簡略的に書く：

$$\sum_{k=1}^n a_k \quad (3.77)$$

すなわち、

$$\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (3.78)$$

である(定義)。 $\Sigma$  は順に数列を足していくことを意味する。 $\Sigma$  はギリシア文字の「シグマ」の大文字であり、英語の S に相当する。S は「足す」を意味する英語の "sum" の頭文字である。

$\Sigma$  の下と上にそれぞれ  $k=1$  と  $n$  と書いてあるが、これは、 $k$  という添字が 1 から順に  $n$  までひとつずつ大きくなっていくということを表している。その各ステップで得られる値  $a_k$  をすべて足すのだ。

よくある質問 43  $\Sigma$  ってなんか難しそうで苦手です。... こんなただの記号、ただの約束ですよ。「難しそう」という気持ちで負けてるだけ。このテキストのここまで読んでくれた人なら楽勝です。

$a_k$  のところが、 $k$  に関する具体的な数式で与えられることもある。例えば、

$$\sum_{k=1}^4 k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \quad (3.79)$$

である。また、例えば、式 (3.76) では、 $k$  番目の項(一般項)は  $2k-1$  と表すことができるから、式 (3.76) を

$$\sum_{k=1}^3 (2k-1) \quad (3.80)$$

と書くこともできる。別に  $k$  という変数を使わなくてもよいので、これを

$$\sum_{n=1}^3 (2n-1) \quad (3.81)$$

と書いても、

$$\sum_{p=1}^3 (2p-1) \quad (3.82)$$

と書いてもかまわない。式 (3.80)、式 (3.81)、式 (3.82) は全て同じである。ただし、

$$\sum_{k=1}^3 (2n-1) \quad (3.83)$$

と書いてはダメ。なぜなら、この式では和に関する添字 ( $k$ ) と、数列の一般項を表すための変数 (一般項を  $a_n$  のように表すときの添字) である  $n$  が一致していないから、 $k=1$ 、 $k=2$ 、 $k=3$  のそれぞれのときに  $2n-1$  の値が定まらない。

さて、 $a$  を定数とすると、

$$\sum_{k=1}^n a = a + a + \dots + a \quad (a \text{ の } n \text{ 回の和})$$

なので、次式は自明である：

$$\sum_{k=1}^n a = na \quad (3.84)$$

問 70 次の式の値を求めよ。

$$(1) \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^4 2$$

$$\sum_{k=1}^3 k^2$$

$$(3) \quad (4)$$

$$\sum_{p=0}^3 2^p$$

$$\sum_{n=1}^4 (2n+1)$$

例 3.26 二項定理、すなわち P.36 式 (3.32) は次式のよう  
に書ける：

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_{n-k} a^{n-k} b^k \quad (3.85)$$

(例おわり)

問 71 式 (3.33) を、 $\Sigma$  を使って書け。

ところで、 $\sum$ には大事な性質がある、という話をしよう。任意の数列  $\{a_k\}, \{b_k\}$  と、任意の実数(定数)  $\alpha$  について、次の2つの式が成り立つ(定理)：

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \quad (3.86)$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^n a_k \quad (3.87)$$

式(3.86)は、

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

から明らかである。式(3.87)は、

$$\alpha a_1 + \alpha a_2 + \cdots + \alpha a_n = \alpha(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

から明らかである。つまり、 $\sum$ の中の足し算や定数倍を  $\sum$ の外に追い出せるのだ。といっても、上の説明を読めばわかるように、当たり前のことである。しかしこれは後で「積分」という概念にも拡張される重要な性質で、大学数学ではこれを  $\sum$ の線型性と呼ぶ。覚えなくてもいいが、そんなのがあったな、と頭の片隅にでも入れといておこう。

### 3.14 数学的帰納法

さて、最も簡単な等差数列  $\{1, 2, 3, \dots\}$  の和は、次式で与えられることがわかっている(定理)：

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \text{ は任意の自然数}) \quad (3.88)$$

これはどう証明すればよいだろう? 例えば、 $n=1$ のときは左辺=1、右辺=1×2/2=1で成り立つ。 $n=2$ のときは左辺=1+2=3、右辺=2×3/2=3で成り立つ。

$n=3$ のときは左辺=1+2+3=6、右辺=3×4/2=6で成り立つ。

...

このように、具体的な  $n$  の値について計算すればその  $n$  については成り立つことがわかる。でもそれは際限ない作業だ。たとえ  $n=100$  まで確かめても、 $n=101$  や  $n=10000$  等については定かではない。そのような任意の  $n$  にも成り立つことを証明するのに使える論法が、「数学的帰納法」だ。それを使うと、式(3.88)は以下のように証明できる：

まず、 $n=1$ のとき、式(3.88)は、

$$\text{左辺} = 1, \text{右辺} = 1 \quad (3.89)$$

であり、確かに左辺=右辺が成り立つ。次に、ある自然数  $N$  について、 $n=N$ のとき式(3.88)が成り立っていると仮定しよう。つまり、

$$\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2} \quad (3.90)$$

であると仮定する。すると、

$$\sum_{k=1}^{N+1} k = \sum_{k=1}^N k + (N+1) \quad (3.91)$$

$$= \frac{N(N+1)}{2} + N+1 \quad (3.92)$$

$$= \frac{N^2 + N + 2N + 2}{2} \quad (3.93)$$

$$= \frac{N^2 + 3N + 2}{2} = \frac{(N+1)(N+2)}{2} \quad (3.94)$$

となる。従って、 $n=N+1$ としたときも式(3.88)は成り立つ。

つまり、「ある数で成り立てばその次の数でも成り立つ」ということがわかった。このことを使えば、先に式(3.89)において  $n=1$  で成り立つことを確認したから  $n=1+1=2$  でも式(3.88)が成り立ち、従って  $n=2+1=3$  でも式(3.88)が成り立ち、従って  $n=3+1=4$  でも式(3.88)が成り立ち、... というように、芋づる式に、全ての自然数  $n$  について式(3.88)が自動的に成り立つことになる。 ■

こういう論法が数学的帰納法である。実際に数学的帰納法を使って何かを証明するときは、上で書いた「つまり...自動的に成り立つことになる。」という記述は省略してよい。まとめると、自然数  $n$  に関するある式が成り立つことを数学的帰納法で証明するには、

- (1)  $n=1$ のときにその式が成り立つことを示す。
- (2) ある自然数  $N$  について、 $n=N$ のときにその式が成り立つことを仮定する。
- (3) すると  $n=N+1$ のときにも成り立つ、ということを示す。

という手順をとればよい(これら3つは全て必要。どれ1つも欠けてはダメ)。

問72 数学的帰納法がよくわかっていないA君は、この問題で、式(3.90)の仮定の  $N$  を  $N+1$  に置き換え

るだけで「証明」にしてしまった。すなわち、  
「...(前略)...

$$\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}$$

であると仮定する。この  $N$  に  $N+1$  を入れて、

$$\sum_{k=1}^{N+1} k = \frac{(N+1)(N+1+1)}{2} = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

となる。...(後略)...

という答案を作ってしまった。この答案はどこがどうま  
ずいのか? A 君にわかるように説明せよ。

よくある間違い 10 式 (3.91) 右辺を書かないで、いきなり式  
(3.92) を書く ... 多くの学生さんがこういうふうにかきます  
が、「間違い」じゃないけど論理的に良い答案ではありません  
(なので「正解」とは言えない)。この証明は、式 (3.90) という  
仮定を使うからこそうまくいくのです。従って、式 (3.90)  
がどこでどのように使われるのかを、はっきりと示すのが証明  
の中心です。それは式 (3.91) 右辺の中の、 $\sum_{k=1}^N k$  に置き換  
わるのです。ところが、式 (3.91) 右辺を省略してしまうと、式  
(3.92) の中の  $\frac{N(N+1)}{2}$  がどこからどのように現れたかが明記  
されなくなってしまいます。「そんなのは読む人が考えればわ  
かるだろう」と君は思うでしょうけど、それではダメ! 数学は、  
「わかった人」(証明を書く人)と「わからない人」(証明を読む  
人)がコミュニケーションする学問です。いくら正しくても、  
その正しさが検証しにくい(わかりにくい)答案はダメ。読む  
人に、暗黙の理解を要求したり、行間を読ませてはダメ。論理  
のステップを明示的に書いて、「どう、私、全部わかってるで  
しょ?」とアピールしなければダメなのです。

よくある間違い 11 上の (2) のステップで、「 $n = N$  が成り  
立つと仮定する」と書いてしまう ... それって、何のことが意  
味不明。 $n = N$  のときに与式が成り立つと仮定する、でしょ!

よくある質問 44 証明が苦手です。何をどう書けばいいのかわ  
かりません... 堅苦しく考えないで、「数学はコミュニケーションだ」と  
まず考えましょう。読者を想像して、君の考えをわからせるには  
どうすればいいか考えるのです。そうすると、君の考えを、いく  
つかのブロックに分け、あるブロックを根拠として次のブロック、  
というふうに繋げればいい、ということがわかるし、要所要所で  
仮定や定理、公理が根拠として必要だとわかるでしょう。

これは、数学に限らず、理系のどんな学問のコミュニケーション  
でも必要なスキルです。それを鍛えるのに最も適しているのが  
数学なのです。だから、数学を学ぶのは、コミュニケーション  
スキルを学ぶためでもあるのです。

よくある質問 45 「数学はコミュニケーションだ」なんて聞  
いたことはありません。数学の先生や数学が得意な友人の中  
には変わった人が結構います。彼らがコミュニケーションが  
得意とはあまり思えません。... 数学で要求されるコミュニ  
ケーションは、抽象的な概念をわかりやすく正確に伝えること  
です。読む人が誤解しやすいことや、複数の意味に解釈でき  
そうな紛らわしいことをあらかじめ察知して、注意深くそれを  
避け、最短経路で話の道筋を組み立てることで、数学が得意  
な人は、それが行き過ぎて、人生相談や愚痴にまでそういう論  
理性を求めて、「結局何が言いたいのか?」「結論を早く言え」  
みたいな態度をとるのかもしれないね(笑)。

問 73  $n$  を 1 以上の整数、 $r$  を 1 以外の任意の実数  
として、以下の式を数学的帰納法で証明せよ。

$$(1) \quad \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad (3.95)$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (3.96)$$

よくある間違い 12 問 73 の証明で、いきなり冒頭に式 (3.95)  
や式 (3.96) を書いてしまう。... まだ証明が済んでいないこと  
を、それと断らずに証明の中や冒頭に書いてはいけません。も  
し書かならば、「... を示す」というふうにかき、それが未証明  
であることを明らかにする必要があります。

よくある質問 46 どんな式でも数学的帰納法で証明できるの  
ですか? ... そんなことはありません。例えば二次方程式の解  
の公式は数学的帰納法では証明できません。

問 74

以下の式の値を求めよ:

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{10} 2^k \quad (2) \quad \sum_{k=1}^{10} k^2$$

よくある質問 47 このあたり高校数学の内容ですが、高校で  
習ったのとは違う感じがします。大学の数学は高校数学と比  
べてどのくらい難しいのですか? ... 大学入試のような難し  
さはあまりありません。大学では論理の流れを大切に、基  
礎・基本を掘り下げ、広く深く学んでいきます。

### 3.15 表計算ソフト

数学的な問題は、実用上は計算機(コンピュータ)で解  
かれることが多い。従って、計算機の利用法を数学の一  
部として学ぶ必要がある。そして何よりも、計算機を使

う数学は楽しい! 結果がすぐに視覚的に現れるし、いろんな条件を自在に変えて試行錯誤できるからである。

そうすると、君はこの節を付録や余興のように思うかもしれないが、本節はとて真剣なものである。本書は、高校数学をできるだけ楽に習得することを目指しているが、その切り札がコンピュータである。高校数学では紙と鉛筆で様々なテクニックを学ばねばならないが、本書では、そのかなりの部分をコンピュータで代替させ、省略するのだ。

コンピュータで数学を手軽にやるには、「表計算ソフト」が便利である<sup>\*3</sup>。それは、平面を升目で区切られた「スプレッドシート」と呼ばれる画面の上で、各升目に数値や計算式を入れて計算処理するものだ。マイクロソフト社の「Excel」や、オープンソース<sup>\*4</sup>である「LibreOffice-calc」が有名である。以下、述べることは「LibreOffice-calc」を標準とするが<sup>\*5</sup>、「LibreOffice」や「Excel」でもほぼ同様である。

よくある質問 48 身近にパソコンありません。スマホでできませんか? ... スマホでも無料の表計算ソフトはあるけど、パソコンの方がずっと使いやすいよ。それに、これから大学では実験やレポートでパソコン使います。今のうちに慣れておこう。

では、表計算ソフトを使ってみよう。表計算ソフトを起動したら、スプレッドシート(柵目状の画面)が現れる。個々の升目を「セル」という。セルの縦の並びを列と呼び、セルの横の並びを行という。例えば左から2番目の列を第B列と呼ぶ。上から3番目の行を第3行と呼ぶ。

個々のセルの位置は、そのセルの属する行と列を指定することで表す。例えば、左から2列目で上から3行目にあるセルは、セルB3と呼ぶ。

試しに、セルA1をクリックして、以下のように打ってみよう:

=2\*3

	A	B	C
1	=2*3		
2			
3			

そしてエンターキーを押す。すると、セルA1には、6という数が現れるだろう。ここで、2\*3とは、2×3のことである。計算機では、掛け算の記号として、\* (アスタリスク) を使うのだ。

さて、同様の計算は、他のどのセルでもできる。このように、スプレッドシートのひとつひとつのセルは、ひとつひとつの電卓のように計算機能を持っている。

次に、セルA2に4と入れてみよう。そして、セルB2に、=と入れてから(まだエンターキーは押さない!) 左隣のセルA2をマウスでクリックすると、セルB2が「=A2」となる。それに続いて、\*5とキーボードで打てば、セルB2は「=A2\*5」となる。

	A	B	C
1	6		
2	4	=A2*5	
3			

ここでエンターキーを押せば、セルB2には、20と表示されただろう。これは、隣のセルA2の中の値(4)の5倍である。

よくある質問 49 うまくいけません。... なら、セルB2に、キーボードで「=A2\*5」と打ち込んでエンターキーを押してみてください。

このように、セルの中での計算に、他のセルの値を参照させることができる。ここで、セルA2の値を7に変えてみよう。すると、セルB2の値が自動的に35になったのではないか! このように、あるセルの値が変わると、そのセルを参照している他のセルでの計算が自動的にやり直されるのである。

### 3.16 表計算ソフトで数列の和

コンピュータが得意なことは、四則演算(加減乗除)の繰り返しである。だから、どんな数学の問題も、四則演算の手順に置き換えることができれば、計算機を活用できる。その好例は数列の和である。

例 3.27 以下の数列の和:

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \quad (3.97)$$

\*3 ただし、表計算ソフトは、大規模・複雑な処理には向かない。そのような目的には、プログラミングの知識が有用・必要である。

\*4 ソースコードが公開された無料のソフトウェアのこと。

\*5 LibreOffice は、インターネットで無料で(合法的に)入手できる。Linux, Windows, Macなどのシステムで使える。興味ある人は、検索してみよ。

を表計算ソフトで計算してみよう。

先ほどのスプレッドシートは保存せずに、まず、新たにスプレッドシートを立ち上げる。そのやり方がわからない人は、いったん表計算ソフトを終了し、もういちど起動すればよい。次に、スプレッドシートのセル (A1, B1, C1, A2, B2) に以下のように入力してみよ：

	A	B	C
1	k	1/k!	sum
2	0	1	
3			

ここで第 1 行 (A1, B1, C1) に入れた内容は、単なるメモである。

第 A 列 (A2, A3, A4, ...) には、数列の項番号  $k$ , すなわち 0, 1, 2, 3, ... が入る。A2 にはその最初の数 (0) を入れた。A3 以降には、1, 2, 3, ... と入れたいが、ひとつずつ「1」「2」「3」... と打ち込むのは面倒である (というかバカらしい)。そこで、セル A3 には、「=A2+1」と入れてみよう。すると、そこには「1」という数が表れるだろう。これはひとつ上のセル A2 の値に 1 を足した値を計算機が自動的に計算してくれたのだ。では、このセル A3 を「コピー」し、セル A4 からセル A10 くらいまで「ペースト」してみよう (コピーとペーストのやり方がわからない人は、ネットで「エクセル コピー ペースト」で検索!)。このとき、セルの 1 つずつにペーストしていく人がいるが、手間がかかって仕方がない (10 個程度のセルならできなくもないが、後で 100 個以上のセルにコピーペーストするような場面も出てくる)。マウスドラッグによって、セル A4 からセル A12 までを一気に選び、そこにペーストすれば、一気にそれらのセルに式がペーストされる。

すると、以下ようになるはずだ：

	A	B	C
1	k	1/k!	sum
2	0	1	
3	1		
4	2		
5	3		
⋮	⋮	⋮	⋮
12	10		

先ほどセル B2 に入れた「1」は、数列の初項 ( $1/0!$ ) である。我々は、セル B3 には  $1/1!$  が入り、セル B4 には  $1/2!$  が入り、... というふうにしたいが、これを実現するには、まずセル B3 に、「=B2/A3」と入れる。この式に

よって、セル B3 には、ひとつ上のセル B2 の値 (つまり 1) をひとつ左のセル A3 の値 (今の項番号、つまり 1) で割った値が入ることになる。このセル B3 をコピーし、セル B4 からセル B12 くらいまでペーストしてみよう\*6:

	A	B	C
1	k	1/k!	sum
2	0	1	
3	1	1	
4	2	0.5	
5	3	0.1666...	
⋮	⋮	⋮	⋮
12	10	0.000	

これで項番号  $k$  の階乗の逆数 ( $1/k!$ ) が第 B 列に並んだ。

よくある質問 50 セル B12 が変です! 2.0877E-009 って出てます。... ソフトや設定によってはそうなることがあります。これはエラーではありません。これは、 $2.0877 \times 10^{-9}$ , すなわち、0.0000000020877 を意味しています。ほとんど 0 です。このように、計算機では、10 のなんとか乗を、「E なんとか」と表示するのです。

あとは、第 B 列の値を足し算すればいい。ここでは、第 C 列に部分和 (途中までの和) の値が表示されるようにしよう。まずセル C2 に「=B2」と入れる。これは第 1 項だけの部分和である。次に、セル C3 に「=C2+B3」と入れよう。これをコピーし、セル C4 からセル C12 くらいまでペーストしてみると、

	A	B	C
1	k	1/k!	sum
2	0	1	1
3	1	1	2
4	2	0.5	2.5
5	3	0.1666...	2.6666...
⋮	⋮	⋮	⋮
12	10	0.000	2.71828...

となる。セル C12 には、式 (3.97) での  $n = 10$  までの和が表示される。ここで出てきた 2.71828... は、実は、式 (1.44) で学んだネイピア数なのだ! (例おわり)

この例でわかるように、表計算ソフトは、個々のセルの計算機能だけでなく、セルどうして値を参照しあう機

\*6 小数点以下の表示桁は、「書式」→「セル」→「小数点以下の桁」などで調整できる (LibreOffice の場合)。

能を活用することで、大量の数からなる複雑な計算を、容易に処理できる。そこが電卓との大きな違いである。

ところで、上の例で、例えばセル C3 に入った「=C2+B3」という数式は、そのままセル C4 にコピーペーストすると、自動的に「=C3+B4」という数式になる。このことに疑問を持った人もいるのではないかと。実はこれは 相対参照 という機能である。これは「絶対参照」という機能とペアで、表計算ソフトの大事な機能である（詳しく知りたい人は、「相対参照 絶対参照」でネット検索!）。

もうひとつ注意。君が何かの作業を表計算ソフトのスプレッドシートでやるとき、どこのセルにどういう値（や計算式）を与えるかは、君が自由に決めればよい。例えば上の例では、第1行にメモを入れ、第2行に項番号や数列の最初（初項）を入れたが、もし「第1行は空白にしておきたいな」と思えば、第2行や第3行から始めてもよい。セルどうしの参照に関する位置関係さえ正しいならば、スプレッドシートのどこで仕事をしても OK である。

問 75 以下の数列の和を考える：

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad (3.98)$$

なお、この数列の和は、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $\pi^2/6 = 1.64493\dots$  に収束することが知られている\*7。君の学籍番号の下3桁を  $n$  とし（例えば学籍番号が 201610987 なら  $n = 987$ ）、式 (3.98) を表計算ソフトで計算して、小数第7位まで報告せよ。

ヒント：例 3.27 を参考にし、まず第 A 列に 1 から  $n$  までの整数を並べる。これが項番号  $k$  である（前例と違って今回は  $k$  が 1 から始まっていることに注意せよ）。次に、第 B 列に、 $1/k^2$  に相当する計算式を入力する。例えばセル B2 に、「=1/(A2\*A2)」と入れればよい。それをコピーし、セル B3 から下の方まで（第 A 列の  $n$  の値が入っている行まで）の範囲にペーストする（ペースト先の全体をマウスドラッグで一気に入れて、ペーストすること。でないと大変だよ!）。最後に（もういちど例 3.27 を参考にし）それらを足せばよい。

よくある間違い 13 上のヒントの操作で、カッコ ( ) を忘れて「=1/A2\*A2」と入れてしまう ... その書き方では、まず 1

を A2 で割り、その後に A2 を掛けるという順序で計算されてしまいます。利用者が望むとおりの順序で計算機が演算してくれない、というのは大変よくあるトラブルの原因です。それを避けるために、演算順序を明示するためのカッコはできるだけ丁寧につけましょう。

よくある質問 51 「=1/(A2\*A2)」のかわりに「=1/A2^2」ではダメですか? ... よく知っていますね。実際、それでも結果は同じになります。多くの場合、計算機では累乗を^で表しますから、^2 で「2乗」を表すことができます。ただし、これは気をつけて使ってください。ソフトウェアによっては、累乗を^で表さないこともあります。また、試しにどこかのセルで、「=-3^2」と入れてみてください。-9 になって欲しいのに、9 になっちゃうでしょ? これは、表計算ソフトが、累乗より負号 (-) を優先する仕様になっており、 $(-3)^2$  を計算したからです。こういう微妙な仕様の違いは、複数のソフトウェアを併用したり、数学本来の書式での数式と較べたりするときに、ミスの原因になります。そして、こういうトラブルは、発見しにくいのです。乗算記号\*はどのソフトでも共通ですし、念のためにカッコで演算順序を明示すれば、トラブルは起きにくくなります（こういうふうには、どこに出しても同じように通用することを 可搬性 といいます）。これが 4 乗とか 5 乗なら\*で書くのは躊躇しますが、2 乗くらいなら\*で十分です。

よくある質問 52 コピーペーストの方法がわからずひとつずつ打っていったら全然終わりませんでした。パソコンの使い方から教えてほしいです。... 「教えてもらう」ことを待っていてはダメです。質問に来てください。

## 演習問題

演習問題 7 楽器の音階について考えよう。音階、すなわち音の高さは、音の周波数（振動数；単位時間あたりに空気が何回振動するか）で決まる。周波数が大きくなるほど、音は高くなる。ある音階に対して、その周波数の 2 倍の周波数の音階のことを、「1 オクターブ上の音階」という。例えば、ドレミファソラシドという並びでは、最後のドは最初のドの「1 オクターブ上の音階」である。

西洋音楽では、ドから 1 オクターブ上のドまでの間を、12 個の音階に分割する。すなわち、ド、ド#、レ、レ#、ミ、ファ、ファ#、ソ、ソ#、ラ、ラ#、シとなる。これを 12 音階と呼ぶ。ピアノの鍵盤を思い出そう。1 オクターブの中に、白鍵が 7 つと黒鍵が 5 つ、計 12 個の鍵がある（図 3.1）。

さて、音階を、周波数が等比数列になるように決める

\*7 その証明には「フーリエ級数」というものを使う。秋学期の「基礎数学 II」で学ぶ。

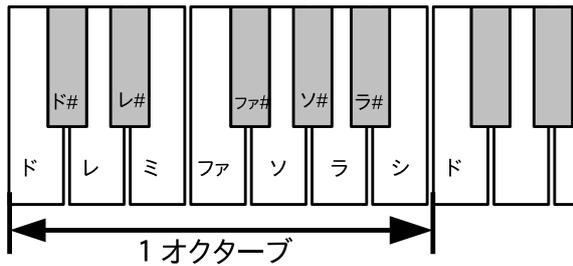


図 3.1 ピアノの鍵盤

ことを、平均律と呼ぶ。多くの楽器は平均律で調整されている。以後、平均律の 12 音階を考える。

- (1) 楽器の調律やオーケストラのチューニングでは、音階の基準として周波数 440 Hz の「ラ」の音が使われる。この音の 2 オクターブ上のラ音の周波数はどのくらいか?
- (2) 12 音階の平均律において、周波数の等比数列の公比はどのくらいか?
- (3) 多くのピアノは、88 個の鍵を持つ。つまり、88 個の音階を出せる。そのようなピアノの最高音の周波数は、最低音の周波数の何倍か?
- (4) 人間の耳は、概ね、20Hz から 20000Hz までの音を感じることができる。その範囲は何オクターブに相当するか?
- (5) 上記の範囲をカバーするピアノを作るとしたら、鍵はいくつ必要か?
- (6) 基準の「ラ」の音(周波数 440 Hz)の、1.5 倍の周波数を持つ音は、12 音階の中で、どの音階になるか?
- (7) 1 オクターブの中で、ド、ミ、ソのそれぞれの周波数は、およそ 4:5:6 という整数比に近い比になることを示せ。これが、ドミソが綺麗な和音になる理由である。

問題の解答

答 52 与式は両辺とも 0 以上なので、式 (3.13) より、  
左辺<sup>2</sup> ≥ 右辺<sup>2</sup> を言えばよい。

$$\begin{aligned} (\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - ab \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

よって与式は成り立つ。この式で、等号が成り立つときは  $\{(a-b)/2\}^2 = 0$  なのだから、 $(a-b)^2 = 0$ 。式 (1.33)

より、 $a - b = 0$ 。従って  $a = b$ 。 ■

答 53

- (1)  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- (2)  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- (3) 1
- (4) 1
- (5) 存在しない。

答 54  $5! = 120$  通り。

答 55 式 (3.21) において、 $m = n$  とすれば、  
 ${}_nP_n = n!/(n-n)! = n!/0! = n!$  ■

答 56 8 人から 3 人を選んで順に並べ、その順番で会長・副会長・会計係を割り当てればよい。つまり、8 人から 3 人を選ぶ順列だから、 ${}_8P_3 = 336$  通り。

答 57  $2^8 = 256$  通り。

- 答 58 (1) 4 (2) 10 (3) 10  
 (4)  $n(n-1)(n-2)/6$   
 (5)  ${}_nC_0 = n!/(0!n!) = n!/n! = 1$ 。ここで  $0! = 1$  を使った。(6) 1

答 59 式 (3.24) より、

$${}_nC_m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

一方、式 (3.24) で  $m$  を  $n - m$  と置き換えれば、

$$\begin{aligned} {}_nC_{n-m} &= \frac{n!}{(n-m)! \{n - (n-m)\}!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \end{aligned}$$

よって、 ${}_nC_m = {}_nC_{n-m}$  ■

答 60  ${}_{40}C_3 = 9880$  通り。

答 61  $2x^3 + 3x^2\chi - 3x\chi^2 - 2\chi^3$

答 62

(1) 式 (3.32) で  $a = x, b = 1, n = 7$  とすれば、

$$(x+1)^7 = {}_7C_7 x^7 + {}_7C_6 x^6 + {}_7C_5 x^5 \dots$$

となる。 $x^3$  の項は、 ${}_7C_3 x^3 = 35x^3$ 。従って、35。

(2) 式 (3.32) で  $a = 2x, b = -3, n = 6$  とすれば、  
 $x^3$  の項は  ${}_6C_3 (2x)^3 \times (-3)^3 = -4320x^3$ 。従って、  
-4320。

答 63

$$(1) \quad (x+2)^2 + 1 \qquad (2) \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$(3) \quad (x-1)^2 - 2 \qquad (4) \quad 2(x+1)^2 + 1$$

$$(5) \quad 4\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{15}{16}$$

答 64 略解 (レポートではきちんと導出過程を書こう):

- (1)  $x = -2, 3$   
 (2)  $x = 1, 2$   
 (3) 左辺を因数分解すると,  $(x^2 - 4)(x^2 - 1) = (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1)$ 。従って,  $x = \pm 1, \pm 2$

答 65 略 (誘導に従って計算する。)

答 66 略解 (レポートではきちんと導出過程を書こう):

- (1)  $x = (-1 \pm \sqrt{7}i)/2$     (2)  $x = (-3 \pm \sqrt{5})/2$

答 67

- (1)  $2n - 1$                       (2)  $11 - n$   
 (3)  $3^n$                               (4)  $(1/2)^{n-1}$

答 68

- (1) 単調増加。例:  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$   
 (2) 単調減少。例:  $\{4, 3, 2, 1, \dots\}$   
 (3) 単調増加。例:  $\{1, 2, 4, 8, \dots\}$   
 (4) 単調減少。例:  $\{-1, -2, -4, -8, \dots\}$   
 (5) どちらでもない。例:  $\{1, -2, 4, -8, \dots\}$   
 (6) 単調減少。例:  $\{1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots\}$   
 (7) 単調減少。

答 69

- (1) 発散 ( $\infty$ )    (2) 発散 ( $-\infty$ )    (3) 発散 ( $\infty$ )  
 (4) 発散 ( $-\infty$ )    (5) 0 に収束    (6) 0 に収束  
 (7) 0 に収束

答 70

- (1)  $2 + 2 + 2 + 2 = 8$     (2)  $1 + 4 + 9 = 14$   
 (3)  $1 + 2 + 4 + 8 = 15$     (4)  $3 + 5 + 7 + 9 = 24$

答 71

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^{n-k} b^k \qquad (3.99)$$

答 72 (解答例) 式 (3.90) はあくまで  $N$  で成り立つことを仮定しているだけで, それが  $N+1$  で成り立つ保証はない。ていうか, それを示すのがそもそもの目的。君は, 示すべき式自体を根拠にしてしまっている。

答 73

- (1)  $n = 1$  のとき, 与式は, 左辺  $= 1 + r$ , 右辺  $= 1 + r$  となるので成り立つ。  $n = N$  のとき与式が成り立つと仮定する。すなわち,

$$\sum_{k=0}^N r^k = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} \qquad (3.100)$$

と仮定する。そのとき,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N+1} r^k &= \sum_{k=0}^N r^k + r^{N+1} = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} + r^{N+1} \\ &= \frac{1 - r^{N+1} + r^{N+1} - r^{N+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{N+2}}{1 - r} \end{aligned}$$

となり,  $n = N+1$  についても与式は成り立つ。■

- (2)  $n = 1$  のとき, 与式は, 左辺  $= 1$ , 右辺  $= 1$  となるので成り立つ。  $n = N$  のとき与式が成り立つと仮定する。すなわち,

$$\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

と仮定する。そのとき,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N+1} k^2 &= \sum_{k=1}^N k^2 + (N+1)^2 \\ &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 \\ &= \frac{(N+1)\{N(2N+1) + 6(N+1)\}}{6} \\ &= \frac{(N+1)(2N^2 + 7N + 6)}{6} \\ &= \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6} \end{aligned}$$

これは式 (3.96) の右辺で  $n$  を  $N+1$  としたものに等しい。従って与式は  $n = N+1$  についても成立。

答 74 (1) 式 (3.95) より,  $(1 - 2^{11})/(1 - 2) = 2047$

(2) 式 (3.96) より,  $(10 \times 11 \times 21)/6 = 385$

答 75 略。

## 第4章

# 関数

### 4.1 関数のグラフ

関数 (function) とは、何か数を与えると、その数に応じて何か決まった数を返すような、対応関係のことである (定義)。例えば関数  $y = x^2$  は、実数  $x$  を与えると、その 2 乗を  $y$  として返す。この場合、 $x = 3$  を与えると、 $y = 3^2 = 9$  を返す\*1。

関数を語る時の一般論の中では、関数を  $y = f(x)$  と表すことが多い (上の例では  $f(x)$  は  $x^2$  である)。別に  $f$  でなくても  $a(x)$  でも  $b(x)$  でも何でもいいのだが、とりあえず function の頭文字をとって  $f$  をよく使う。

$x$  に何かの値を与えると、 $y = f(x)$  から  $y$  の値が求められる。このとき、与えられる数 (この場合は  $x$ ) を 独立変数 もしくは 引数 (ひきすう) といい、求められる数 (この場合は  $y$ ) を 従属変数 という (定義)。

いろんな自然現象や社会現象は関数で表現され、関数で予測される。そのための数学、つまり関数を取り扱う数学を「解析学」という。解析学の第一歩は、いろんな関数を適切にグラフに描くことである。

なお、この章では、出てくる数は全て実数とする (複素数を扱う関数も存在するが、この章では考えない)。

さて、最も単純な関数は「定数関数」だ。定数関数とは、独立変数がどのような値であっても、従属変数の値がいつも同じ定数であるような関数である (定義)。

例 4.1

$$y = 1 \quad (4.1)$$

は定数関数だ。式に  $x$  が入っていないから、 $x$  がどんな値を取ろうが無関係に、 $y$  の値は 1。グラフは図 4.1 のように  $x$  軸に平行な直線になる。(例おわり)

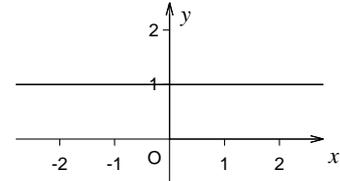


図 4.1 定数関数  $y = 1$  のグラフ。

よくある間違い 14 グラフに原点  $O$ 、 $x$  軸の先の  $x$ 、 $y$  軸の先の  $y$  等の記入を忘れる... グラフには、原点 ( $O$ )、 $x$  軸 (矢印と  $x$ )、 $y$  軸 (矢印と  $y$ ) を必ず描き込むこと。

さて、次に単純なのは、中学校で習った

$$y = 2x \quad (4.2)$$

のような関数だ。 $y = 2x$  は、 $x = 0, 1, 2, \dots$  のときに、それぞれ  $y = 0, 2, 4, \dots$  のような値をとる。グラフは図 4.2 の左側のように、原点を通る、右上がりの直線だ。一方、 $y = -2x$  のような関数のグラフは、図 4.2 の右側のように、原点を通る、右下がりの直線になる。

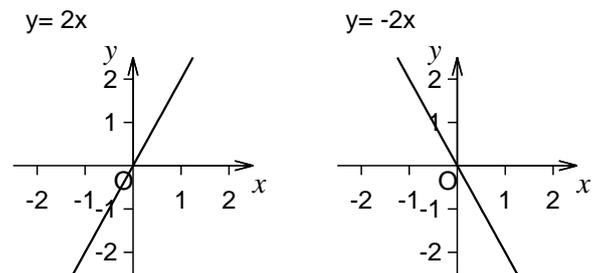


図 4.2 比例関係  $y = 2x$  と  $y = -2x$  のグラフ

一般に、 $a$  を定数として、

$$y = ax \quad (4.3)$$

という関数のグラフは、原点を通る直線になる。定数  $a$  が正なら右上がり、負なら右下がりの直線だ。 $a$  が正のとき、 $a$  が大きいほど、 $x$  が増えるにつれて  $y$  は急に増加

\*1 関数は、この例のように、数式で表されることも多いが、数式で表すことのできない関数もある。数を与えるとそれに応じて決まった数を返す、という対応関係がはっきりしていれば、必ずしもその対応関係が数式で表されなくてもよいのだ。

するので、直線は急になる。もっと言えば、この定数  $a$  は、「 $x$  方向に 1 増えると  $y$  方向にいくつ増えるか」を表す。この定数  $a$  のことを、直線の 傾き と呼ぶ。

このように、 $y = ax$  のような関数で対応付けられる  $x$  と  $y$  の関係を、比例関係とか「 $y$  と  $x$  は比例する」と言う(定義)<sup>\*2</sup>。 $x$  と  $y$  が比例するということを、 $x \propto y$  とか  $y \propto x$  と書いたりもする。

次に、関数

$$y = x^2 \tag{4.4}$$

を考えよう。これは、 $x = 0, 1, 2, 3, \dots$  のときに、それぞれ  $y = 0, 1, 4, 9, \dots$  をとる。グラフは図 4.3 左のようになる。こういう形のグラフや、それを引き伸ばしたり回転したグラフを「放物線」という。

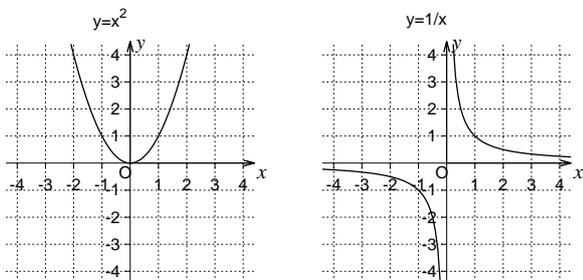


図 4.3 左: 放物線  $y = x^2$ , 右: 双曲線  $y = 1/x$

次に、関数

$$y = \frac{1}{x} \tag{4.5}$$

を考えよう。「0 での割り算」は許されないから、この関数は  $x = 0$  のときに値を持たない。また、例えば  $x = 1/2, 1, 2$  のときに、それぞれ  $y = 2, 1, 1/2$  という値をとる。グラフは図 4.3 右のようになる。

式 (4.5) の関数は、 $x$  がどんどん大きくなると(グラフの右にどんどん行くと)、限りなく 0 に近づく(グラフの線は  $x$  軸に近づく)。そのようなことを、「 $x$  が無限大に行く極限では、 $1/x$  は 0 に収束する」と言ったり、

$$x \rightarrow \infty \text{ のとき, } \frac{1}{x} \rightarrow 0 \tag{4.6}$$

と書く。あるいは、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{4.7}$$

という式であらわす。この  $\lim$  はリミットと読み、

<sup>\*2</sup>  $y = ax$  は比例関係だが、 $y = ax + 1$  は比例関係ではない。グラフで描くと、原点を通る直線関係だけが比例関係。

「極限」を意味する。極限とは、何かを特定の状況に限りなく近づけていくことだ。 $\lim$  の下にその状況を記す約束である。この場合は  $x \rightarrow \infty$  がそれにあたる。

このグラフ(図 4.3 右)は、 $x$  軸と  $y$  軸に対して、交わったり接したりすることはないが、限りなく接近する。そのような直線(この場合は  $x$  軸と  $y$  軸)を 漸近線(ぜんきんせん)という。

一般に、 $a$  を定数として、

$$y = \frac{a}{x} \tag{4.8}$$

のような関数による  $x$  と  $y$  の関係を、「反比例関係」とか「 $y$  と  $x$  は反比例する」と言う(定義)。また、こういう形のグラフや、それを引き伸ばしたり回転させたりしたグラフを「双曲線」という。

以上の関数(式 (4.1)~式 (4.5), 式 (4.8))は、 $a$  を定数、 $n$  を整数として、次式のように統一的に書ける：

$$y = ax^n \tag{4.9}$$

こういう関数をまとめて べき関数 と呼ぶ。ここまで学んだ事をまとめると、「べき関数(式 (4.9))のグラフは、

- $n = 0$  のときには直線(定数関数)
- $n = 1$  のときには直線(比例関係)
- $n = 2$  のときには放物線
- $n = -1$  のときには双曲線(反比例関係)

になる」とも言える。べき関数とそのグラフをきっちり理解すれば、他のいろんな関数も扱いやすくなる。

### 4.2 平行移動・拡大縮小・対称移動

一見、複雑な関数のグラフも、より単純な関数のグラフを移動したり変形したものとみなせることが多い。ここではその基礎となる考え方を学ぼう。

まず、例として  $xy$  平面上の点  $(2, 3)$  を考える。この点を、横( $x$  軸の正の方向)に 1 だけ移動したら、その座標は  $(3, 3)$  になる。また、この点を縦( $y$  軸の正の方向)に 2 移動したら、その座標は  $(2, 5)$  になる(実際に  $xy$  平面を描いて確認せよ)。

問 76 この点  $(2, 3)$  について、以下が成り立つことを、実際に  $xy$  平面を描いて確認せよ。

- (1)  $x$  軸の正方向に 5 移動した点の座標は  $(7, 3)$
- (2)  $y$  軸の正方向に 4 移動した点の座標は  $(2, 7)$
- (3)  $x$  軸方向に 3 倍拡大した点の座標は  $(6, 3)$

- (4)  $y$  軸方向に  $1/2$  倍拡大した点の座標は  $(2, 3/2)$   
 (5)  $x$  軸に関して対称\*<sup>3</sup>に移動した点の座標は  $(2, -3)$   
 (6)  $y$  軸に関して対称に移動した点の座標は  $(-2, 3)$   
 (7) 原点に関して対称に移動した点の座標は  $(-2, -3)$

一般に,  $xy$  座標平面上の点  $(x_0, y_0)$  について,

- $x$  軸の正方向に  $a$  移動した点の座標は  $(x_0 + a, y_0)$
- $y$  軸の正方向に  $a$  移動した点の座標は  $(x_0, y_0 + a)$
- $x$  軸方向に  $a$  倍した点の座標は  $(ax_0, y_0)$
- $y$  軸方向に  $a$  倍した点の座標は  $(x_0, ay_0)$
- $x$  軸に関して対称に移動した点の座標は  $(x_0, -y_0)$
- $y$  軸に関して対称に移動した点の座標は  $(-x_0, y_0)$
- 原点に関して対称に移動した点の座標は  $(-x_0, -y_0)$

だ。これらは問 76 の経験から直感的にわかるだろう。

一般に, 関数

$$y = f(x) \quad (4.10)$$

のグラフを,  $x$  軸の正方向に  $a$ ,  $y$  軸の正方向に  $b$  だけ平行移動すると, 関数

$$y = f(x - a) + b \quad (4.11)$$

のグラフになる。なぜか?  $y = f(x)$  の上の任意の点  $P$  を考えよう。点  $P$  の座標を  $(x_0, y_0)$  とする。点  $P$  は式 (4.10) のグラフ上にあるので

$$y_0 = f(x_0) \quad (4.12)$$

だ。点  $P$  を  $x$  軸の正方向に  $a$ ,  $y$  軸の正方向に  $b$  だけ平行移動した先の点, つまり点  $(x_0 + a, y_0 + b)$  を, 改めて点  $P_1$  とし, その座標を  $(x_1, y_1)$  としよう。すなわち,

$$x_1 = x_0 + a \quad (4.13)$$

$$y_1 = y_0 + b \quad (4.14)$$

である。すなわち,  $x_0 = x_1 - a$ ,  $y_0 = y_1 - b$  である。これを式 (4.12) に代入すると,

$$y_1 - b = f(x_1 - a) \quad (4.15)$$

すなわち,

$$y_1 = f(x_1 - a) + b \quad (4.16)$$

となる。従って,  $(x_1, y_1)$ , つまり点  $P_1$  は式 (4.11) のグラフの上にある。 ■

よくある質問 53 式 (4.11) がしっくり来ません。  $a$  と  $b$  の前の符号が違うのが気持ち悪いのです。  $y = f(x - a) - b$  とか  $y = f(x + a) + b$  にならないのはなぜですか? ... 式 (4.11) を,  $y - b = f(x - a)$  と書き直したら  $a$  と  $b$  は同じ符号で現れるでしょ? 式 (4.11) はもともとこういう形だったのです (式 (4.15) をチェック!).

一般に, 関数  $y = f(x)$  のグラフに関して, 以下の定理が成り立つ:

定理 1)  $x$  軸の正方向に  $a$ ,  $y$  軸の正方向に  $b$  だけ平行移動すると,  $y = f(x - a) + b$  のグラフになる。

定理 2)  $x$  軸方向に  $a$  倍すると,  $y = f(x/a)$  のグラフになる。

定理 3)  $y$  軸方向に  $a$  倍すると,  $y = af(x)$  のグラフになる。

定理 4)  $x$  軸に関して対称移動すると,  $y = -f(x)$  のグラフになる。

定理 5)  $y$  軸に関して対称移動すると,  $y = f(-x)$  のグラフになる。

定理 6) 原点に関して対称移動すると,  $y = -f(-x)$  のグラフになる。

上では定理 1 を証明した。他の定理も同様に証明できる。

問 77 上の定理 2 と定理 4 を証明せよ。

これらの定理を使って, 先に見た, 直線, 放物線, 双曲線のグラフを元に, 多様な関数のグラフを表現しよう。

例 4.2 関数

$$y = 2x - 1 \quad (4.17)$$

のグラフ (図 4.4 左上) は, 比例関係の関数  $y = 2x$  のグラフを,  $y$  軸の正方向に  $-1$  だけ (グラフの下方方向に  $1$  だけ) 平行移動したものだ (定理 1)。

例 4.3 関数  $y = x^2/4$  のグラフ (図 4.4 右上) は  $y = x^2$  のグラフを  $y$  軸方向に  $1/4$  倍したものだ (定理 3)。あるいは,  $y = (x/2)^2$  とも書けるから, そのグラフは  $y = x^2$  のグラフを  $x$  軸方向に  $2$  倍したものだ (定理 2)。

例 4.4 関数  $y = -x^2$  のグラフ (図 4.4 左中) は,  $y = x^2$  のグラフを  $x$  軸に関して対称移動したものだ (定理 4)。

\*<sup>3</sup>  $x$  軸に関して対称というときの「対称」を, 高校までは「線対称」と呼んだりした。しかし,  $x$  軸はそもそも線だから, それに関して対称ということが線対称を意味するのは自明。だから, 「線対称」という言葉は使わない。同様に, 下の「原点に関して対称」という「対称」は高校までの「点对称」を意味するのは明らかだろう。

## 例 4.5 関数

$$y = 2x^2 + 4x + 1 \quad (4.18)$$

は、平方完成すると  $y = 2(x+1)^2 - 1$  になるから、そのグラフ (図 4.4 右中) は、 $y = x^2$  のグラフをまず  $y$  軸方向に 2 倍して ( $y = 2x^2$ )、さらに  $x$  軸の正方向に  $-1$ 、 $y$  軸の正方向に  $-1$  だけ移動したものだ (定理 3, 定理 1)。

例 4.6 関数  $y = -1/x$  のグラフ (図 4.4 左下) は、 $y = 1/x$  のグラフを  $x$  軸に関して対称移動したものだ (定理 4)。あるいは  $y$  軸に関して対称移動したものとも言える (定理 5)。

## 例 4.7 関数

$$y = \frac{x+1}{x-1} \quad (4.19)$$

のグラフは? この式を変形すると、

$$y = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} \quad (4.20)$$

となる。これは  $y = 1/x$  のグラフを  $y$  軸方向に 2 倍し、 $x$  軸の正方向に 1、 $y$  軸の正方向に 1 だけ移動したものだ (定理 3, 定理 1)。それに伴って漸近線も平行移動することに注意! 結果は図 4.4 右下。(例おわり)

問 78 関数  $y = x^2$  を以下のように移動や拡大した関数を表す式を、それぞれ書け。

- (1)  $x$  軸の正方向に 1、 $y$  軸の正方向に 2 だけ平行移動
- (2)  $x$  軸方向に 2 倍、 $y$  軸方向に 3 倍だけ拡大
- (3)  $x$  軸方向に 2 倍に拡大し、 $x$  軸の正方向に 1 だけ平行移動
- (4)  $x$  軸の正方向に 1 だけ平行移動し、 $x$  軸方向に 2 倍に拡大 (前問と順序が違うことに注意!)

問 79 次の関数のグラフを描け。漸近線がある場合は、その式とグラフも描き込め。

- (1)  $y = 2x + 1$
- (2)  $y = x^2 + 2x + 3$
- (3)
- (4)

$$y = 2 + \frac{1}{x} \qquad y = \frac{2x}{1+x}$$

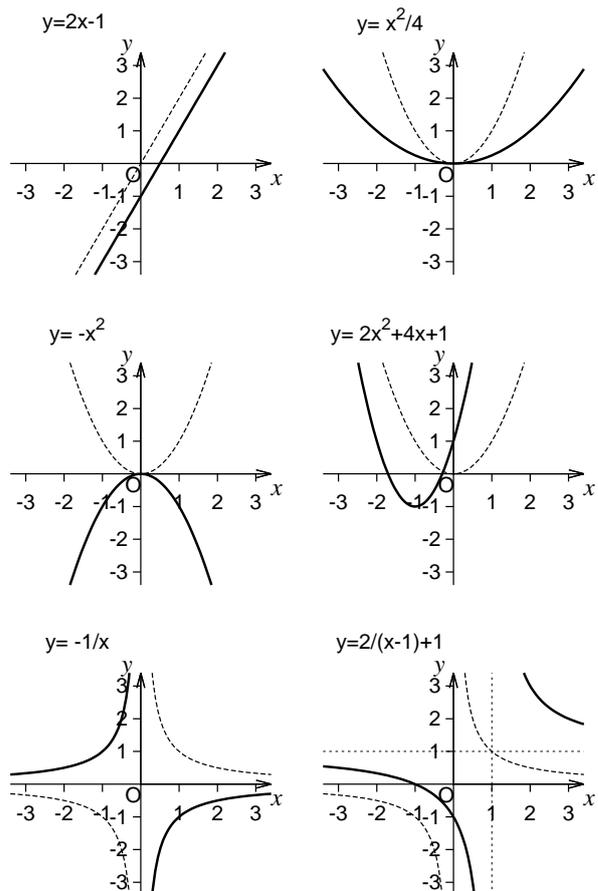


図 4.4 直線・放物線・双曲線を平行移動・拡大縮小・対称移動することで得られるグラフ。太い点線は、元になった関数のグラフ。細い点線は漸近線。

## 4.3 一次関数と直線のグラフ

$a, b$  を実数の定数として (ただし  $a \neq 0$  とする),

$$y = ax + b \quad (4.21)$$

のような関数を、一次関数 という。 $y$  が  $x$  の一次式で表されるからだ。例えば式 (4.17) は一次関数である。一次関数は中学高校でやらされて「もう飽きた」という感じだろう。でも一次関数は、今後学ぶ、微分積分や線型代数という数学の基礎なので、ここで再度、復習しよう。

式 (4.21) のグラフは、 $y = ax$  のグラフ (直線) を  $y$  軸の正方向に  $b$  移動したものだなので直線だ。 $x = 0$  のとき  $y = b$  だからこのグラフは  $(0, b)$  で  $y$  軸と交わる。この点のことやその  $y$  座標 ( $b$  の値) を 切片 という。また、 $x$  が 1 増えると  $y$  がいくつ増えるかを表す定数  $a$  を、傾き という。切片と傾きが定めれば、一次関数は定まる。

では、点  $(x_0, y_0)$  を通り、傾き  $a$  の直線の関数は? 平行移動を使って考えよう。まず、原点  $O$  を通り傾き  $a$  の

直線の関数は  $y = ax$ 。これを  $x$  方向に  $x_0$ ,  $y$  方向に  $y_0$  移動すると, 式 (4.11) より次式になる:

$$y = a(x - x_0) + y_0 \quad (4.22)$$

これが求める関数だ。なぜか? 右辺の  $x$  に  $x_0$  を代入したら  $y = y_0$  だ。つまりこの直線は  $(x_0, y_0)$  を通る。 $x$  の係数は  $a$  だから, 傾きは  $a$ 。条件を満たしている! これがうまくいったのは, 直線を平行移動した時, もとの直線  $y = ax$  の上にあった原点  $(0, 0)$  が, 点  $(x_0, y_0)$  に移動したからである。

では, 2 つの点:  $(x_0, y_0)$  と  $(x_1, y_1)$  を通る直線の関数は? まず, 傾きを求める。点  $(x_0, y_0)$  から点  $(x_1, y_1)$  への値の変化を考えると,  $x$  軸の正方向に  $x_1 - x_0$  行くと  $y$  は  $y_1 - y_0$  だけ増える。従って傾きは  $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ 。これを式 (4.22) の  $a$  に代入して得られる次式が, 欲しかった関数である。

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 \quad (4.23)$$

問 80 以下のグラフを表す関数をそれぞれ求めよ。

- (1) 傾き 3, 切片  $-2$  の直線。
- (2) 傾き 2 で, 点  $(-1, 1)$  を通る直線。
- (3) 点  $(2, 1)$  と点  $(4, -3)$  を通る直線。

問 81 温度を表す単位として, 華氏というものがある (これは米国で日常的に使われている単位である)。「華氏  $x$  度」のことを,  $x^\circ\text{F}$  と書く。華氏の定義は以下のとおりである:

- 真水の凝固点 (つまり  $0^\circ\text{C}$ ) を  $32^\circ\text{F}$  とする。
- 真水の沸点 (つまり  $100^\circ\text{C}$ ) を  $212^\circ\text{F}$  とする。
- 摂氏と華氏は一次関数で関係付けられる。

華氏  $x$  度のとき, 摂氏は  $y$  度であるとする。

- (1)  $y$  を  $x$  の式で表わせ。
  - (2)  $x$  を  $y$  の式で表わせ。
  - (3)  $37^\circ\text{C}$  を  $^\circ\text{F}$  で表わせ (人の体温)
  - (4)  $0^\circ\text{F}$  を  $^\circ\text{C}$  で表わせ。
- (3)(4) の数値は小数第 1 位まで記せ。

#### 4.4 関数の和のグラフ

よく知られた関数の和で表される関数のグラフは, それぞれの関数のグラフを積み重ねるようにプロットすることで描くことができる。

例 4.8 次の関数:

$$y = x + \frac{1}{x} \quad (4.24)$$

のグラフを,  $0 < x$  の範囲で描いてみよう。この関数は  $y = x$  と  $y = 1/x$  の和だ。それらをまず描き, 次に, いくつかの  $x$  の値について, 2 つのグラフを積み上げたところに点を打つ。例えば  $x = 1$  では  $y = x$  も  $y = 1/x$  も  $y = 1$  なので, 和は 2。従って, この関数のグラフは  $(1, 2)$  を通るので,  $(1, 2)$  に点を描く。片方のグラフをもう片方のグラフの上に乗せるイメージである。

$x \rightarrow \infty$  では  $y = 1/x$  は 0 に漸近するので, この関数のグラフは  $y = x$  に漸近する。一方,  $x$  が 0 に近づくと  $y = 1/x$  が  $\infty$ ,  $y = x$  が 0 に行くので, この関数のグラフは  $\infty$  に行く。それらを勘案すれば, 図 4.5 のようなグラフが描ける。(例おわり)

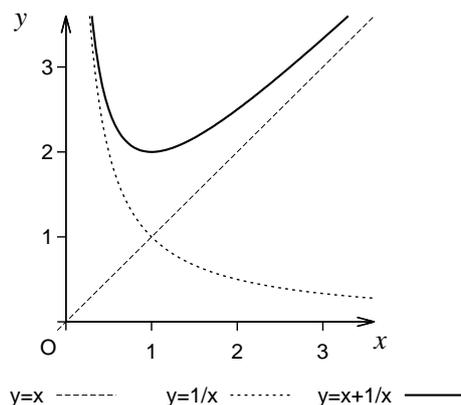


図 4.5  $y = x + 1/x$  のグラフ (実線)。 $y = x$  を土台としてその上に  $y = 1/x$  を載せるイメージで!

問 82 以上の説明をたどって,  $y = x + 1/x$  のグラフを描け。

#### 4.5 グラフの読み取りと直線近似

グラフは, 実験結果を解析したり表示するときにも使う。そういうグラフの例を図 4.6 に示す。この実験では  $x$  と  $y$  の 2 つの数値がペアになったデータが得られている。1 つのデータペアが 1 個の点に描かれている。では, 点 A のデータの,  $x$  と  $y$  の値はどのくらいだろうか?

残念なことに, このグラフは目盛りの間隔が広すぎて, ぱっと見ただけでは, 点 A の  $x$  の値は 20 と 30 の間,  $y$  の値は 200 と 300 の間 (で 300 にかなり近い) というこ としかわからない。正確な数値を得るには, 定規を使う。

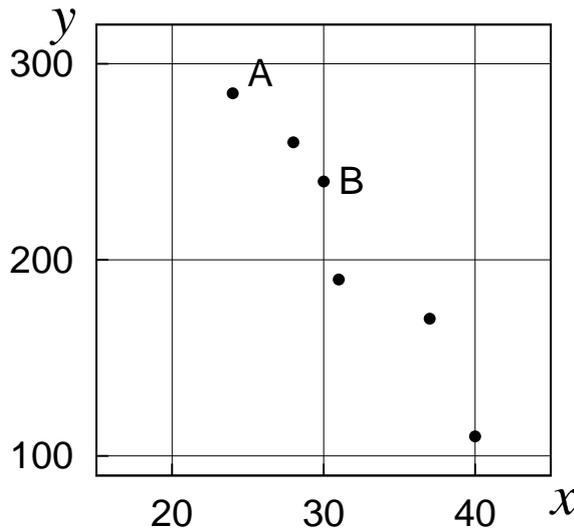


図 4.6 実験値がプロットされたグラフの例

まず、点 A を通る、縦軸に平行な線を定規で引こう。それが  $y = 200$  の横罫線と  $y = 300$  の横罫線に交わる点を、それぞれ P, Q とする。紙の上での線分 PQ の長さ  $\overline{PQ}$  と線分 PA の長さ  $\overline{PA}$  をそれぞれ定規で測ろう (mm 単位でも cm 単位でもよい)。A の  $y$  座標の値は、

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PQ}} (300 - 200) + 200 \quad (4.25)$$

である (理由は自分で考えてみよう!)。同様に、点 A を通る、横軸に平行な線を定規で引き、 $x = 20$  と  $x = 30$  の縦罫線と交わる点を求め、適当な線分の長さを定規で測って上の式と同様の計算すれば、 $x$  座標の値がわかる。

問 83 点 A の  $x$  座標と  $y$  座標を実際に読み取ってみよう! 定規で測った数値を明記し、それらをもとに計算した式と結果を述べよ。ヒント: 電卓を使ってよい。結果は、 $x = 24$ ,  $y = 285$  程度になるはず。多少の誤差 ( $x$  で 0.5 程度,  $y$  で 2 程度) は仕方がない。なるべく丁寧に!

問 84 図 4.6 の全ての点に最も近いような 1 本の直線を、感覚を頼りに、定規で引け。その直線を表す  $y = ax + b$  という 1 次式 ( $a, b$  は適当な定数) を求めよ。どのように求めたのかわかるように述べよ。ヒント: こういうのを近似直線という。近似直線をデータから計算で求める方法もあるのだが (最小二乗法と言う)、紙の上で感覚を頼りに「えいやっ」と引くことも多い。多少の誤差は仕方ない。直線を定規で引いたら、その傾きと切片を求めればよい。

まず、直線が罫線と交わる点を利用し、 $y$  の変化量と  $x$  の変化量をそれぞれ読み取り、その比を計算する。それが傾き  $a$  である。切片は  $y$  軸との交点だが、このグラフには  $y$  軸は載っていない (左外にある)。そこで代わりに、 $y = ax + b$  の  $(x, y)$  に、問 83 で求めた点 A の座標を代入し、 $b$  を決定する。結果は、 $a = -10.6$ ,  $b = 550$  くらいになるはず。がんばれ!

#### 4.6 関数のグラフと、方程式の解

いくつかの独立変数  $x, y, \dots$  の関数  $f(x, y, \dots)$  について、 $f(x, y, \dots) = 0$  という形の式を方程式という (定義)。例えば P.37 で学んだ代数方程式は、 $f(x, y, \dots)$  が多項式のときの方程式である。

よくある質問 54 式 (3.42) で方程式の例として出てきた  $x^2y + xy^2 + xy = x + 1$  は、 $f(x) = 0$  の形をしていませんよ... 右边を左辺に移項して下さい。  $x^2y + xy^2 + xy - x - 1 = 0$  とするでしょ? この左辺を  $f(x, y)$  とすると、この式は  $f(x, y) = 0$  の形になります。

ここでは独立変数が 1 個の場合、すなわち  $f(x) = 0$  という形の方程式を考える。

方程式  $f(x) = 0$  について、 $x = x_0$  が解なら、 $f(x_0) = 0$  である。従って、点  $(x_0, 0)$  は、関数  $y = f(x)$  のグラフ上にある。すなわち、この点は、関数のグラフと  $x$  軸との共有点 (交点または接点) だ。逆に、この関数のグラフと  $x$  軸との共有点の  $x$  座標は、方程式  $f(x) = 0$  の解だ。これを利用して、いろんな関数のグラフの概形を描ける。

例 4.9 関数  $y = x^3 - x$  のグラフを描こう。  $x^3 - x = 0$  の解は、 $x = -1, 0, 1$ 。この 3 つの  $x$  座標でグラフは  $x$  軸と交わる (または接する)。一方、 $x \rightarrow \infty$  では明らかに  $y \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$  では明らかに  $y \rightarrow -\infty$ 。つまり大局的には、このグラフは、はるか右上と、はるか左下に伸びる。以上を総合してえいやっと思えば、図 4.7 のようなグラフができる。

ちなみにこの関数を  $y = x^3$  と  $y = -x$  の和とみて、これらの関数のグラフを積み重ねても描ける。(例おわり)

方程式  $f(x) = 0$  の解が実数の範囲で存在しない場合は、 $y = f(x)$  のグラフは  $x$  軸と交点を持たない。

例 4.10  $y = x^2 + x + 1$  のグラフを考えよう。方程式  $x^2 + x + 1 = 0$  の判別式 (P.37) は、 $D = 1 - 4 = -3 < 0$  である。従ってこの方程式は実数解を持たない (2 つの

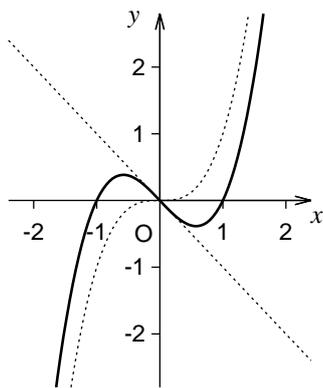


図 4.7  $y = x^3 - x$  のグラフ (実線)。点線は、 $y = x^3$  と  $y = -x$  のグラフ。

虚数解を持つ)。従って  $y = x^2 + x + 1$  のグラフは  $x$  軸に接したり交わったりすることはあり得ない。実際、そのグラフは図 4.8 左のようになる。(例おわり)

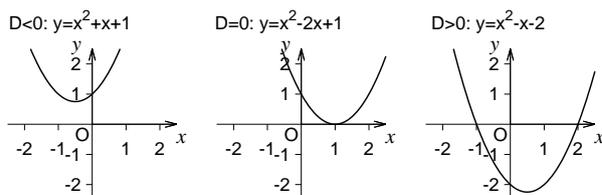


図 4.8 2 次関数のグラフの例。一般に、2 次関数のグラフは、判別式  $D$  の符号によって、 $x$  軸との共有点の様子が決まる。 $D < 0$  なら共有点無し。 $D = 0$  なら共有点 (接点)1 個。 $D > 0$  なら共有点 (交点)2 個。

$f(x)$  が多項式のとき、 $f(x) = 0$  は重解を持つことがある。その場合は、 $y = f(x)$  のグラフは、重解の  $x$  で  $x$  軸と接する (その理由は、後で微分を学べばわかる)。

例 4.11  $y = x^2 - 2x + 1$  のグラフを描こう。方程式  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$  は重解  $x = 1$  を持つ。従って  $y = x^2 - 2x + 1$  のグラフは  $x = 1$  で  $x$  軸に接する。実際、そのグラフは図 4.8 中のようにになる。(例おわり)

### 4.7 表計算ソフトでグラフを描く

次に、パソコンで関数のグラフを描いてみよう。原理は簡単で、関数  $y = f(x)$  について、ある範囲で  $x$  の値をすこしずつ変えながら、 $y$ 、すなわち  $f(x)$  を計算し、点  $(x, y)$  をグラフにプロットするだけである。計算は P.44 でやった数列の計算と同じようにやって、グラフ化は表

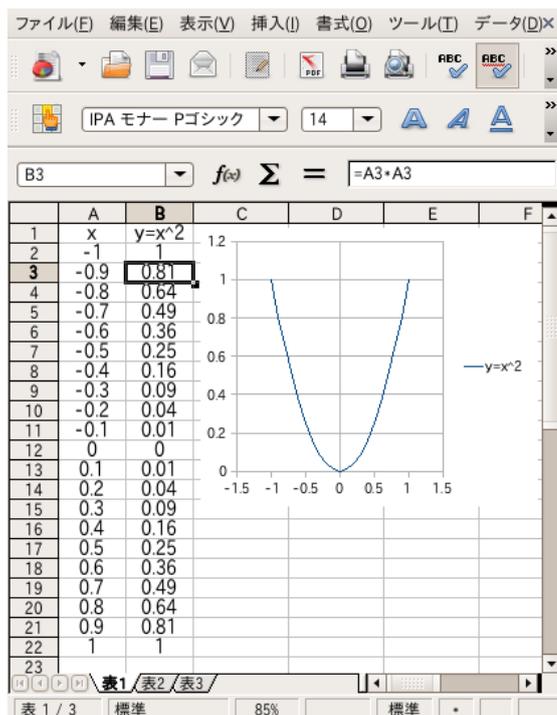


図 4.9  $y = x^2$  のグラフを描いたところ

計算ソフトのグラフ機能を使う。

例 4.12 関数  $y = x^2$  のグラフを  $-1 \leq x \leq 1$  の範囲で描いてみよう (図 4.9)。左端の A 列には、 $x$  の座標値 (-1 から 1) を適当な間隔 (刻み幅という。ここでは 0.1) で刻んで (これを離散化という) 入れる。具体的には、セル A2 に -1 を入れ、セル A3 には「=A2+0.1」と入れてコピーし、あとは A3 を A22 までペーストすればよい。

次に、 $x$  のそれぞれの値に対応する  $y$  の値を求める。B2 に「=A2\*A2」と入れてコピーし、B3 から B22 までペーストすればよい。これで計算が終わった。

最後にグラフを描こう。A1 から B22 まで (A2 からはではないことに注意!) をマウスで選択して、「挿入 グラフ」でグラフを描く。グラフオプションは「散布図 (線のみ)」を選ぶこと (「散布図」を選ばなくても、それらしいグラフになるかもしれないが、 $x$  軸が変になっているはずだ)。図 4.10 のようにグラフ線にマークを入れると見にくいので、マークは入れないでおこう\*4。(例おわり)

\*4 ただし、実験で得た測定値などをプロットする場合はマークは必要である。

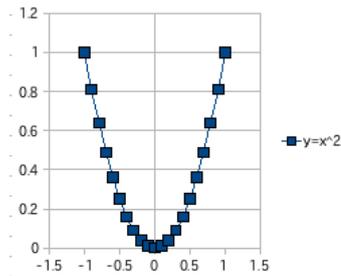


図 4.10 グラフ線にマークを入れると見にくい

よくある質問 55 なぜ A1 から選ぶのですか？ 数値が入っているのは A2 からですよ？ ... それによってセル B1 が一緒に選ばれるところがミソです。そうすることで、B1 の内容が、凡例に表示されるのです。これによって、グラフがわかりやすくなります。

よくある間違い 15 関数のグラフを描く時、横軸の値が不適切な範囲になる ... 上の例や下の問で、「散布図」を選ばずに、「折れ線」などを選んでしまうとそうなります。出来上がったグラフをよくチェックしましょう。

注: レポートや論文、プレゼン等で使うグラフ（人様に見せるグラフ）をパソコンで作るときに気をつけるべきこと:

- 複数の関数をひとつのグラフに重ねて描くときは、どの線がどの関数に対応しているのかを、必ず凡例などで明記すること。
- 線の区別をするときは、カラーだけに頼るのではなく、線の種類や太さも変えて区別すること（線のどこかをダブルクリックすると、それらを変更できるウィンドウが出てくる）。これは色盲の人への配慮。

問 85 パソコンの表計算ソフトを使って、次の関数を用いて、 $-1 \leq x \leq 1$  の範囲でグラフに描け。重ねて描け。以後、レポートではグラフをプリントアウトせよ。グラフをコピーして、ワープロの文書にペーストすると、レイアウトが楽だし、複数のグラフを 1 枚の紙に印刷するときにも便利。数値データはプリントアウトしなくてもよい。

(1)  $y = x$       (2)  $y = x^2$       (3)  $y = x^3$

ヒント:  $x$  の値は、まとめてひとつの列 (A 列) にしてよい。B2 には「=A2」、C2 には「=A2\*A2」、D2 には「=A2\*A2\*A2」と入れて、それぞれ列の下のほう (22 行) までコピー・ペースト。B1, C1, D1 にそれぞれの関数の凡例を書き込み (B1 には「y=x」とか)、A1 から D22 をマウスで一気に入ってグラフ

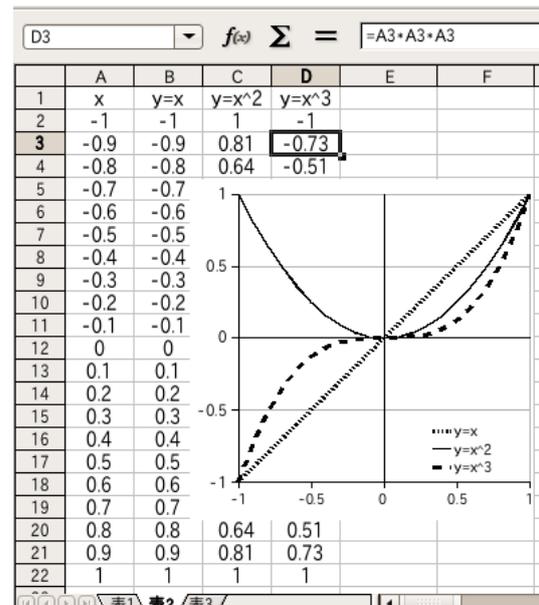


図 4.11  $y = x, y = x^2, y = x^3$  のグラフ

を描けば、自動的に 3 つの線が重なったグラフになる。答えは図 4.11 のようになる。

よくある間違い 16 複数のグラフを重ねて描くとき、どの線が何を表しているかを表示しない ... そういうレポートは減点されるかもしれませんね...

## 4.8 関数のグラフと不等式の解

例 4.13  $x + 2 < 2x - 1$  という不等式を満たす  $x$  はどのような値だろうか？これを式変形すると  $3 < x$  となるから、この不等式は  $x$  が 3 より大きな値で成立する。■

例 4.14 不等式

$$x^2 - x - 2 < 0 \quad (4.26)$$

を考える (このように 2 次式に関する不等式を 2 次不等式という)。これを式変形すると  $(x-2)(x+1) < 0$  である。式 (3.12) より、 $(x-2)$  と  $(x+1)$  は、片方が負で片方が正のはず。明らかに  $-2 < 1$  だから  $x-2 < x+1$ 。小さいほうが負、大きいほうが正になるはずだから、 $x-2 < 0$  かつ  $0 < x+1$ 。これを整理して、 $-1 < x < 2$ 。これが、この不等式の解。■

例 4.13 のような単純な不等式は式変形だけで解けるが、例 4.14 のような複雑な不等式は、ちょっとめんどくさかった。そういうとき、グラフが役立つ。式 (4.26) の左辺を抜き出して  $y = x^2 - x - 2$  という関数を考える

と、そのグラフは図 4.8 の右端のようになる。式 (4.26) は、この関数を使って  $y < 0$  と表される。つまり、このグラフが  $x$  軸よりも下に来るようなときの  $x$  の値の範囲を見い出せばよい。明らかにそれは  $-1 < x < 2$  であり、上の解と一致する。

同様に考えれば、以下の定理が成り立つことがわかるだろう: 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  が  $x = \alpha$  と  $x = \beta$  という実数解を持つ時 ( $0 < a, \alpha < \beta$  とする), 不等式

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad (4.27)$$

の解は「 $\alpha < x < \beta$ 」であり、不等式

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (4.28)$$

の解は「 $x < \alpha$  又は  $\beta < x$ 」である。

なぜか?  $y = ax^2 + bx + c$  とおくと、そのグラフは  $x = \alpha$  と  $x = \beta$  で  $x$  軸と交わり、しかも  $a > 0$  なので下に凸の放物線となる。そのグラフが  $x$  軸よりも上にある状況や(式 (4.27)), 下にある状況(式 (4.28))を見い出せばよい。また、式 (4.27)、式 (4.28) について、 $<$  を  $\leq$  に置き換えたものについては、その解も  $<$  を  $\leq$  に置き換えたものになることは明らかだろう。

問 86  $x$  は実数とする。以下の 2 次不等式を解け。

- (1)  $x^2 + x - 6 < 0$       (2)  $x^2 + 5x + 6 \geq 0$   
 (3)  $x^2 + 3x + 1 \geq 0$

例 4.15 不等式

$$x^2 + x + 1 > 0 \quad (4.29)$$

の解はどうなるだろう? 関数  $y = x^2 + x + 1$  のグラフは、図 4.8 の左端のようになる。式 (4.29) は、この関数を使って  $y > 0$  と表されるから、このグラフが  $x$  軸よりも上に来るときの  $x$  の範囲を言えばよい。といっても、見るからにこのグラフは  $x$  がどんな値でも  $x$  軸より上にある。従って、「全ての实数」がこの不等式の解。 ■

上の例をちょっと変えて、

$$x^2 + x + 1 < 0 \quad (4.30)$$

という不等式の解はどうだろう? そう、「解なし」だ!

よくある間違い 17 不等式 (4.30) の解を以下のように間違える:

$$\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \text{これは間違い!}$$

... この式には意味がありません。なぜなら、虚数には大小関係は存在しないからです(例えば、 $1+i$  とか  $5i$  はこの「範囲」に入っているかどうか、言えますか?)。不等式は普通、実数の範囲で考えます。

式 (4.30) は、本来はグラフを使わないで、以下のように解くべきだ。まず、

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad (4.31)$$

と平方完成する。 $(x + \frac{1}{2})^2$  は  $x$  がどんな実数値をとっても 0 以上だから、この式は常に  $3/4$  以上。ということは、この式はマイナスになり得ない。従って「解なし」。

このように、「左辺=0」が実数解を持たないような 2 次不等式は、式 (4.31) のように平方完成して考えねばならない。

問 87 実数  $x$  に関する以下の不等式を解け。

- (1)  $x^2 + x + 1 > 0$   
 (2)  $x^2 + x + 1 < 0$   
 (3)  $\frac{x+1}{x-1} > 0$   
 (4)  $x^2 - 4x + 4 < 0$   
 (5)  $x^2 - 4x + 4 \leq 0$   
 (6)  $x^2 - 4x + 4 \geq 0$   
 (7)  $x^2 - 4x + 4 > 0$

ヒント: (3) は分母が 0 になったら困るから  $x \neq 1$  を前提として、両辺に  $(x-1)^2$  を掛ける。もし、 $(x-1)$  を両辺にかけてしまうと、 $x$  が 1 より小さいときに不等号が逆転してしまう(P.33 の式 (3.7) より)。それを処理するのは面倒。 $(x-1)^2$  は 0 以上だから、両辺にかけても不等号はかわらない。(4)~(7) は、左辺が  $(x-2)^2$  であることに注意。

## 4.9 偶関数・奇関数

関数  $f(x)$  が、恒等的に

$$f(-x) = f(x) \quad (4.32)$$

を満たすとき、 $f(x)$  を 偶関数 と呼ぶ(定義)。また、関数  $f(x)$  が恒等的に

$$f(-x) = -f(x) \quad (4.33)$$

を満たすとき、 $f(x)$  を 奇関数 と呼ぶ(定義)。偶関数や奇関数は、他の関数よりも、何かと扱いが楽である。何か関数を相手にするときは、まずその関数が偶関数や奇

関数が調べよう。もしそうならラッキー!なのだ。

注: 式 (4.33) を、なぜかわざわざ「 $f(x) = -f(-x)$ 」と変形して覚える人がある。間違いではないのだが、この形は、奇関数の性質を証明する時に使いづらく、面倒である。素直に式 (4.33) の形で覚えよう。

問 88 偶関数とは何か? 奇関数とは何か?

既に学んだように、関数  $y = f(x)$  のグラフを  $y$  軸に関して対称移動したら関数  $y = f(-x)$  のグラフになる (4.2 節の定理 5)。ところが偶関数なら、 $f(-x)$  はもとの関数  $f(x)$  に等しい。すなわち、偶関数のグラフは、 $y$  軸に関して対称移動しても、もとの関数のグラフと一致してしまう。従って、偶関数のグラフは  $y$  軸に関して対称である。例えば、 $y = x^2$  は偶関数だが、そのグラフ (図 4.3 左) は確かに  $y$  軸に関して対称である。

一方、関数  $y = f(x)$  のグラフを原点に関して対称移動したら関数  $y = -f(-x)$  のグラフになる (4.2 節の定理 6)。ところが、奇関数なら、 $-f(-x)$  はもとの関数である  $f(x)$  に等しい。すなわち、奇関数のグラフは、原点に関して対称移動しても、もとの関数のグラフと一致してしまう。従って、奇関数のグラフは原点に関して対称である。例えば、 $y = ax$  (図 4.2) や、 $y = 1/x$  や  $y = x^3 - x$  は奇関数だが、それらのグラフ (図 4.3 右, 図 4.7) は確かに原点に関して対称である。

問 89 以下の各関数  $f(x)$  について、偶関数が奇関数か (もしくはどちらでもないか) を判定し、 $y = f(x)$  のグラフを描け。

(1)  $f(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$

ヒント:  $x$  軸との交点も考えよ。

(2)  $f(x) = x + x^2$

(3)  $f(x) = x - x^3$

(4)  $f(x) = 1/(1 + x^2)$

ヒント:  $x = 0$  と  $x \rightarrow \pm\infty$  ではどうなるか?

よくある質問 56 このグラフはパソコンで描くのですか? ... いえ、手書きで。今後も、「パソコンで」とか「表計算ソフトで」という指示のない「グラフを描け」は、手書き。

よくある間違い 18 偶関数の定義を「グラフが  $y$  軸に関して対称であるような関数」と言ったり、奇関数の定義を「グラフが原点に関して対称であるような関数」と言ってしまう... それらが定義なら、それらを使って以下の問題を解けますか?

問 90 以下を証明せよ:

- (1) 偶関数と偶関数の積は偶関数。
- (2) 奇関数と奇関数の積は偶関数。
- (3) 偶関数と奇関数の積は奇関数。
- (4) 偶関数と偶関数の和は偶関数。
- (5) 奇関数と奇関数の和は奇関数。
- (6) 偶関数と奇関数の和は、偶関数でも奇関数でもなくなることがある。(ヒント: 例を挙げればよい。)

問 91 以下の関数について、偶関数か、奇関数か、いずれでもないか、判定せよ。

$$f(x) = \left\{ (1 + x^2 + x^4)^3 + \frac{1}{x^2 + x^4} \right\}^8 \quad (4.34)$$

こんな複雑な関数のグラフなんか、描ける気がしないだろう。それでもまだ、「グラフがなんちゃらに関して対称」とかで偶関数や奇関数を定義したいなら、なんとかしてグラフを描いてくれ!

よくある質問 57 偶関数・奇関数って、偶数・奇数と関係ありますか? ... 偶関数・奇関数と偶数・奇数の間に直接の関係はありませんが、言葉が似てるだけに、似たような性質も多少はあります。例えば、式 (4.9) のべき関数  $ax^n$  は、 $n$  が偶数なら偶関数、 $n$  が奇数なら奇関数。また、問 90 で見たことは、偶数どうしの積が偶数になるとか、奇数どうしの積が奇数になるとかに似ています。ただし、偶数と奇数の和は奇数だけど、偶関数と奇関数の和は奇関数とは限りません。そもそも別の概念だから、どこかが違っているのは当然と言えば当然。

よくある質問 58 偶関数の定義を述べよという問題で、「 $f(-x) = f(x)$ 」と答えたら不正解になりました。なぜ? ... 省略しすぎ! せめて「 $f(-x) = f(x)$  を満たすような関数  $f(x)$  のこと」くらいは書かなきゃ、何のことかわかりません。

#### 4.10 合成関数

2 つの関数  $f(x), g(x)$  を考える。ある数を  $f(x)$  に入れると別の数が返ってくるが、その返ってきた数を次に  $g(x)$  に入れると、さらに別の数が返ってくる。このように、2 つの関数  $f(x), g(x)$  を段階的に続けて使うことで、新たな関数ができる。それを「 $f(x)$  と  $g(x)$  の合成関数」といい、 $g(f(x))$  と書く。例を見てみよう:

例 4.16 以下の 2 つの関数の合成関数を考えよう:

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2$$

例えば  $x = 1$  について、 $f(1) = 1 + 1 = 2$ ,  $g(2) = 2^2 = 4$

となる。従って、 $g(f(1)) = 4$  である。

合成関数は、2 段めの関数の独立変数  $x$  に 1 段めの関数を代入したものである。この場合は、

$$g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 \quad (4.35)$$

となる。これに  $x = 1$  を代入すると、確かに 4 になる。

式 (4.35) は次のように考えてもよい:

$$g(f(x)) = \{f(x)\}^2 = (x+1)^2 \quad (4.36)$$

結果は同じである。

合成の順序を変えると、違った合成関数になることに注意しよう。上の例では、

$$f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1 \quad (4.37)$$

である。式 (4.35) と式 (4.37) は明らかに違う関数だ! (例おわり)

$g(f(x))$  と書かれるとき、内側に 1 段めの関数が、外側に 2 段めの関数が書かれることに注意しよう。左から見ていくと 2 段めが先に来て 1 段めが後に来るので、順序が混乱する人がいるが、「何を何に代入するか」と考えれば自然に納得できるだろう。

問 92 2 つの関数  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = 1 + x^2$  について、 $g(f(x))$  と  $f(g(x))$  をそれぞれ求めよ。

## 4.11 逆関数

一般に、関数  $y = f(x)$  の  $x$  と  $y$  を入れ替えてできる関数  $y = g(x)$  を、関数  $f(x)$  の 逆関数 と呼ぶ(定義)。

例 4.17 関数  $y = 2x$  は、 $x$  と  $y$  を入れ替えると  $x = 2y$  となる。これを  $y$  について解けば  $y = x/2$  となる。従って、 $y = 2x$  の逆関数は  $y = x/2$  である。(例おわり)

問 93 以下の関数の逆関数をそれぞれ求めよ。ただし、 $a, b$  は任意の定数とする。

- (1)  $y = 2x + 1$                       (2)  $y = 1/(x-1)$   
 (3)  $y = a/x$                         (4)  $y = -x + b$

逆関数はどういうイメージのものだろうか? 一般に、関数  $y = f(x)$  を、数  $x$  から数  $y$  への「変換装置」みたいなものと考えれば、 $x$  は「入り口」、 $y$  は「出口」だ。従って、 $x$  と  $y$  を入れ替えるということは、この装置の働きを逆行させ、「出口から入って入り口から出る」ということ。つまり、 $y = f(x)$  で変換された数を、変換前

の数に戻すのが逆関数  $y = g(x)$  だ。

そう考えると、 $g(x)$  が  $f(x)$  の逆関数なら、逆の立場も言える、つまり  $f(x)$  は  $g(x)$  の逆関数である、ということがわかるだろう。

例 4.18 関数  $y = 2x$  に  $x = 3$  という数を入れると、 $y = 6$  という数に変換される。この数を改めて  $x$  として関数  $y = x/2$  (これが  $y = 2x$  の逆関数であることは例 4.17 でみたとおり) に入れると、 $y = 6/2 = 3$  となる。確かに最初の  $x$  の値に戻った。(例おわり)

さて、逆関数にはひとつ面白い性質がある:  $f(x)$  と  $g(x)$  が互いに逆関数であるとき、恒等的に

$$g(f(x)) = f(g(x)) = x \quad (4.38)$$

となるのだ。なぜだろう?  $f(x)$  は、 $x$  を別の数に移す関数だが、逆関数  $g(x)$  はそれをもとの数  $x$  に戻す関数だ。だから、 $g(f(x))$  は、 $x$  をいったん別の数に移してもそれを元に戻すので、結局は何もしないに等しい。つまり、 $g(f(x))$  は  $x$  をそのまま  $x$  にしておく関数である。つまり、恒等的に  $g(f(x)) = x$  が成り立つ。同様に、 $f(g(x)) = x$  も恒等的に成り立つ。 ■

例 4.19 例 4.17 でみたように、関数  $y = 2x$  の逆関数は  $y = x/2$  である。前者を  $f(x)$ 、後者を  $g(x)$  としてみよう。つまり  $f(x) = 2x$ ,  $g(x) = x/2$  とする。

$$f(g(x)) = 2g(x) = 2 \times \frac{x}{2} = x \quad (4.39)$$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{2} = \frac{2x}{2} = x \quad (4.40)$$

確かに式 (4.38) が成り立ってる! (例おわり)

問 94  $0 \leq x$  とする。 $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$  について、式 (4.38) が成り立つことを確かめよ。 $(x^2$  と  $\sqrt{x}$  は互いに逆関数である。)

$f(x)$  と  $g(x)$  が互いに逆関数であるとき、 $y = g(x)$  は  $x = f(y)$  と同じことだから、 $y = f(x)$  のグラフにおいて  $x$  軸と  $y$  軸を取り換えたものが  $x = f(y)$ 、つまり  $y = g(x)$  のグラフになる (図 4.12)。

グラフ上で  $x$  軸と  $y$  軸を取り換えるときに、直線  $y = x$  のだけは不変である。直線  $y = x$  は  $x$  軸と  $y$  軸のちょうど中間の、折り返しの位置にあるからだ。あたかも直線  $y = x$  に沿って鏡があるように  $y = f(x)$  のグラフを反転したものが  $x = f(y)$ 、すなわち  $y = g(x)$  のグラフになる。従って、逆関数のグラフはもとの関数の

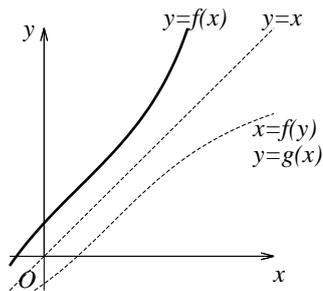


図 4.12 関数  $y = f(x)$  とその逆関数  $y = g(x)$  のグラフは  $y = x$  に関して互に対称である。

グラフを直線  $y = x$  に関して対称移動したものだ。(だからと言って、これを逆関数の定義としてはいけない。)

問 95  $y = x^2$  と  $y = \sqrt{x}$  を重ねてグラフに描け。

よくある間違い 19  $y = \sqrt{x}$  のグラフを、原点で  $y$  軸に突き刺さる角度で描いてしまう ...  $y = x^2$  のグラフは放物線なので原点で  $x$  軸に接しますよね。  $y = \sqrt{x}$  はその逆関数なので、  $y$  軸にやさしく接するはず。突き刺さってはダメ!

たまに逆関数と逆数を混同する人がいるが、全く別の概念だ。たとえば、例 4.17 で見たように、  $y = 2x$  の逆関数は  $y = x/2$  だが、  $2x$  の逆数は  $1/(2x)$  だ。また、問 93 で見たように、逆関数が自分自身になる関数は多いが、逆数が自分自身になる数は 1 と  $-1$  しかない。

問 96 次の関数のグラフを、パソコンを使って、  $0 \leq x \leq 1$  の範囲で重ねて描け。レポートには、そのグラフのプリントアウトを貼り付けること。

- (1)  $y = x$       (2)  $y = x^2$       (3)  $y = x^3$   
 (4)  $y = x^4$       (5)  $y = x^{1/2}$       (6)  $y = x^{1/3}$   
 (7)  $y = x^{1/4}$

ヒント: 表計算ソフトでべき乗をするときは  $\wedge$  という記号を使う。例えばセル A3 の 3 乗は「=A3^3」とする。セル A3 の  $1/3$  乗は、「=A3^(1/3)」とする(括弧を忘れないこと!)

この間でわかるように、  $n$  を自然数とすると、  $y = x^n$  のグラフと  $y = x^{1/n}$  のグラフは、直線  $y = x$  に関して対称である。それらは互いに逆関数だからだ。

また、この形の関数を、一般に  $y = x^\alpha$  とおくと、そのグラフは、  $\alpha$  によって形が系統的に変わる。この  $\alpha$  のような数、すなわち独立変数  $x$  や従属変数  $y$  ではなくて

関数の性質を決定するような数のことを、パラメータと呼ぶ\*5。例えば式 (4.21) の  $a$  と  $b$  もパラメータである。「パラメータが変わるとどうなるか」という目で関数を理解しよう。そうすると、「この現象はこういう関数で表現できるのでは?」という勘が働くようになる。

よくある質問 59 パソコンでグラフ描くのめんどくさいです。テキストに載ってるグラフを見るだけでよいのでは? ... それはダメ。「見るだけ」では心に残らないよ。「見ればわかる」ことでも、自分で手を動かしてやってみないと、心に残らないのです。人間はそういうもの。このテキストは、パソコンの計算やグラフ描画を通じて実感・納得するよう設計しています。そのかわり、他の本にあるような細かい証明や理屈は載せていません。そうやって学習者の負担を軽くし、そのぶん、生物資源学類で出てくる実例を増やしたり、より高度で有用な数学を盛り込んでいます。

## 4.12 陰関数

今から学ぶのは、ちょっと変わった関数である。いや、正確には「関数」とは言えない、「関数もどき」である。

$y = f(x)$  という関数では、  $x$  の値を代入すれば  $y$  の値が決まる。しかし、ふたつの変数  $x, y$  を対応づけるのは、このように  $y =$  の形になっている関数だけではない。  $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$  のように、  $x$  と  $y$  が混在するような 2 変数関数が 0 に等しい、という式でも、いちおう  $x$  と  $y$  は対応する。このように、  $x$  と  $y$  の 2 変数関数  $F(x, y)$  について、  $F(x, y) = 0$  という方程式で  $x$  と  $y$  が対応する場合、この対応関係を 陰関数 (implicit function) と呼ぶ(定義)。

代表例として、以下のような陰関数がある。

問 97  $r$  を正の実数の定数とする。陰関数

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad (4.41)$$

のグラフは(ただし  $r > 0$  とする)、原点を中心とする半径  $r$  の円になることを示せ。

陰関数を式変形すれば  $y = f(x)$  の形に整理できることもあるが、多くの場合は難しい。ひとつの  $x$  の値に、複数の  $y$  の値が対応することもあるからだ。例えば、式 (4.41) は、

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2} \quad (4.42)$$

\*5 「パラメータ」と言う言葉には「媒介変数」という別の意味もあるが、それはいずれ説明する。

と変形できるが、右辺の  $\pm$  が嫌らしい。例えば  $x = 0$  に対して  $y = r$  と  $y = -r$  という 2 つの数に対応してしまう。そもそも関数とは、ひとつの  $x$  に対してひとつの  $y$  を対応付けるものだ (後に学ぶ「写像」という概念)。従って、陰関数は、厳密な意味では関数ではないのだ。

陰関数にも、グラフの対称性や平行移動、拡大といった考え方が適用できる。

例 4.20 ある陰関数  $F(x, y) = 0$  のグラフを  $x$  軸の正方向に  $a$ 、 $y$  軸の正方向に  $b$  だけ平行移動すると、 $F(x - a, y - b) = 0$  のグラフになる。なぜか?

陰関数  $F(x, y) = 0$  のグラフ上の任意の点  $P$  を考える。その座標を  $(x_0, y_0)$  とする。すなわち、 $F(x_0, y_0) = 0$  である。点  $P$  を  $x$  軸の正方向に  $a$ 、 $y$  軸の正方向に  $b$  だけ平行移動した先の点を点  $P_1$  とし、その座標を  $(x_1, y_1)$  とする。当然、 $x_1 = x_0 + a$  かつ  $y_1 = y_0 + b$  である。従って  $x_0 = x_1 - a$  かつ  $y_0 = y_1 - b$  である。これを  $F(x_0, y_0) = 0$  に代入すると、 $F(x_1 - a, y_1 - b) = 0$  である。従って、点  $P_1$  は陰関数  $F(x - a, y - b) = 0$  のグラフ上にある。(例おわり)

問 98  $(x, y)$  平面上で、点  $(3, -1)$  を中心とする、半径 2 の円を表す陰関数を求めよ。

### 4.13 関数のグラフを描く手順

ここで、関数のグラフを手で描く手順をまとめておこう:

- $x$  の全範囲で関数はつながっているかチェック。  
 $1/x$  のように割り算が入った関数は、「0 での割り算」のところで関数が途切れる。陰関数は、 $x$  のとりうる範囲がかなり限定されることもある (例えば  $x^2 + y^2 = 1$  は  $-1 \leq x \leq 1$  でしか定義されない)。
- $x = 0$  での  $y$  の値 ( $y$  軸との共有点) を調べる。無いとき (虚数解になるとき) はグラフは  $y$  軸を通らない。
- $y = 0$  での  $x$  の値 ( $x$  軸との共有点) を調べる。無いとき (虚数解になるとき) はグラフは  $x$  軸を通らない。
- 関数の対称性を調べる ( $x$  を  $-x$  にしてみたり  $y$  を  $-y$  にしてみたり)。
- よく知っている関数の平行移動や拡大、縮小、対称移動、和などにならないか調べる。
- $x$  や  $y$  が  $\infty$  や  $-\infty$  に行くときの様子を調べる。
- それでもよくわからないときは、 $x$  に適当な数 (な

るべく計算しやすい値) をいくつか代入して  $y$  の値を求め、グラフにプロットしてみる。

よくある質問 60 高校で数 III を習ったときは、関数を微分して増減表を作って、それをもとに関数のグラフを描きました。それじゃダメですか? ... もちろんいいですよ。でも、微分をまだ知らない人もいるしね。微分を知ってても、ここで学んだやり方は有用です。なぜなら、複雑な関数、特に陰関数は、微分したりそれが 0 になる  $x$  を求めたりが大変だったりします。それに、漸近線は増減表からは出ないよね。ここでやったように、関数のおおまかな性質を検討するだけでも、いろんな関数のグラフを、漸近線を含めてうまく描けます。そういう大局的な見方は、いろんな関数をイメージするための強力な武器なのです。実際、複雑な関数のグラフはパソコンで描けばいいのですが、それを正しく行い、結果を吟味するには、ここで学んだ考え方が有用なのです。

### 演習問題

演習問題 8 次式は、酵素が介在する化学反応の速度を説明する、ミカエリス・メンテンの式というものである:

$$v = \frac{V_{\max}[S]}{K_m + [S]} \quad (4.43)$$

$V_{\max}$  と  $K_m$  は正の定数。 $v$  は化学反応の速度 (単位時間あたり、単位体積あたりに生成される化学物質の量)、 $[S]$  は基質 (化学反応の材料となる物質) の濃度である。この式は、 $v$  を  $[S]$  の関数として表している。

- (1)  $[S] = 0$  のとき  $v = 0$  であることを示せ。
- (2)  $[S] \rightarrow \infty$  の極限で、 $v$  は  $V_{\max}$  に限りなく近づいていくことを示せ。
- (3)  $[S] = K_m$  のとき、 $v = V_{\max}/2$  となることを示せ。
- (4) 以上を参考にして、式 (4.43) のグラフを描け。横軸を  $[S]$ 、縦軸を  $v$  とせよ。基質の濃度は 0 以上なので、 $0 \leq [S]$  としてよい。

演習問題 9  $K_1(x), K_2(x)$  を奇関数、 $G_1(x), G_2(x)$  を偶関数とする。以下の関数を、奇関数が、偶関数が、どちらとも言えないか、示せ (根拠も述べよ)。

- (1)  $K_1(K_2(x))$
- (2)  $G_1(G_2(x))$
- (3)  $K_1(G_1(x))$
- (4)  $G_1(K_1(x))$
- (5)  $K_1(x)$  の逆関数
- (6)  $G_1(x)$  の逆関数

演習問題 10 陰関数  $F(x, y) = 0$  のグラフに関して、以下の定理が成り立つことを示せ:

- (1)  $x$  軸方向に  $a$  倍,  $y$  軸方向に  $b$  倍だけ拡大すると,  $F(x/a, y/b) = 0$  のグラフになる。
- (2)  $x$  軸に関して対称移動すると,  $F(x, -y) = 0$  のグラフになる。
- (3) 恒等的に  $F(x, -y) = F(x, y)$  なら,  $x$  軸に関して対称。

演習問題 11 陰関数  $x^2 - y^2 = 1$  のグラフを描け。

演習問題 12 陰関数  $(x^2/4) + (y^2/9) = 1$  のグラフを描け。

## 問題の解答

答 76 略 (実際に各点を  $xy$  平面にプロットしてみよ)。

答 77  $y = f(x)$  のグラフ上の任意の点  $P$  を考える。その座標を  $(x_0, y_0)$  とする。  $y_0 = f(x_0)$  が成り立つ。

定理 2 の証明: 点  $P$  を  $x$  軸方向に  $a$  倍して移動した先の点, すなわち  $(ax_0, y_0)$  を, あらためて点  $P_2$  とし, その座標を  $(x_2, y_2)$  と置く。すなわち,  $x_2 = ax_0, y_2 = y_0$  である。すなわち,  $x_0 = x_2/a, y_0 = y_2$  である。これを  $y_0 = f(x_0)$  に代入すると,  $y_2 = f(x_2/a)$  となる。従って, 点  $P_2$  は  $y = f(x/a)$  のグラフの上にある。 ■

定理 4 の証明: 点  $P$  を  $x$  軸に関して対称移動した先の点, すなわち  $(x_0, -y_0)$  を, あらためて点  $P_4$  とし, その座標を  $(x_4, y_4)$  と置く。すなわち,  $x_4 = x_0, y_4 = -y_0$  である。すなわち,  $x_0 = x_4, y_0 = -y_4$  である。これを  $y_0 = f(x_0)$  に代入すると,  $-y_4 = f(x_4)$ , すなわち  $y_4 = -f(x_4)$  となる。従って, 点  $P_4$  は  $y = -f(x)$  のグラフの上にある。 ■

答 78

- (1)  $y = (x - 1)^2 + 2$
- (2)  $y = 3(x/2)^2 = 3x^2/4$
- (3)  $y = x^2$  を (図 4.13 左上), まず  $x$  軸方向に 2 倍することで,

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad (4.44)$$

になる (図 4.13 中上)。さらに  $x$  軸方向に 1 移動す

ることで,

$$y = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 \quad (4.45)$$

になる (図 4.13 右上)。

- (4)  $y = x^2$  を (図 4.13 左下), まず  $x$  軸方向に 1 移動することで,

$$y = (x-1)^2 \quad (4.46)$$

になる (図 4.13 中下)。さらに  $x$  軸方向に 2 倍することで,

$$y = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 \quad (4.47)$$

になる (図 4.13 右下)。

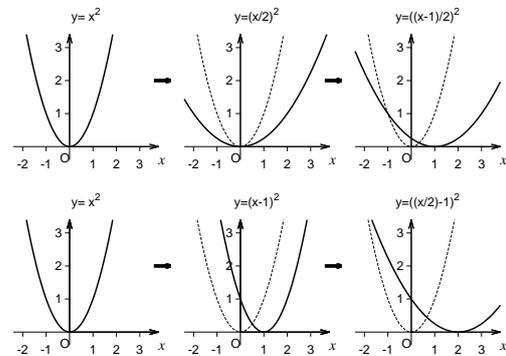


図 4.13  $y = x^2$  の 2 段階の変形。順序が違えば結果も違う。点線は  $y = x^2$ 。

答 79 図 4.14 参照。

- (1)  $y = 2x$  のグラフを上 ( $y$  軸方向に) 1 移動。
- (2)  $y = (x+1)^2 + 2$  だから,  $y = x^2$  のグラフを左 ( $x$  軸の負の方向) に 1, 上に 2 移動。
- (3)  $y = 1/x$  のグラフを上 ( $y$  軸の正の方向) に 2 移動。
- (4)  $y = 2 - 2/(x+1)$  だから,  $y = 1/x$  のグラフを縦に 2 倍し, 上下反転し, 左 ( $x$  軸の負の方向) に 1, 上に 2 移動。  $x = 0$  のときに  $y = 0$  となるので, 原点を通る。

答 80

- (1)  $y = 3x - 2$
- (2) 式 (4.22) より,  $y = 2(x+1) + 1$ ,  
すなわち  $y = 2x + 3$ 。
- (3) 式 (4.23) より,

$$y = \frac{-3-1}{4-2}(x-2) + 1 \quad (4.48)$$

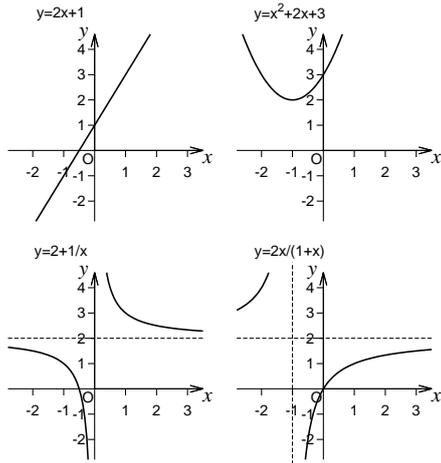


図 4.14 問 79 のこたえ。点線は漸近線。

すなわち  $y = -2x + 5$ 。

答 81

- (1) (32, 0) と (212, 100) を通る一次関数 (直線の式) を求めればよい。

$$y - 0 = \frac{100 - 0}{212 - 32}(x - 32) \quad \text{すなわち,}$$

$$y = \frac{5}{9}(x - 32) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$$

- (2)

$$x = \frac{9}{5}y + 32$$

- (3) 以下略

答 82 略。

答 83 略。

答 84 略。

答 85 略。

答 86

- (1) 左辺=0 の解は  $x = -3, 2$ 。  $\therefore -3 < x < 2$   
 (2) 左辺=0 の解は  $x = -3, -2$ 。  $\therefore x \leq -3, -2 \leq x$   
 (3) 左辺=0 の解は  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 。 よって,

$$x \leq \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \leq x$$

答 87

- (1) 左辺= $(x + 1/2)^2 + 3/4$ 。これは  $x$  がどんな実数値でも正の値をとる。従って、この不等式は、すべて

の実数値  $x$  について成り立つ。

- (2) 前問と同様に考えれば、この不等式はどんな実数値にも成り立たない (解を持たない)。  
 (3) (略解)  $x < -1, 1 < x$   
 (4) (略解) 解なし。  
 (5) (略解)  $x = 2$   
 (6) (略解) 全ての実数。  
 (7) (略解) 2 以外の全ての実数。

答 88 略。「グラフがなんとかに関して対称」とか書いてしまった人は、もっと真剣に本文を読もう!

答 89 グラフは図 4.15 参照。

- (1) 偶関数。  $y = (x+1)(2x+1)(2x-1)(x-1)$  なので、 $x$  軸との交点は  $x = -1, -1/2, 1/2, 1$ 。  $x \rightarrow \pm\infty$  で、  $y \rightarrow \infty$ 。  
 (2) どちらでもない。  $y = (1+x)x$  なので、 $x$  軸との交点は  $x = -1, 0$ 。  $y = (x + 1/2)^2 - 1/4$  なので、  $y = x^2$  のグラフを左に  $1/2$ 、下に  $1/4$  移動。  
 (3) 奇関数。  $y = -(x+1)x(x-1)$  なので、 $x$  軸との交点は  $x = -1, 0, 1$ 。  $x \rightarrow \infty$  で、  $y \rightarrow -\infty$ 。  $x \rightarrow -\infty$  で、  $y \rightarrow \infty$ 。(本文の例 4.9 の、  $y = x^3 - x$  のグラフ、つまり図 4.7 を、上下反転したものとも言える。)  
 (4) 偶関数。  $x \rightarrow \pm\infty$  で、  $y \rightarrow 0$ 。つまり  $x$  軸に漸近する。  $x = 0$  のとき  $y = 1$ 。ピークを尖らせたらダメ!

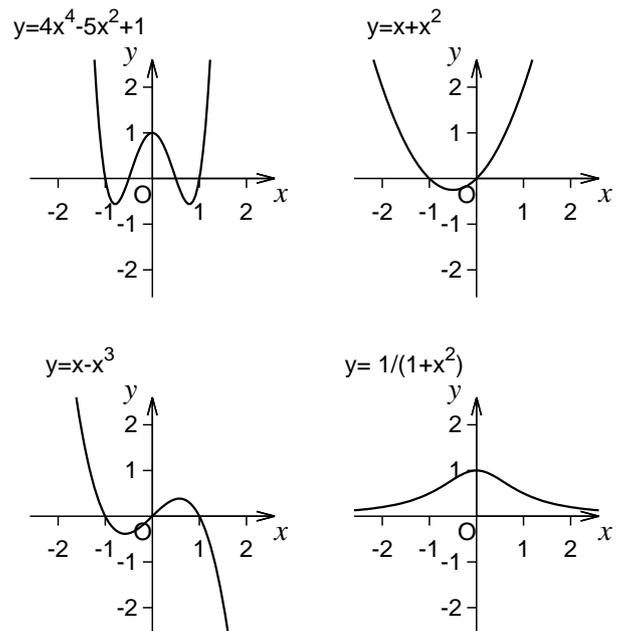


図 4.15 問 89 のこたえ。

答 90  $f_1(x), f_2(x)$  を任意の偶関数,  $g_1(x), g_2(x)$  を任意の奇関数とする。定義より,

$$\begin{aligned} f_1(-x) &= f_1(x), & f_2(-x) &= f_2(x) \\ g_1(-x) &= -g_1(x), & g_2(-x) &= -g_2(x) \end{aligned}$$

である。さて,

(1)  $F(x) = f_1(x)f_2(x)$  とすると,

$$F(-x) = f_1(-x)f_2(-x) = f_1(x)f_2(x) = F(x)$$

従って,  $F(x)$  は偶関数。 ■

(2)  $F(x) = g_1(x)g_2(x)$  とすると,

$$\begin{aligned} F(-x) &= g_1(-x)g_2(-x) = \{-g_1(x)\}\{-g_2(x)\} \\ &= g_1(x)g_2(x) = F(x) \end{aligned}$$

従って,  $F(x)$  は偶関数。 ■

(3)  $F(x) = f_1(x)g_1(x)$  とすると,

$$\begin{aligned} F(-x) &= f_1(-x)g_1(-x) = f_1(x)\{-g_1(x)\} \\ &= -f_1(x)g_1(x) = -F(x) \end{aligned}$$

従って,  $F(x)$  は奇関数。 ■

(4)  $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$  とすると,

$$F(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = F(x)$$

従って,  $F(x)$  は偶関数。 ■

(5)  $F(x) = g_1(x) + g_2(x)$  とすると,

$$\begin{aligned} F(-x) &= g_1(-x) + g_2(-x) = -g_1(x) - g_2(x) \\ &= -\{g_1(x) + g_2(x)\} = -F(x) \end{aligned}$$

従って,  $F(x)$  は奇関数。 ■

(6) 例えば偶関数  $y = 1$  と奇関数  $y = x$  の和:  $y = 1 + x$  は, 偶関数でも奇関数でもない。 ■

答 91 略解:  $f(-x) = f(x)$  となることは暗算でも確認できる。答は偶関数。注:  $f(-x) = f(x)$  を満たせば偶関数なのだから(それが定義), それを確認すれば十分である。グラフなど描く必要はない。

答 92  $g(f(x)) = 1 + x$  (ただし  $x \geq 0$ ),  $f(g(x)) = \sqrt{1 + x^2}$

答 93

(1)  $x$  と  $y$  を入れ替えると  $x = 2y + 1$ 。変形すると,  
 $y = (x - 1)/2$ 。

(2)  $x$  と  $y$  を入れ替えると  $x = 1/(y - 1)$ 。変形すると,  
 $y = 1 + 1/x$ 。

(3)  $x$  と  $y$  を入れ替えると  $x = a/y$ 。変形すると,  $y =$

$a/x$ 。

(4)  $x$  と  $y$  を入れ替えると  $x = -y + b$ 。変形すると,  
 $y = -x + b$ 。

注: (3), (4) では逆関数が自分自身になっていることに注意せよ。

答 94  $g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$ 。  $x$  は 0 以上だから, これは  $x$  に恒等的に等しい。また,  $f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$ 。

答 95 図 4.16 参照。

答 96 図 4.17 参照。

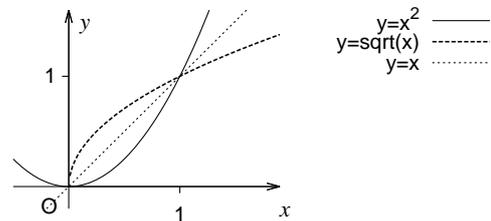


図 4.16 問 95 の答。図中, "sqrt(x)" とあるのは  $\sqrt{x}$  のこと。直線  $y = x$  に関して対称であることに注意。どの線も点 (1, 1) を通る。

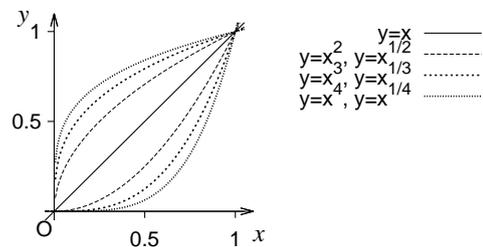


図 4.17 問 96 の答。  $y = x$  の上側にあるのが,  $x^{1/2}, x^{1/3}, x^{1/4}$ 。どの線も点 (1, 1) を通る。

答 97 三平方の定理より  $x^2 + y^2$  は, 原点から点  $(x, y)$  までの距離の二乗。与式より, これが  $r^2$  に常に等しいので, 原点から各点までの距離は常に  $r$  である。原点から一定距離  $r$  にある点の集合は, 原点を中心とする半径  $r$  の円である。 ■

答 98 原点中心, 半径 2 の円を表す陰関数は, 式 (4.41) で  $r = 2$  として,  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 。これを  $x$  方向に 3,  $y$  方向に  $-1$  だけ移動すると(例 4.20 より),  
 $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 - 4 = 0$ 。

## 第5章

# 微分

過去の受講生の言葉: 「わかってしすぎないと、いつのまにかわかり出す。」

### 5.1 微分の定義

これからいよいよ「微分」というのを学ぶ。まず微分の発想を説明しよう。何か関数  $y = f(x)$  を考える。そのグラフの形はどんなでもいいけど、図 5.1 のようになめらかに連続的につながっているとしよう。今、実数  $x_0$  を固定して考え、点  $(x_0, f(x_0))$  を点 P と名付ける。また、 $x_0$  に近い(けど  $x_0$  ではない)実数  $x$  を考え、 $(x, f(x))$  を点 Q と名付ける。

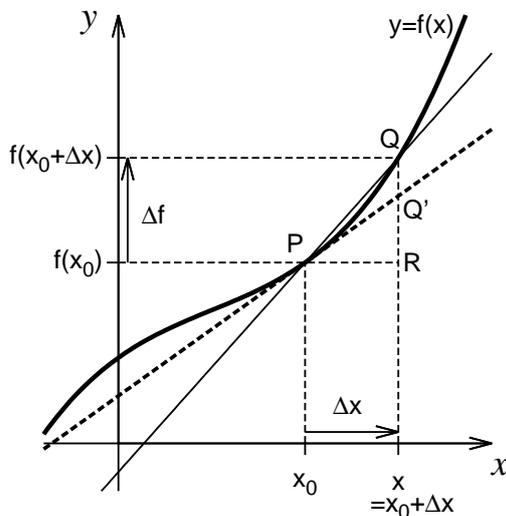


図 5.1 関数  $y = f(x)$  のグラフ (太い実線) と、点 P における接線のグラフ (太い点線), そして  $y = f(x)$  上の 2 点 P, Q を通る直線 (細い実線) のグラフ。

ここで、点 P における接線 (点 P でこの関数に接する直線; 図 5.1 の太い点線) を考えよう。その傾きを  $a$  とすると、この接線は点  $P(x_0, f(x_0))$  を通る、傾き  $a$  の直線なので、その関数は  $y = f(x_0) + a(x - x_0)$  となる。

さて、もし  $x_0$  と  $x$  との間隔が十分に狭ければ、そのあたりでは、この関数のグラフ (図 5.1 の太い実線) は、点 P における接線 (図 5.1 の太い点線) でざっくりと近似

できるだろう。すなわち、次式が成り立つだろう:

$$f(x) \doteq f(x_0) + a(x - x_0) \quad (5.1)$$

ここで“ $\doteq$ ”は、「ほぼ等しい」「近似的に等しい」という意味の記号だ。式 (5.1) の左辺は点 Q の  $y$  座標で、右辺は点 Q' の  $y$  座標だ。点 Q と点 Q' は微妙にズレているので、 $=$  でなく  $\doteq$  と書くのだ。

先回りしてざっくり言えば、微分というのは、この定数  $a$  (接線の傾き) のことだ。でも、そこには深くて微妙な話があるので、しばらく辛抱して続きを読んで欲しい。

慣習的に、 $x - x_0$  を  $\Delta x$  と書く。 $\Delta x$  は図 5.1 の PR の長さである\*1 ( $\Delta$  は P.16 で学んだ「デルタ」の大文字で、 $\Delta$  と  $x$  は別々の数ではなく、“ $\Delta x$ ” でひとつの数を表す)。そうすると、

$$x = x_0 + \Delta x \quad (5.2)$$

となる。式 (5.2) を使うと、式 (5.1) は、次のようになる:

$$f(x_0 + \Delta x) \doteq f(x_0) + a\Delta x \quad (5.3)$$

さて、 $x$  を  $x_0$  に限りなく近づければ (それは図 5.1 で R を P に近づけることに相当し、それに伴って点 Q や点 Q' も点 P に近づいていく)、 $\Delta x$  は限りなく 0 に近づくだらう。究極的には  $\Delta x$  は 0 になってしまいそうなのだが、その寸前で踏みとどまって、「0 ではないけれど、限りなく 0 に近い」という状態 (極限) を想定する。そのときの  $\Delta x$  を、慣習的に  $dx$  と書く\*2。この場合、式 (5.3) は、以下ようになる:

$$f(x_0 + dx) \doteq f(x_0) + a dx \quad (5.4)$$

ここで、もともと“ $\doteq$ ”だったところが“ $\doteq$ ”に変わってしまったことに注意しよう。というのも、 $\Delta x$  が 0 に近づくと、図 5.1 では、点 Q と点 Q' が、点 P でガチャんとぶつかりそうになるのではなく、互いに寄り沿いながら点 P に向かって行く。だから、式 (5.3) の左辺と右辺の

\*1 ただし R が P の左側にあるときはマイナスになる。

\*2  $d$  と  $x$  は別々の数ではなく、“ $dx$ ” でひとつの数を表している。

誤差は、 $\Delta x$  が 0 に近づくよりもずっと速く 0 に近づく。なので極限では、誤差は実質的に 0 になる、つまり” $\doteq$ ”だったところを” $=$ ”と書いてよい、と考えるのだ\*3。

この「限りなく 0 に近いけど 0 じゃない」というのは、一種、仮想的な状態である。その仮想的な微小量  $dx$  を、無限小 という。実際は、0 でない数は、0 との間に必ず有限な差が存在する。そのような現実の微小量を 有限小 という。上で書いた  $\Delta x$  が、有限小である。ちなみに、 $dx$  や  $\Delta x$  の” $d$ ”や” $\Delta$ ”は、”difference”を意味する\*4。つまり「差」とか「違い」である。 $x = x_0$  から「わずかに違うところ」として  $x = x_0 + dx$  とか  $x = x_0 + \Delta x$  に着目するのだ。

さて、式 (5.4) で、定数  $a$  を  $f'(x_0)$  と書く。これを  $f(x)$  の  $x = x_0$  における 微分係数 と定義する。すなわち、

#### 微分係数の定義 (1)

関数  $f(x)$  と微小量  $dx$  に関して、次式を満たす数  $f'(x_0)$  を、 $x = x_0$  における  $f(x)$  の微分係数と定義する：

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)dx \quad (5.5)$$

これを使えば式 (5.3) は次のように書ける：

$$f(x_0 + \Delta x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (5.6)$$

この式も、後々、重要になってくる。

さて、高校数学や数学類的な大学数学では、式 (5.5) とはちょっと違うスタイルで微分係数を定義する。それも説明しておこう。式 (5.5) を少し変形すると、

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} \quad (5.7)$$

となる。あるいは、有限小で書けば、

$$f'(x_0) \doteq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (5.8)$$

となる。ここで、 $\Delta x$  が限りなく 0 に近づく極限を以下のように書く：

#### 微分係数の定義 (2)

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (5.9)$$

ここで極限では  $\doteq$  が  $=$  になったかわりに、「極限である」ということを忘れないように、”lim”という記号 (P.50 で出てきた!) を前につけた。 $dx$  という記号を使うなら、”lim”は不要である。式 (5.9) は、高校数学の教科書に載っている、微分係数の定義である (高校教科書では  $\Delta x$  のかわりに  $h$  という記号が使われるのが普通)。

微分係数の定義として、式 (5.5) と、式 (5.9) は、同じである。これらの 2 つの式を、必ず記憶しよう。でなければ、ここから先の数学を学ぶのは無駄だよ!

問 99 式 (5.5) と式 (5.9) をそれぞれ 10 回ずつ書いて記憶せよ。

よくある質問 61 10 回ずつ書くなんでダルいです。... そうでもしないと、覚えてくれない人が多くてね...

よくある質問 62 微分係数の定義が覚えられません。... 10 回書いた? それでダメなら 20 回ね。

よくある質問 63 微分って、もっと難しいことかと思ったら、出てくるのは直線の式とか傾きとかだけですな... そうです。微分のアイデアはシンプル。直線 (1 次関数) を中学高校でさんざん勉強したのは、微分を理解する為でもあったのです。

問 100 関数  $g(x)$  の、 $x = a$  における微分係数の定義を述べよ。

さて、 $f(x_0 + dx)$  や  $f(x_0 + \Delta x)$  も、 $f(x_0)$  からみれば「わずかに違う」値であるので、これらと  $f(x_0)$  との差を、それぞれ  $df$  や  $\Delta f$  と書こう。すなわち、

$$df := f(x_0 + dx) - f(x_0) \quad (5.10)$$

$$\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (5.11)$$

と定義する。 $\Delta f$  は図 5.1 での線分 RQ である\*5。 $df$  とか  $\Delta f$  と書いてしまうと、なんだか独立した量のように見えてしまうが、定義から明らかなように、 $df$  は  $dx$  と、 $\Delta f$  は  $\Delta x$  と、それぞれ連動している。すると、式 (5.5) より、 $f(x_0 + dx) - f(x_0) = f'(x_0)dx$ 、つまり、

$$df = f'(x_0)dx \quad (5.12)$$

と書ける (式 (5.5) の右辺の  $f(x_0)$  を左辺に移項して式 (5.10) を使った)。この式 (5.12) が表すのは、「微小量

\*3 ただし、このあたり、厳密には論理的に微妙なことが多い。しかし初学者は、とりあえず  $\Delta x$  と  $dx$  や、この後に出てくる  $\Delta f$  と  $df$  は、それぞれ互いに「同じようなもの」とっておいてよい。形式的には、極限では  $\Delta$  が  $d$  になり、 $\doteq$  が  $=$  になるのだ。

\*4 ギリシャ文字の  $\Delta$  は、由来としては英語の D に相当する。

\*5 ただし Q が R より下にあるときはマイナスになる。

どうしは比例する」という考え方である。関数  $f(x)$  が複雑な関数であっても、微小量で考えるとそれは一次関数になり、微小な差  $df$  と  $dx$  は比例関係になり、その比例係数が微分係数なのだ。

一次関数や比例関係はシンプルだから扱いやすいので、難しい問題も、一次関数や比例関係の話に持ち込めばなんとかなる。そうするための武器が微分である。

よくある質問 64 一次関数や比例関係で表すことのメリットがよくわかりません ... もう少し辛抱してください。後に「積分」を学ぶと、それがわかります。微分と積分はセットの考え方なのです。

また、式 (5.7)、式 (5.8)、式 (5.9) は、それぞれ以下のようにも書ける：

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx} \quad (5.13)$$

$$f'(x_0) \doteq \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (5.14)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (5.15)$$

特に式 (5.13) の書き方はよく出てくる。この右辺を

$$\frac{d}{dx} f \quad (5.16)$$

と書くこともある。

式 (5.13) や式 (5.14) から明らかなように、 $f(x)$  に関する「わずかな違い」である  $df$  や  $\Delta f$  と、 $x$  に関する「わずかな違い」である  $dx$  や  $\Delta x$  との比 (の極限) が、微分係数である。それは、図 5.1 で言えば、線分 RQ を線分 PR で割ったもの、すなわち「縦方向の違い」を「横方向の違い」で割ったもの、すなわち、「直線 PQ の傾き」である。それは接線 (直線 PQ') の傾き (RQ'/PR) とは微妙に違う。しかし、 $\Delta x$  が十分に 0 に近ければ (R が十分に P に近ければ)、点 Q は点 Q' にずっと寄り添うように近づき、直線 PQ と直線 PQ' はほぼ重なるので、直線 PQ の傾きは接線の傾きに等しくなる、と考えるのだ。

さて、ここまでグラフのイメージを借りながら、微分の発想と定義を説明した。しかしここで強調したいことがある。それは「グラフのイメージに頼りすぎるな」ということである。微分の本質は、その定義である式 (5.5) や、式 (5.9) に全て込められている。それらは数式だけで組み立てられており、グラフからイメージされる「接線の傾き」のような言葉は全く出て来ない。要す

るに、グラフは話をわかりやすくするためだけで、本当はグラフなんか無くてもかまわないのだ。でも、初学者がいきなり式 (5.5) と、式 (5.9) だけで「これが微分係数だ!」と教えられても、理解できないから数学が嫌いになってしまう。それを避けるためにグラフを使ったのだ。

よくある質問 65 グラフは無意味ってことですか? ... 無意味とは言いません。グラフは、何かのアイデアの種を探したり、アイデアを組み立てたり、それを人に伝えるには有用です。でも、グラフにとらわれ過ぎると、発想が限定されてしまうのです。自転車の「補助輪」のようなものでしょうか。いずれはそれ無しで走れるようになるのが理想です。

結局、「微分とは接線の傾きである」と言ったらダメなんですか? ... 「定義」としてはダメです。数学の論理では、そもそも「接線」の定義に微分が必要なのです。「イメージ」としても、あえてグラフに頼らずに「微小量どうしの比例関係の比例係数」と考える方が、後々、便利です。無論、それはグラフで描けば「接線の傾き」ですが、グラフが描けない状況でも使えます。

微分と微分係数は同じもの? ... このへんは微妙で、同じものを指すことが多いです。本来は、微分とは、 $dx$  や  $df$  などの微小量のこと、微分係数は微小量同士の比例係数  $f'(x_0)$  です。でも、多くの本では、微分係数や、このあと学ぶ導関数のことを「微分」と言います。特に、「微分せよ」という指示は、ほぼ間違いなく、微分係数や導関数を求めよという意味です。

さて、関数  $f(x)$  の、様々な点における微分係数を集めてならべた関数を 導関数 (derivative) と呼び、 $f'(x)$  と書く。微分係数や導関数を求めることを「微分する」(differentiate) と言う。

では具体的にいくつかの関数を微分してみよう。以後、簡単のため、定義式 (5.5) の  $x_0$  を  $x$  と書き直す。

例 5.1 関数  $f(x) = 2x + 1$  を微分してみよう：

$$\begin{aligned} f(x + dx) &= 2(x + dx) + 1 \\ &= 2x + 1 + 2dx \\ &= f(x) + 2dx \end{aligned}$$

式 (5.5) と較べると、 $dx$  の係数が導関数  $f'(x)$  だから、

$$f'(x) = 2 \quad (5.17)$$

となる。(例おわり)

式 (5.17) は、以下のようにも書く：

$$(2x + 1)' = 2 \quad (5.18)$$

式 (5.18) の左辺のように、何かの関数の微分 (導関数) を表すには、その関数をカッコ ( ) で囲って、ダッシュ

(')をつける。あるいは、

$$\frac{d}{dx}(2x+1) = 2 \quad (5.19)$$

のように、微分したい関数の前に  $d/dx$  という記号を書いてもよい。

よくある質問 66 導関数と微分係数の違いがよくわかりません。... 導関数は関数。その1箇所での値が微分係数。たとえば例 5.2 で学ぶように、 $f(x) = x^2$  という関数の導関数は  $f'(x) = 2x$ 。そいつの  $x = 3$  での値  $f'(3) = 6$  が、「 $x = 3$  における微分係数」です。

問 101  $p, q$  を任意の定数とする。一次関数  $f(x) = px + q$  を微分すると、 $f'(x) = p$  となること、つまり

$$(px + q)' = p \quad (5.20)$$

を示せ。特に、定数関数  $y = q$  を微分すると、恒等的に 0 になること、つまり

$$(q)' = 0 \quad (5.21)$$

を示せ。

定数関数のグラフは、 $x$  軸と平行な直線なので、どの場所でも傾きは 0 である。そのことから、定数関数の導関数が恒等的に 0 であることが納得できるだろう。

また、一次関数  $px + q$  のグラフは、切片  $q$ 、傾き  $p$  の直線である。従って、どの場所でも傾きは  $p$  である。そのことから、 $px + q$  の導関数が恒等的に  $p$  であることが納得できるだろう。

例 5.2 関数  $f(x) = x^2$  を微分してみよう。

$$\begin{aligned} f(x+dx) &= (x+dx)^2 \\ &= x^2 + 2x dx + dx^2 \\ &= f(x) + 2x dx + dx^2 \end{aligned}$$

ここで、 $dx^2$  は、 $d \times x^2$  ではなく、 $(dx)^2$  である。というのも、既に述べたように、 $dx$  は  $d \times x$  ではなく  $dx$  のひとまとまりでひとつの数(微小量)を表すからだ。さて、 $dx$  は 0 に近い量なので、その 2 乗である  $dx^2$  は、さらに、はてしなく 0 に近いはずだ。そこで、この  $dx^2$  の項は無視しよう! そうすると、

$$f(x+dx) = f(x) + 2x dx \quad (5.22)$$

となる。式 (5.5) と較べると、 $dx$  の係数は  $2x$  だから、 $f'(x) = 2x$  となる。(例おわり)

この例の  $dx^2$  は無視するという考え方は極めて重要である。換言すれば、「 $\Delta x$  は無視できないが  $\Delta x^2$  は無視できる」くらいに  $\Delta x$  が 0 に近づく状況が、これまで述べてきた「 $\Delta x$  が限りなく 0 に近づく」ということ、つまり「 $\Delta x$  が  $dx$  になること」、つまり「極限」の、具体的な意味である。そのような状況では、多くの関数で、 $\Delta f$  と  $\Delta x$  が、単なる比例関係になる(とみなせる)。その比例係数が微分係数(または導関数)である。

よくある質問 67 「微分する」って、要するに  $dx$  の比例係数を求めること? ... ざっくりいえばそういうことです。関数を  $dx$  の 1 次関数で近似したときの、 $dx$  の比例係数を求めることです。中学校であんなに比例とか 1 次関数をさんざん勉強させられたのは、この伏線だったのです。

よくある質問 68 高校で「微分係数」を習った時は、一体どこが係数なのかと思っていましたが、本当に係数だったのですね... そうなんです。 $dx$  の係数が「微分係数」です。その発想を足がかりに、本書の後半では、微分をもっと広く拡張していきます。

よくある質問 69  $dx^2$  を 0 とする、等の基準がわからなくて使うのがこわいです ...  $dx$  と  $dx^2$  が混在している時は、 $dx^2$  は  $dx$  よりはるかに小さいので無視する、ということです。もし  $dx$  が 0.01 なら  $dx^2$  は 0.0001 になり、 $dx$  よりもはるかに小さいですよ(  $dx$  は限りなく 0 に近い微小量なので、このように具体的な値を例に挙げるのは本当は間違っているのですが)。

例 5.3 関数  $f(x) = x^n$  を微分してみよう ( $n$  は 1 以上の整数の定数)。二項定理 (P.36 の式 (3.33)) より、

$$\begin{aligned} f(x+dx) &= (x+dx)^n \\ &= {}_n C_0 x^n + {}_n C_1 x^{n-1} dx + {}_n C_2 x^{n-2} dx^2 + \dots \\ &= x^n + n x^{n-1} dx + {}_n C_2 x^{n-2} dx^2 + \dots \\ &= f(x) + n x^{n-1} dx + {}_n C_2 x^{n-2} dx^2 + \dots \quad (5.23) \end{aligned}$$

ここで  $dx^2$  以降の項は無視。式 (5.5) と較べると、 $dx$  の係数は  $n x^{n-1}$  だから、

$$f'(x) = n x^{n-1} \quad (5.24)$$

となる。(例おわり)

例 5.4 関数  $f(x) = 1/x$  を微分してみよう。まず、

$$f(x+dx) = \frac{1}{x+dx} \quad (5.25)$$

ここで、分子と分母の両方に  $x - dx$  を掛けると、

$$\begin{aligned} f(x + dx) &= \frac{x - dx}{(x + dx)(x - dx)} \\ &= \frac{x - dx}{x^2 - dx^2} \end{aligned} \quad (5.26)$$

ここで、分母の  $dx^2$  を無視すると、

$$\begin{aligned} f(x + dx) &= \frac{x - dx}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} dx \\ &= f(x) - \frac{1}{x^2} dx \end{aligned} \quad (5.27)$$

式 (5.5) と較べると、 $dx$  の係数は  $-1/x^2$  だから、

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad (5.28)$$

ところでこれは、式 (5.24) で  $n = -1$  とおいた場合に一致する。もともと式 (5.24) では、定数  $n$  を 1 以上の整数としたが、 $n = -1$  のときも成り立つことがわかった。(例おわり)

## 5.2 数値微分

これから具体的に関数を微分する方法を学ぶのだが、まず、計算機で微分するやり方を学ぼう。それを「数値微分」という。数値微分は原理が単純で、微分のアイデアを理解するのに良い題材だ。また、実際に世の中で数値微分は様々な場で使われている。というわけで、微分の勉強はまず計算機から入るのだ。

式 (5.9) で学んだように、微分は次式で定義される：

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (5.29)$$

実際は、 $\Delta x$  が「限りなく 0 に近く」なくても、ある程度まで 0 に近づければ、このリミットを無視しても、そこそこ正確に計算できるだろう：

$$f'(x) \doteq \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (5.30)$$

これが、計算機に微分をやらせるときの考え方である。すなわち、 $f(x)$  について隣り合うセルどうしの引き算をして  $(f(x + \Delta x) - f(x))$ 、それを  $x$  について隣り合うセルどうしの引き算 (つまり  $\Delta x$ 、つまり刻み幅) で割ればよい。

例えば  $f(x) = x^2$  を微分してみよう。スプレッドシートで、 $x$  の値を  $-1$  から  $1$  まで  $0.05$  刻みで A 列に与え、

$f(x)$  の値を B 列に与える：

	A	B	C
1	x	f(x)=x ^ 2	f'(x)
2	-1	1	
3	-0.95	0.9025	
4	-0.9	0.81	
5	-0.85	0.7225	
...	...	...	

ここで右端の列 (C 列) で微分  $f'(x)$  を計算するには、セル C2 に、「=(B3-B2)/(A3-A2)」という式を書き込む。ここで B3-B2 というのは  $f(x + \Delta x) - f(x)$  に相当し、A3-A2 というのが  $\Delta x$  に相当する。厳密には、このような計算式で与えられる微分の値 (つまり微分係数) は、 $x = -1$  のときではなく、 $x = -1$  と  $x = -0.95$  の中間付近だが、どうせ  $x$  の刻み ( $\Delta x = 0.05$ ) は小さいから、あまり気にしない。気になるなら、刻みをもっと小さくとればよい。

そして、C2 セルの内容を、C3 以降の C 列全体にコピーペーストすれば、C 列に、近似的ではあるが、 $f'(x)$  ができあがる。こうして計算機で関数の微分を近似的に行うことを、数値微分 と呼ぶ。

問 102 表計算ソフトで、関数  $f(x) = x^2$  を、 $-1 \leq x \leq 1$  の範囲で数値微分し、その結果を、 $f(x)$  と、解析的<sup>\*6</sup>な微分結果  $f'(x) = 2x$  とともに、グラフに描け。 $\Delta x$  は各自で適当に定めよ。結果は図 5.2 のようになる。

## 5.3 微分の公式

実際に関数を微分するときは、微分係数 (導関数) の定義式 (5.5) に遡ってやることは少ない。複雑な関数の場合は前節でやったように数値微分を使うし、そうでなければ、以下に示すような、いくつかの便利な定理 (公式) を活用してちゃちゃとやってしまうのだ。以下、 $f(x), g(x)$  を、任意の (微分可能な) 関数とする。

<sup>\*6</sup> 理論的に厳密な計算 (式変形) で答えを導くことを 解析的 という。「数値的」の対義語である。

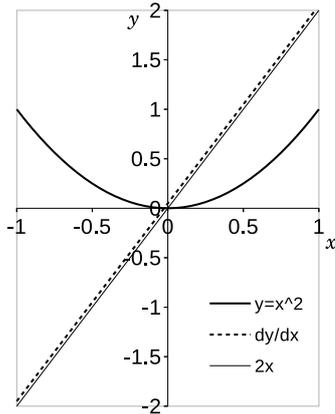


図 5.2  $y = x^2$  とその数値微分 ( $dy/dx$ ), そして  $y = 2x$ .  $x$  の刻みは 0.05. 数値微分と  $y = 2x$  は, 刻みを小さくすればもっと近くなる。例 5.2 の結論を数値微分でも確認できた!

微分の公式 1: 足し算はバラせる

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x) \quad (5.31)$$

証明:  $F(x) = f(x) + g(x)$  とおくと,

$$\begin{aligned} F(x + dx) &= f(x + dx) + g(x + dx) \\ &= f(x) + f'(x)dx + g(x) + g'(x)dx \\ &= f(x) + g(x) + \{f'(x) + g'(x)\}dx \\ &= F(x) + \{f'(x) + g'(x)\}dx \end{aligned} \quad (5.32)$$

ここで,  $dx$  の係数に着目すると, 微分係数の定義から,  $F'(x) = f'(x) + g'(x)$ . ■

例 5.5  $f(x) = x^2 + 2x$  を微分しよう。公式 1 を使うと,

$$f'(x) = (x^2 + 2x)' = (x^2)' + (2x)' \quad (5.33)$$

となる。例 5.2 から,  $(x^2)' = 2x$  であり, 式 (5.20) から,  $(2x)' = 2$  である。従って,

$$f'(x) = 2x + 2 \quad (5.34)$$

となる。(例おわり)

微分の公式 2: 定数倍は前に出せる

$a$  を定数として,

$$\{af(x)\}' = af'(x) \quad (5.35)$$

証明:  $F(x) = af(x)$  とおくと,

$$\begin{aligned} F(x + dx) &= af(x + dx) = a\{f(x) + f'(x)dx\} \\ &= af(x) + af'(x)dx \\ &= F(x) + af'(x)dx \end{aligned} \quad (5.36)$$

ここで,  $dx$  の係数に着目すると, 微分係数の定義から,  $F'(x) = af'(x)$ . ■

微分の公式 1 と 2 のような性質は, 数列の和  $\Sigma$  にもあったこと (P.42) を覚えているだろうか? (線型性)

例 5.6  $f(x) = 3x^2$  を微分しよう。公式 2 を使うと,

$$f'(x) = (3x^2)' = 3(x^2)' \quad (5.37)$$

となる。例 5.2 から,  $(x^2)' = 2x$  である。従って,

$$f'(x) = 3(2x) = 6x \quad (5.38)$$

となる。(例おわり)

例 5.7 関数  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$  を微分しよう。公式 1, 公式 2 より,

$$f'(x) = (x^3)' + 2(x^2)' + 3(x)' + (1)' \quad (5.39)$$

ここで, 右辺の  $(1)'$  とは定数関数 1 (すべての  $x$  に対して定数 1 を対応させる関数) の微分であり, 式 (5.21) より, もちろん 0 である。 $(x^3)'$  や  $(x^2)'$ ,  $(x)'$  に式 (5.24) を使うと,

$$= 3x^2 + 4x + 3 \quad (5.40)$$

(例おわり)

問 103 以下の関数を微分せよ:

- (1)  $f(x) = x^2 + x + 1$
- (2)  $f(x) = 4x^2 + 5x + 6$
- (3)  $f(x) = 3x^2 + 3x + 4$
- (4)  $f(x) = 5/x$  (ヒント: 例 5.4 を使う)
- (5)  $f(x) = x - 1/x$

## 微分の公式 3: 積の微分

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (5.41)$$

証明:  $F(x) = f(x)g(x)$  とおくと,

$$\begin{aligned} F(x+dx) &= f(x+dx)g(x+dx) \\ &= \{f(x) + f'(x)dx\}\{g(x) + g'(x)dx\} \\ &= f(x)g(x) + f'(x)g(x)dx \\ &\quad + f(x)g'(x)dx + f'(x)g'(x)dx^2 \end{aligned}$$

ここで,  $dx^2$  を無視し, さらに,  $dx$  の項を整理し, また,  $f(x)g(x)$  を  $F(x)$  で置き換えると,

$$F(x+dx) = F(x) + \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx$$

$dx$  の係数に着目すると, 微分係数の定義から,

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (5.42)$$

■

例 5.8 関数  $F(x) = (x^2 + 2)(x^2 + x + 3)$  を微分しよう。  $f(x) = x^2 + 2$ ,  $g(x) = x^2 + x + 3$  として, 公式 3 を使うと,

$$\begin{aligned} F'(x) &= (x^2 + 2)'(x^2 + x + 3) + (x^2 + 2)(x^2 + x + 3)' \\ &= 2x(x^2 + x + 3) + (x^2 + 2)(2x + 1) \\ &= 4x^3 + 3x^2 + 10x + 2 \end{aligned} \quad (5.43)$$

となる。一方, 先に因数を展開してしまつて,

$$\begin{aligned} F'(x) &= (x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x + 6)' \\ &= (x^4)' + (x^3)' + 5(x^2)' + 2(x)' + (6)' \\ &= 4x^3 + 3x^2 + 10x + 2 \end{aligned} \quad (5.44)$$

とすることもできる。どちらのやりかたでやっても, 答えは一致する。このように, 数学は色々なやり方で正解に到達できるものなのだ。(例おわり)

問 104 以下の関数:

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x - 2) \quad (5.45)$$

について,

- (1) 2つの関数:  $x^2 + x + 1$  と  $x^2 - x - 2$  の積とみなして, 積の微分の公式を使って微分せよ。
- (2) 因数を展開して(つまり掛け算を実行してカッコを外して)から微分し, 前小問の結果と一致することを確認せよ。

「関数  $f(x)$ 」などの  $(x)$  を省略して書くことがよくある。式が単純になって見やすいし覚えやすい。公式 1, 2, 3 は, それぞれ以下ようになる:

$$(f + g)' = f' + g' \quad (5.46)$$

$$(af)' = af' \quad (5.47)$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (5.48)$$

さて, 多くの学生がつまずくのが次の公式である。といっても, しっかり説明を読めば難しくないはずだ。

## 微分の公式 4: 合成関数の微分

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x) \quad (5.49)$$

注: ここで  $g'(f(x))$  は,  $g(x)$  の導関数  $g'(x)$  の  $x$  の部分に  $f(x)$  を代入したものであり,  $g(f(x))$  の導関数ではない。

証明の前に例を示す:

例 5.9 関数  $(x^2 + 1)^3$  を微分しよう。この関数を, 「 $g(x) = x^3$  という関数の  $x$  の部分に,  $f(x) = x^2 + 1$  という関数を入れたもの」とみなす。  $g'(x) = 3x^2$  だから, 公式 4 より,

$$\begin{aligned} \{(x^2 + 1)^3\}' &= \{(f(x))^3\}' = 3(f(x))^2 f'(x) \\ &= 3(x^2 + 1)^2 \{(x^2 + 1)'\} = 3(x^2 + 1)^2 (2x) \\ &= 6x(x^2 + 1)^2 \end{aligned} \quad (5.50)$$

となる。これで完了としてよいのだが, ここではあえて式 (5.50) を展開すると,

$$6x^5 + 12x^3 + 6x \quad (5.51)$$

となる。一方,  $(x^2 + 1)^3$  を先に展開してから微分すると,

$$\begin{aligned} \{(x^2 + 1)^3\}' &= (x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1)' \\ &= 6x^5 + 12x^3 + 6x \end{aligned} \quad (5.52)$$

となる。式 (5.51), 式 (5.52) は一致している(つじつま合っている)。(例おわり)

この例は別に公式 4 を使わなくても, 式を展開してから普通に微分すれば解けた。しかし, 次の例のように, 公式 4 がどうしても必要になる場面もたくさんある:

例 5.10 次の関数を微分しよう。

$$\frac{1}{2x^2 + 1} \quad (5.53)$$

$f(x) = 2x^2 + 1$ ,  $g(x) = 1/x$  として, 公式 4 を使おう。

式 (5.28) より  $g'(x) = -1/x^2$  である。従って、

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{2x^2+1} \right\}' &= -\frac{1}{(f(x))^2} \times f'(x) \\ &= -\frac{1}{(2x^2+1)^2} \times (2x^2+1)' \\ &= -\frac{4x}{(2x^2+1)^2} \end{aligned} \quad (5.54)$$

となる。(例おわり)

実際には、こういうふうに  $g(x)$  や  $f(x)$  をわざわざ作ったりしないで、頭の中でまず  $2x^2+1$  をひとつの変数とみなして全体を微分し、さらに  $2x^2+1$  を  $x$  で微分して掛け合わせ、いきなり式 (5.54) の最後の行を暗算で導出できるようになるのが望ましい。最初は難しいかもしれないが、慣れるまで練習しよう。

では公式 4 を証明しよう:  $F(x) = g(f(x))$  とおくと、

$$\begin{aligned} F(x+dx) &= g(f(x+dx)) \\ &= g(f(x) + f'(x)dx) \end{aligned} \quad (5.55)$$

ここで、 $dx$  は 0 に限りなく近い微小量なので、それに  $f'(x)$  を掛けた数、すなわち  $f'(x)dx$  も、0 に限りなく近い微小量とみなすことができる。そこで、微分係数の定義式 (5.5) において、 $f(x)$  を  $g(x)$  とし、 $x_0$  を  $f(x)$  とし、 $dx$  を  $f'(x)dx$  とすれば、

$$g(f(x) + f'(x)dx) = g(f(x)) + g'(f(x))\{f'(x)dx\} \quad (5.56)$$

となる。右辺第一項の  $g(f(x))$  は、もちろん  $F(x)$  である。従って、式 (5.55) 式 (5.56) より、

$$F(x+dx) = F(x) + g'(f(x))f'(x)dx \quad (5.57)$$

$dx$  の係数に着目すると、微分係数の定義から、

$$F'(x) = g'(f(x))f'(x). \quad \blacksquare$$

この公式は、一見、複雑そうに見えるが、式 (5.13) のような書き方を使うと、

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \frac{df}{dx} \quad (5.58)$$

と表せる。右辺に現れる 2 つの微分の掛け算を、形式的に、微小量  $dg$ ,  $df$ ,  $dx$  の分数の掛け算とみなせば、右辺を約分したものが左辺になるだけだ。

問 105 以下の関数を、合成関数の微分の公式を使って微分せよ:

- (1)  $F(x) = (3x^2 + 2)^3$
- (2)  $F(x) = (x^2 + x + 1)^3$
- (3)  $F(x) = (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2$
- (4)  $F(x) = (1 + 1/x)^2$

問 106 関数  $u(x)$  の逆数であらわされる関数  $1/u(x)$  の導関数は、以下で与えられることを示せ\*7:

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (5.59)$$

ヒント:  $g(x) = 1/x$ ,  $f(x) = u(x)$  として公式 4 を使う。

問 107 関数  $v(x)$  と  $u(x)$  の比で作られる関数  $v(x)/u(x)$  の導関数は、以下で与えられることを示せ:

$$\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{v'u - vu'}{u^2} \quad (5.60)$$

問 108 以下の関数を微分せよ:

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (2) \quad f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

ヒント: (1) では  $u(x) = 1+x^2$  として式 (5.59) を使う。(2) では  $u(x) = 1+x^2$ ,  $v(x) = x$  として式 (5.60) を使う。

例 5.11  $1/x^n$  を微分してみよう ( $n$  は 1 以上の整数の定数とする)。この関数は、

$$g(x) = x^n \quad \text{と} \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

の合成関数とみなせる。実際

$$g(f(x)) = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n} \quad (5.61)$$

となる。ところで、式 (5.24) より  $g'(x) = nx^{n-1}$  であり、例 5.4 より  $f'(x) = -1/x^2$  だから、式 (5.49) より、次式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^n}\right)' &= n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{n}{x^{n+1}} \end{aligned} \quad (5.62)$$

\*7 式 (5.59), 式 (5.60) では関数  $u(x)$  の「 $(x)$ 」を省略して書いていることに注意せよ。

式 (5.62) は次のように書き換えられる。

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1} \quad (5.63)$$

これは、式 (5.24) で  $n$  を  $-n$  と置き換えたものに一致する。もともと式 (5.24) では、 $n$  を 1 以上の整数としたが、これで、定数  $n$  が負の整数のときも成り立つことがわかった。

次に学ぶ公式は、公式 4 の応用だ。これは P.9 で学んだ対数を微分したりするのに使う（その話は後の章に出てくる）。

微分の公式 5: 逆関数の微分

$g(x)$  を  $f(x)$  の逆関数とすると

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad (5.64)$$

注: ここで  $f'(g(x))$  は、 $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  に  $g(x)$  を代入したものだ。  $f(g(x))$  の導関数ではない。

証明:

合成関数の微分より、

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x) \quad (5.65)$$

である。ところで、 $g(x)$  は  $f(x)$  の逆関数なので、P.59 の式 (4.38) より、恒等的に  $f(g(x)) = x$  である。従って、

$$\{f(g(x))\}' = (x)' = 1 \quad (5.66)$$

式 (5.65) と式 (5.66) より、

$$f'(g(x))g'(x) = 1 \quad (5.67)$$

この両辺を  $f'(g(x))$  で割れば、

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad (5.68)$$

となり、式 (5.64) に一致する。 ■

例 5.12  $f(x) = x^{1/n}$  を微分してみよう。ただし  $n$  は 1 以上の整数とする。 $g(x) = x^n$  とすると、 $g(f(x)) = x$  だから、 $g(x)$  と  $f(x)$  は互いに逆関数。一方、 $g'(x) = nx^{n-1}$  である。式 (5.64)(逆関数の微分) より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{n(f(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} \\ &= \frac{1}{nx^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}x^{-(n-1)/n} \\ &= \frac{1}{n}x^{(1-n)/n} = \frac{1}{n}x^{(1/n)-1} \end{aligned} \quad (5.69)$$

(例おわり)

式 (5.69) は、式 (5.24) で  $n$  を  $1/n$  と置き換えたものに一致する。これで、式 (5.24) は、定数  $n$  が正の整数の逆数のときも成り立つことがわかった。

式 (5.24)、式 (5.63)、式 (5.69) からわかったように、定数  $\alpha$  が正の整数または負の整数または正の整数の逆数のとき、

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (5.70)$$

が成り立つ。そのことと合成関数の微分の公式を使えば、 $\alpha$  が負の整数の逆数のときや、0 以外の有理数 (整数どうしの比であらわされる数) のときもこれが成り立つことが証明できる。実数は有理数の極限としてあらわされるので<sup>\*8</sup>、有理数で成り立てば、実数でも成り立つ。従って、以下の公式が成り立つ：

微分の公式 6: べき関数の微分

定数  $\alpha$  が 0 以外の実数であれば、

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (5.71)$$

例 5.13 もういちど関数  $f(x) = 1/x$  を微分してみよう。 $1/x = x^{-1}$  だから、式 (5.71) で  $\alpha = -1$  とすれば、

$$f'(x) = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad (5.72)$$

これは式 (5.28) と一致する。つじつまがっている。

(例おわり)

例 5.14  $\sqrt{x}$  を微分してみよう。

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (5.73)$$

(例おわり)

問 109 公式 6 を使って、以下の関数を微分せよ。

(1)	(2)	(3)	(4)
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$x^{2/3}$	$x^{-5}$

問 110 微分の公式 1~5 を証明せよ。

<sup>\*8</sup> このあたりは高度な数学になるので、詳細はわからなくてもよい。

微分の計算は、とにかくたくさん練習して、規則性を体に染み込ませよう。微分の定義はとても大切だけど、実際の関数を手計算で微分するときは、微分の定義よりもむしろ、これまで見てきたようないろいろな公式を機械的に適用するのだ。

例 5.15  $\sqrt{x^2+1}$  を微分してみよう。 $g(x) = \sqrt{x}$  と  $f(x) = x^2 + 1$  の合成関数  $g(f(x))$  とみなして、

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2+1})' &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times (x^2+1)' \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned} \quad (5.74)$$

(例おわり)

例 5.16  $x\sqrt{x^2+1}$  を微分してみよう。

$$\begin{aligned} (x\sqrt{x^2+1})' &= x'\sqrt{x^2+1} + x(\sqrt{x^2+1})' \\ &= \sqrt{x^2+1} + x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned} \quad (5.75)$$

最初の変形では積の微分 (公式 3) を使った ( $x$  と  $\sqrt{x^2+1}$  の積)。それ以降は式 (5.74) の結果を使った。(例おわり)

よくある間違い 20 微分記号を省略し、微分する前の関数と微分した後の関数をイコールで結んでしまう。例えば、 $(x^2+x)' = 2x+1$  と書くべきところを、 $x^2+x = 2x+1$  と書いてしまう。

問 111 微分の公式を駆使して、以下の関数を微分せよ:

(1)	(2)	(3)
$\sqrt{2x+3}$	$\sqrt{1-x^2}$	$x^2\sqrt{1+x^2}$
(4)	(5)	(6)
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{1+\sqrt{x}}$	$\sqrt{1+\frac{1}{x}}$
(7)	(8)	
$\frac{x-1}{x+1}$	$\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$	

## 5.4 線型近似

式 (5.6) で述べたように、関数  $f(x)$  の、 $x = x_0$  における微分係数  $f'(x_0)$  は、

$$f(x_0 + \Delta x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (5.76)$$

を満たす。 $\Delta x$  が 0 に近ければ近いほど、近似等号“ $\doteq$ ”は等号“ $=$ ”に近づくのだが、たとえ有限小の  $\Delta x$  についても  $f(x_0 + \Delta x)$  を、この右辺の式で置き換え、ざっくりと近似することがよくある。これを関数の線型近似 (一次近似) という。要するに、関数を一次式で近似するのだ。グラフで言えば、曲線を、その接線で近似するのだ。

よくある質問 70 それって、数値微分の考え方に似てませんか? ... そうです。というより、数値微分は、線型近似の考え方を使っているのです。

線型近似は誤差が出てしまうが、多少の誤差は OK という状況で式や計算を単純化したいときにとても便利である。

特に、 $x_0 = 0$  とし、0 に近い範囲でしか  $x$  を考えないという前提で、 $\Delta x$  を  $x$  と置き換えることで、

$$f(x) \doteq f(0) + f'(0)x \quad (5.77)$$

となる。実用上は、このタイプの近似式が、よく使われる。では実際に線型近似をやってみよう。

例 5.17  $f(x) = \sqrt{1+x}$  を線型近似する:

$f'(x) = 1/(2\sqrt{1+x})$  なので、 $f(0) = 1$ 、 $f'(0) = 1/2$ 。これを式 (5.77) に入れると、 $x = 0$  付近で

$$\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{x}{2} \quad (5.78)$$

となる。試しに、実際にいくつかの値を計算してみよう。

$\sqrt{1.1} = 1.04880\dots$  だが、式 (5.78) より、 $\sqrt{1.1} = \sqrt{1+0.1} \doteq 1 + 0.1/2 = 1.05$ 。

$\sqrt{1.01} = 1.04987\dots$  だが、式 (5.78) より、 $\sqrt{1.01} = \sqrt{1+0.01} \doteq 1 + 0.01/2 = 1.005$ 。(例おわり)

問 112  $x = 0$  付近で、以下の式が成り立つことを示せ (ただし  $a$  は任意の実数)。

$$(1+x)^a \doteq 1 + ax \quad (5.79)$$

式 (5.79) の形の線型近似はとてもよく使われる。

問 113 以下の関数を、 $x = 0$  付近で線型近似せよ:

(1)  $1/(1+x)$     (2)  $1/(1-x)$     (3)  $1/\sqrt{1+x}$

式 (5.79) を利用すると、多くの計算を (近似的にだが) 簡単にできる。

例 5.18  $(1.01)^{10}$  の近似値を求めよう。これがもし  $1^{10}$  なら楽である。そこで、 $1.01 = 1 + 0.01$  というふう  
に考える:  $(1 + 0.01)^{10} \approx 1 + 10 \times 0.01 = 1.1$   
正確には  $(1.01)^{10} = 1.1046 \dots$  であり、有効数字 3 桁まで合っている。

例 5.19  $\sqrt{26}$  の近似値を求めよう。2 乗して 26 に近い数は何かな? と考えると、 $5^2 = 25$  である。そこで、 $26 = 25 + 1$  と考える。

$$\begin{aligned}\sqrt{26} &= \sqrt{25 + 1} = \sqrt{25 \left(1 + \frac{1}{25}\right)} = 5\sqrt{1 + \frac{1}{25}} \\ &\approx 5 \left(1 + \frac{1}{50}\right) = 5.1\end{aligned}$$

正確には  $\sqrt{26} = 5.0990 \dots$  であり、有効数字 3 桁まで合っている (4 桁目を四捨五入すると一致する)。この式展開で、25 を先に  $\sqrt{\quad}$  の外に追い出し、 $\sqrt{\quad}$  の中を  $1 + 1/25$  の形にしたところがコツなのだ。1/25 は 0 にそこそこ近いので、式 (5.79) が使えたのだ。このように、まずざっくり簡単な近似値 (この場合は 5) を勘で見つけることが大事。それをもとに、線型近似で精度を上げるのだ。(例おわり)

問 114 線型近似を利用して、以下の値を近似的に求めよ (電卓を使わないで筆算で。できれば暗算で!):

- (1)  $(0.99)^{10}$  (正確には  $0.9043 \dots$  となる)
- (2)  $10^{1/3}$  (正確には  $2.1544 \dots$  となる)

## 5.5 高階導関数

ところで、関数  $f(x)$  を、2 回続けて微分することを考えよう。それを、2 階微分 とか 2 階導関数 (「回」ではなく「階」という字を使う) と呼び、 $f''(x)$  と書く (定義)。2 階導関数  $f''(x)$  は、式 (5.16) の書き方で書けば、

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) \quad (5.80)$$

とも書けるので、形式的に縮めて、

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \quad \text{とか、} \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x) \quad \text{とか、} \quad \frac{d^2 f}{dx^2}$$

と書くこともある。分母と分子で「2 乗」のつく位置が異なることに注意。

これと同様に考えて、「3 階導関数」「4 階導関数」... 「 $n$  階導関数」など ( $n$  は 1 以上の整数) も考えることができ、それらはまとめて 高階導関数 と呼び、

$$f^{(n)}(x) \quad (5.81)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad (5.82)$$

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) \quad (5.83)$$

$$\frac{d^n f}{dx^n} \quad (5.84)$$

などを書く。独立変数  $x$  やその値が文脈上、明らかであれば、式 (5.84) のように、 $(x)$  は省略してもかまわない。式 (5.81) については、 $n$  個のダッシュ「'」を書きたいところだが、 $f''''''(x)$  とか書くのは格好が悪いので、3 階以上になったら、(3) とか ( $n$ ) というふうを書く。

問 115 以下の関数について、 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ 、 $f^{(3)}(x)$  をそれぞれ求めよ。

- (1)
- (2)

$$f(x) = x^5 + 2x^3 \qquad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

よくある質問 71  $d^2x/dt^2$  の、 $dt^2$  や  $d^2x$  はどういう状態? ... 既に述べたように、 $dt^2$  は  $dt$  かける  $dt$  です。 $d^2x$  は、 $t$  が 2 段階で変化するときの「 $x$  の変化の変化」と思えばよろしい。つまり、 $t$  が  $t + dt$  に変化した時の  $dx$  と、 $t$  が  $t + dt$  から  $t + 2dt$  に変化した時の  $dx$  との差 (後者引く前者) が  $d^2x$  です。丁寧に書くと、 $d(dx)$  です。 $dx$  自体が微小量だから、微小量どうしの差はすごく小さい微小量になるということが直感できるでしょう。 $dt^2$  や  $d^2x$  を「2 次の微小量」と言います。2 次の微小量は  $dt$  や  $dx$  という 1 次の微小量よりはるかに小さいので、普通、無視します (0 とみなします) が、この場合は、2 次の微小量どうしの比を考えているので、無視できないのです。

ところで、高校で、 $dx/dt$  はそれ全体でひとつの記号であり、「 $dx$  わる  $dt$ 」ではない、と習った人もいるでしょう。厳密な数学はそのような立場です。しかし、生物資源学類が関わる多くの応用的な学問では、 $dx/dt$  を「 $dx$  わる  $dt$ 」と考えてほとんど差し支えないし、その方が理解も応用もしやすいので、この授業ではその立場をとります。

## 5.6 微分ができない場合

ここまで読んで、君は、どんな関数でも微分できるような気がしているかもしれない。でも、世の中には微分ができない (導関数や微分係数が存在しない) 場合もた

くさんある。

例 5.20 以下の関数

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (5.85)$$

は、 $x = 0$  以外では微分できて、導関数は  $f'(x) = -1/x^2$  だ。では  $x = 0$  では微分できるだろうか？ そもそも微分の定義である式 (5.5) や式 (5.9) に戻ると、微分を考えるには  $f(x_0)$  の値が必要だ。今は  $x_0 = 0$  を考えているので  $f(0)$  が必要。でもこの関数に  $f(0)$  は存在しない ( $0$  での割り算は禁じ手である。  $1/0 = \infty$  だと思っている人もいるだろうが、 $\infty$  というのは数ではないのだ)。なので、この関数は  $x = 0$  では微分できない。(例おわり)

この例 5.20 では、微分したい位置でそもそも関数の値が定まっていなかった。そういう場合、微分はできない。分数で表される関数で分母が  $0$  になるときにこのような状況になることが多い。

例 5.21 以下の関数

$$f(x) = |x| \quad (5.86)$$

の微分を考えよう。これは、

$$f(x) = \begin{cases} -x & (x < 0 \text{ のとき}) \\ x & (0 \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

ということだ。従って、導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (0 \leq x \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5.87)$$

だと思うかもしれない。これはおおむね正しいが、 $x = 0$  のところで間違っているのだ。微分の定義である式 (5.5) に戻ってみよう (式 (5.9) に戻っても結論は同じ)。  $x_0 = 0$  とすれば、式 (5.5) は

$$f(0 + dx) = f(0) + f'(0)dx \quad (5.88)$$

となる。ここで式 (5.86) より、 $f(0) = 0$  だから、式 (5.88) は

$$f(dx) = f'(0)dx \quad (5.89)$$

となる。もし、式 (5.87) が正しければ、 $f'(0) = 1$  となり、従って式 (5.89) は

$$f(dx) = dx \quad (5.90)$$

となるはず。ところが  $dx$  は  $0$  に近い任意の微小量なので、 $dx < 0$  となる場合もあるだろう。その場合、式 (5.90) から、 $f(dx) < 0$  となる。ところが式 (5.86) よ

り、この関数は決して負の値をとることはあり得ない。従って矛盾する。従って、式 (5.87) は  $x = 0$  で正しくない<sup>\*9</sup>。同様に考えれば、 $f'(0)$  をどのような値にしても矛盾が生じることがわかるだろう。従って、 $f'(0)$  は存在しない、すなわちこの関数は  $x = 0$  では微分できない。(例おわり)

この例 5.21 で出てきた式 (5.86) のグラフを図 5.3 に示す。微分したい位置 ( $x = 0$ ) で、グラフが尖っている。詳細は省くが、一般に、グラフが尖っている箇所では、関数は微分不可能である。式に絶対値記号が入っていて、絶対値記号の内側が  $0$  になるときにこういう状況になることが多い<sup>\*10</sup>。

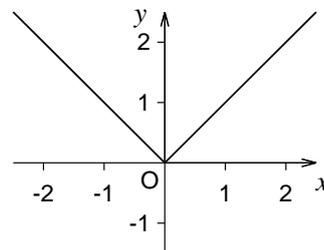


図 5.3 関数  $y = |x|$  のグラフ。  $x = 0$  で微分不可能 (尖っている)。

例 5.22 以下の関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (0 \leq x \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5.91)$$

の微分を考えよう。定数関数の微分は  $0$  だから、

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (0 \leq x \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5.92)$$

つまり、 $f'(x) = 0$  のように思うかもしれない。これも、おおむね正しいが、 $x = 0$  のところで間違っているのだ！ 再び微分の定義である式 (5.5) に戻って考えてみよう。  $x_0 = 0$ 、 $f(x_0) = f(0) = 1$  とすれば、式 (5.5) は

$$f(dx) = 1 + f'(0)dx \quad (5.93)$$

となる。もし、式 (5.92) が正しければ、 $f'(0) = 0$  となり、従って式 (5.93) は

$$f(dx) = 1 \quad (5.94)$$

<sup>\*9</sup> このような論法を「背理法」という。第 13 章参照。

<sup>\*10</sup> ただしそうでないときもある。 $f(x) = |x|^3$  は  $x = 0$  で絶対値記号内が  $0$  になるが、 $x = 0$  で微分可能である。

となるはずだ。ところが  $dx$  は 0 に近い任意の微小量なので、 $dx < 0$  となる場合もあるだろう。その場合、式 (5.91) より、 $f(dx) = 0$  となるはずで、これは式 (5.94) に矛盾する。従って、 $f'(0) = 0$  は  $x = 0$  では成り立たない。実は、 $f'(0)$  にどのような値を与えても、これらのつじつまを合わせることはできないのだ。(例おわり)

式 (5.91) のグラフを図 5.4 に示す。 $x = 0$  でグラフが繋がっていない。詳細は省くが、一般に、グラフが繋がっていない<sup>\*11</sup>ようなところでは、関数は微分できない。

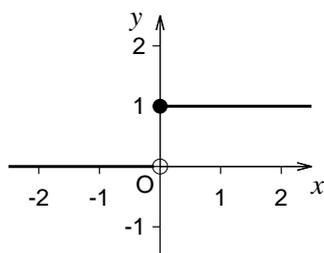


図 5.4 式 (5.91) の  $y = f(x)$  のグラフ。 $x = 0$  で微分不可能 (繋がっていない)。

例 5.23 以下の関数

$$f(x) = x^{1/3}$$

の微分を考えよう。機械的に導関数を計算すると、

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \quad (5.95)$$

となる。これは正しいのだが、この式では  $x = 0$  での値が定まらない。つまり、この関数は  $f'(0)$  を持たない。(例おわり)

この例 5.23 では、微分したい位置 ( $x = 0$ ) で、関数の値は定まるが導関数の値が定まらない ( $\infty$  になってしまう)。グラフ (図 5.5) を見ると、 $x = 0$  での傾きが無限大 (接線が  $x$  軸に垂直) になりそうだ。詳細は省くが、グラフが垂直に立つようなところでは、関数は微分できない。

では、どのような場合なら微分可能なのだろうか? 数学的には、式 (5.5) や式 (5.9) によって  $f'$  が一意に定義できる場合、微分可能である。とはいえ、いちいち式 (5.5) や式 (5.9) に戻るのは大変だ。さしあたって実用的には、場合分けや絶対値記号が無く、導関数の式を導くことができ、微分したい位置の  $x$  の値をもとの関数と

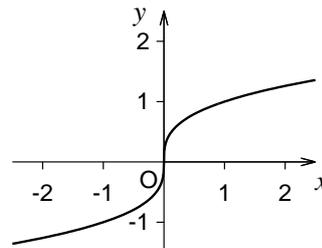


図 5.5  $y = x^{1/3}$  のグラフ。 $x = 0$  で微分不可能 (傾きが  $\infty$  になる)。

導関数の両方に代入してそれぞれ値が定まるようならば、ほとんどの場合で微分できるとしてよい。

## 5.7 速度・加速度

さて、微分は物理学で非常によく使われる。そもそも、微分という概念は物理学上の必要に迫られて発明されたのだ (それが今では、化学・生物学・経済学・統計学等の広範な学問に不可欠な道具になっている)。物理学で最初に出てくる微分は、速度や加速度という考え方である。それを学ぶために、まず準備として、いくつかの言葉を確認しておこう:

いま、 $x$  軸上を移動する点  $P$  があるとする。時刻  $t$  のときの  $P$  の位置 ( $x$  座標) を  $x(t)$  とする。ある時刻  $t_0$  では  $P$  は  $x(t_0)$  にあり、別の時刻  $t_1$  では  $P$  は  $x(t_1)$  にある。

2 つの時刻の差、すなわち  $t_1 - t_0$  を「時刻差」という<sup>\*12</sup>。 $t_1 > t_0$  なら時刻差  $t_1 - t_0$  は正の値をとるし、 $t_1 < t_0$  なら時刻差  $t_1 - t_0$  は負の値をとる。時刻差  $t_1 - t_0$  の絶対値、すなわち  $|t_1 - t_0|$  を「時間」という。時間は常に 0 以上の値をとる。

2 つの位置の差を変位 (displacement) という。今の場合、 $x(t_1) - x(t_0)$  が変位である。 $x(t_1) > x(t_0)$  なら変位は正の値をとるし、 $x(t_1) < x(t_0)$  なら変位は負の値をとる。変位の絶対値を「距離」(distance) という。今の場合、 $|x(t_1) - x(t_0)|$  が距離である。当然ながら、距離は常に 0 以上の値をとる。

まとめると、

- $t$  ... 時刻
- $t_1 - t_0$  ... 時刻差 (時刻の差)
- $|t_1 - t_0|$  ... 時間 (時刻差の絶対値)

<sup>\*11</sup> グラフが繋がっていない、ということはどういうことかを、数学的に定義するのは、実は簡単なことではない。

<sup>\*12</sup> 実際は「時刻差」という言葉はめったに使わないが、ここでは時刻や時間と区別するために導入する。

- $x(t)$  ... 位置
- $x(t_1) - x(t_0)$  ... 変位 (位置の差)
- $|x(t_1) - x(t_0)|$  ... 距離 (変位の絶対値)

である。

さて、「時刻  $t_0$  から  $t_1$  の間の P の平均速度  $\bar{v}$ 」を、次式で定義する:

$$\bar{v} := \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} \quad (5.96)$$

すなわち、平均速度とは変位を時刻差で割ったものだ。式 (5.96) で、もし時刻差が正で変位が負ならば、平均速度は負の値になる。このとき、P は  $x$  軸の負の向きに進んでいる。このように、平均速度の正負は移動の向きを表す。

さて、式 (5.96) で定義した「平均速度」は、時刻  $t_0$  と時刻  $t_1$  の間で物体の運動が勢いを増したり減らしたり、刻々と変化するような様子を表現できない。そのような細かな変化も表現するには、時刻  $t_0$  と時刻  $t_1$  の間をできるだけ短くして表現しなければならない。そこで、式 (5.96) の  $t_1$  が、限りなく  $t_0$  に近い場合 (極限) を考えよう。そのような極限は、次式のようになる:

$$v(t_0) := \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} \quad (5.97)$$

あるいは  $t_1 - t_0 = \Delta t$  と書いて、

$$v(t_0) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \quad (5.98)$$

と書く。この式を式 (5.9) と比べてみるとわかるように、これは  $x(t)$  という関数の、 $t = t_0$  での微分係数である。これを「時刻  $t_0$  での速度 (velocity)」と言う。要するに速度とは位置を時刻で微分したものである (定義)。このように定義した速度を、上述の「平均速度」と区別するためにわざわざ「瞬間の速度」と言うこともある。

時刻  $t$  における速度  $v(t)$  は、定義より、 $x'(t)$  と書ける。物理学では、 $x'(t)$  のことを  $\dot{x}$  と表すこともある (上付きのドットが「時刻による微分」を表すのだ)。つまり、

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t) = \dot{x} \quad (5.99)$$

である。このように、同じことをいろんな記法で表すことがある。

さて、平均速度の正負が運動の方向を表したように、(瞬間の) 速度にも正負があり、それは運動の方向を表す。

ここで、速度の絶対値のことを **速さ** (speed) と呼ぶ (定義)。例えば式 (5.96) の左辺と右辺のそれぞれ絶対

値をとると、

$$|\bar{v}| = \frac{|x(t_1) - x(t_0)|}{|t_1 - t_0|} \quad (5.100)$$

となる。これを平均速さという。右辺の  $|x(t_1) - x(t_0)|$  は距離、 $|t_1 - t_0|$  は時間なので、式 (5.100) は、

「平均速さ = 距離 ÷ 時間」

となる。ところが小学校では

「速さ = 距離 ÷ 時間」

と習った。つまり、小学校で習った「速さ」は、正確に言うところ「平均速さ」だったのだ。式 (5.100) で  $t_1$  を  $t_0$  に近づける極限は、(瞬間の) 速度の絶対値であり、それを(瞬間の) 速さという。

「速さ」は「速度」の大きさ (絶対値) なので、必ず 0 以上の値である。負の値をとることはない。つまり速さには「向き」の概念が無い。逆に言えば、速さと向きをセットにした概念が速度である。

よくある間違い 21 「速度は距離を時刻で微分したものである」「速度は位置を微分したものである」などと言ってしまふ... 前者は、距離ではなくて位置。後者は間違いではありませんが、どういう量について (この場合は時刻) 微分するのかもきちんと言わねばなりません。

問 116

- (1) 平均速度と速度はどう違うか?
- (2) 速度と速さはどう違うか?
- (3) 速度と速さはそれぞれどのような英語単語で表現されるか?
- (4) 「速度とは距離を時刻で微分したものだ」という発言はどこが間違っているか?
- (5) 「速度とは位置を微分したものだ」という発言はどこが間違っているか?

式 (5.5)、式 (5.99) より、次式のようにも書ける:

$$x(t + dt) = x(t) + v(t)dt \quad (5.101)$$

ここで  $dt$  は微小な時刻差である。この式 (5.101) によれば、 $dt$  だけ時刻が変化したときの位置 (つまり  $x(t + dt)$ ) は、現在の位置 (つまり  $x(t)$ ) から、 $v(t)dt$  だけ変化する (速度も、時刻とともに変わるかもしれないが、 $t$  と  $t + dt$  の間では、ほとんど一定とみなすことができるだろう。というよりむしろ、速度がほぼ一定とみなせるくらいに短い  $dt$  を考える)。つまり、時刻差が微小な場合は、変

位は速度と時刻差の積に等しい。それは、式 (5.101) を

$$x(t+dt) - x(t) = v(t)dt \quad (5.102)$$

と変形すれば、より明らかだろう。ここで、式 (5.102) について両辺の絶対値をとると、

$$|x(t+dt) - x(t)| = |v(t)||dt| \quad (5.103)$$

となる。左辺は距離、右辺は速さと時間の積である (速度の絶対値を「速さ」というのだから、 $|v(t)|$  が「速さ」である)。これは、小学校で習った、

$$\text{距離} = \text{速さ} \times \text{時間} \quad (5.104)$$

と整合的である。

速度を時刻で微分したものを 加速度 (acceleration) と言う (定義)。すなわち、時刻  $t$  における加速度  $a(t)$  とは、

$$a(t) = v'(t) \quad (5.105)$$

である。式 (5.5) を使って式 (5.105) を書き換えれば、

$$v(t+dt) = v(t) + a(t)dt \quad (5.106)$$

となる。また、式 (5.99) を使えば、式 (5.105) は、

$$a(t) = v'(t) = x''(t) \quad (5.107)$$

となる。すなわち、加速度は位置を時刻で二階微分したものである。

よくある質問 72 物理で、速度の定義は「単位時間あたりの変位」と習ったのですが、... それでもいいですよ。それを数学的に言えば、位置を時刻で微分したものと、なります。同様に、加速度を「単位時間あたりの速度変化」と定義しても構いません。一般に、「単位... あたりの—の変化」とは、数学的には「—を... で微分したもの」です。

問 117 点 P が直線上を運動している。時刻  $t$  のとき P の位置 (ある基準点から測った距離) を  $x$  とすると、次式のように書けるとする ( $a, b, c$  は  $t$  によらない適当な定数):

$$x = at^2 + bt + c \quad (5.108)$$

- (1) 時刻  $t$  における P の速度は?
- (2) 時刻  $t$  における P の加速度は?

さて、物理量を物理量で微分すると、次元が変わることに注意しよう。例えば、位置の次元は「長さ」だが、位

置を時刻で微分して速度にすると、その次元は「長さ/時間」となる。なぜ次元が変わるのだろうか? それは式 (5.98) を見ればわかる。分母に  $\Delta t$  がある。つまり、時刻で微分するときは、「時間で割っている」のだ。一般に、量  $p$  を量  $q$  で微分して得られる量の次元は「 $p$  の次元」/「 $q$  の次元」になる。従って、速度をさらに時刻で微分すると、次元は「長さ/時間<sup>2</sup>」になる。

問 118 式 (5.108) において、 $a, b, c$  はそれぞれどのような次元を持つべきか?

問 119 上の問 117 において、 $a = 4.9 \text{ m s}^{-2}$ ,  $b = 1 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c = 3 \text{ m}$  のとき、 $t = 10 \text{ s}$  での、位置、速度、加速度をそれぞれ求めよ。

## 5.8 ベクトルの微分

前節で学んだことを、2次元平面や3次元空間に拡張しよう。それには、ベクトルが必要になる。

空間の中を、時刻とともに移動する点を考える。時刻  $t$  のときの点の位置を、位置ベクトル  $\mathbf{r}(t)$  で表そう。これは時刻と共に次第に変化していくベクトルである。この位置ベクトルを、 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  というふうに座標で表すと、その各成分は時刻  $t$  の関数である。各成分の微分を考えると、式 (5.5) より、

$$\begin{cases} x(t+dt) = x(t) + x'(t)dt \\ y(t+dt) = y(t) + y'(t)dt \\ z(t+dt) = z(t) + z'(t)dt \end{cases} \quad (5.109)$$

である。ここで、

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \quad (5.110)$$

と定義すれば、上の3つの式は、まとめて

$$\mathbf{r}(t+dt) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}'(t)dt \quad (5.111)$$

と書ける。これは式 (5.5) によく似ている。これが微分の「ベクトル版」である。ベクトルを値にとるような関数  $\mathbf{r}(t)$  は、式 (5.111) によって、その微分係数  $\mathbf{r}'(t)$  が定義されるのだ。

よくある質問 73 ちょっと混乱してきました。微分って、グラフの接線の傾きですよ。ベクトルを値にとるような関数  $\mathbf{r}(t)$  の「グラフ」とか、その「接線の傾き」はどうイメージすればいいのですか? ... そういうことになるから、「微分はグラフの接線の傾き」というイメージを持ち過ぎないように、と言ったのです! この場合は「グラフの接線の傾き」はイ

メージできないし、する必要もありません。微分のイメージは、「微小量どうしの比例関係の比例係数」です。式(5.111)で言えば、 $\mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}(t)$ を微小なベクトル量  $d\mathbf{r}$  とすれば、 $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt$  となっており、 $d\mathbf{r}$  と  $dt$  が比例してるでしょ？ その比例係数  $\mathbf{r}'(t)$  が  $\mathbf{r}(t)$  の微分なのです。

さて、位置ベクトル  $\mathbf{r}(t)$  を時刻  $t$  で微分したものを、「速度ベクトル」あるいは単に「速度」と言う(定義)。速度は、その英語“velocity”の頭文字をとって、 $\mathbf{v}(t)$  と表すことが多い。すなわち、

$$\mathbf{v}(t) := \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \quad (5.112)$$

である。この記号を使うと、式(5.111)は次式になる:

$$\mathbf{r}(t+dt) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t)dt \quad (5.113)$$

速度ベクトルを時刻で微分したものを、「加速度ベクトル」あるいは単に「加速度」という(定義)。すなわち、

$$\mathbf{a}(t) := \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) \quad (5.114)$$

が加速度である。

これでようやく、P.26 で出てきたニュートンの運動方程式(2.29)、すなわち

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (5.115)$$

を正確に理解できるようになった。この式の右辺の  $\mathbf{a}$  は、加速度ベクトル、すなわち、位置ベクトルを時刻で2階、微分したものなのだ ( $m$  は物体の質量、 $\mathbf{F}$  は物体に働く力)。このような自然の摂理を表すのに、微分という数学は不可欠なのだ。これが、理系で数学が必要な理由である。

問 120  $xy$  座標平面上の動点  $P$  が、時刻  $t$  で位置ベクトル  $\mathbf{r}(t) = (v_0t, -gt^2/2)$  にある ( $v_0, g$  は正の定数)。

- (1) 点  $P$  はどのような軌跡を描くか?
- (2) 時刻  $t$  における  $P$  の速度ベクトル  $\mathbf{v}(t)$  は?
- (3) 時刻  $t$  における  $P$  の加速度ベクトル  $\mathbf{a}(t)$  は?

## 5.9 極大・極小と微分係数

関数  $f(x) = x^2 + 1$  を考えよう。 $f'(x) = 2x$  となるから、 $f'(0) = 0$  である。つまり  $x = 0$  での微分係数は0である。グラフを考えると、 $x = 0$  のとき  $y = f(x)$  は最小値をとっている。このように、なめらかな関数が最小値や最大値をとるところでは、微分係数は0になるのだ。なぜか?

一般に、関数  $f(x)$  が、 $x = x_0$  で最小値をとるとしよう。微分係数の定義式(5.5)から、任意の微小量  $\Delta x$  に対して、

$$f(x_0 + \Delta x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (5.116)$$

である。仮に  $f'(x_0)$  が正の値をとっていれば、 $\Delta x$  として負の微小量をとると  $f'(x_0)\Delta x < 0$  となるから、式(5.116)より  $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$  となり、 $f(x_0)$  が最小値であるという前提が崩れる<sup>\*13</sup>。また仮に  $f'(x_0)$  が負の値をとっていれば、 $\Delta x$  として正の微小量をとると  $f'(x_0)\Delta x < 0$  となるから、この場合も式(5.116)より  $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$  となり、 $f(x_0)$  が最小値であるという前提が崩れる。従って、 $f'(x_0)$  は正でも負でもいけない。従って、 $f'(x_0) = 0$  でなければならない。

最大値の場合も同様である。

グラフで考えれば、 $y = f(x)$  のグラフの、 $x = x_0$  での傾きが  $f'(x_0)$  である。従って、 $f'(x_0) = 0$  ということは、その傾きが0、つまりそこでグラフ(の接線)は水平になるということである。グラフがなめらかなにつながつていれば、最大値(山頂)や最小値(谷底)の部分で接線が水平になるのは、直感的に明らかだろう。

さて、このことを利用して、関数の最大値や最小値を求めることができる。

例 5.24 関数  $f(x) = 2x^4 - x$  の最小値を求めよう。 $f'(x) = 8x^3 - 1$ 。 $f'(x) = 0$  となるのは、 $8x^3 - 1 = 0$  より、 $x = 1/2$ 。このとき、 $f(1/2) = -3/8$ 。(例おわり)

以上の話は、何も、関数  $f(x)$  の定義域全体にわたる最大値や最小値に限ったことではない。 $x$  の限られた範囲の中で、ある点での値が、その周辺での値に比べて最大だったり最小だったりするときにも成り立つ。そのような状況を、極大 や 極小 と呼ぶ<sup>\*14</sup>。例えば、関数  $f(x) = x^3 - x$  は、図 4.7 のようなグラフ(p.55)になるが、その導関数は、 $f'(x) = 3x^2 - 1$  となるので、 $x = -1/\sqrt{3}$  と  $x = 1/\sqrt{3}$  のとき0になる。前者はグラフの左側の山(極大)、後者は右側の谷(極小)に対応している。しかし、明らかに、これらは最大でも最小でもない(この関数は  $x$  がどんどん大きくなると  $\infty$  に発散するので最大値を持たない。最小値も同様)。極大における関数の値を 極大値 という。同様に、極小における関数の値を 極小値 という。極大値と極小値のことを 極値

<sup>\*13</sup> このような論法を「背理法」という。第13章参照

<sup>\*14</sup> 最大は極大の一種、最小は極小の一種と考える。

という。

さて、以上を利用すると、関数のグラフを楽に描ける。

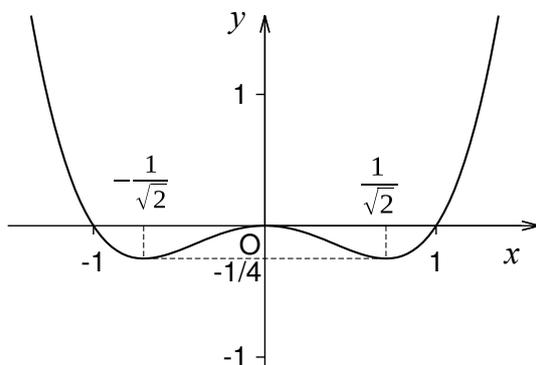


図 5.6  $y = x^4 - x^2$  のグラフ (実線)。

例 5.25  $y = x^4 - x^2$  のグラフを描いてみよう。まずこれは偶関数である。また、 $x$  軸との共有点 ( $y = 0$ ) は、 $x = 0, \pm 1$  である。

次に極大と極小を求める。 $f'(x) = 4x^3 - 2x$  だから、 $x = 0, \pm 1/\sqrt{2}$  で  $f'(x) = 0$  となる。それぞれ極大・極小のどちらだろう？

$x = -1/\sqrt{2}$  については、それより少し小さな  $x$  では  $f'(x) < 0$  (つまり  $f(x)$  は減少傾向)、それより少し大きな  $x$  では  $f'(x) > 0$  (つまり  $f(x)$  は増加傾向) となるから、そこでは極小値  $f(-1/\sqrt{2}) = -1/4$  をとる。 $x = 1/\sqrt{2}$  についても同様である。

一方、 $x = 0$  については、それより少し小さな  $x$  では  $f'(x) > 0$  (つまり  $f(x)$  は増加傾向)、それより少し大きな  $x$  では  $f'(x) < 0$  (つまり  $f(x)$  は減少傾向) となるから、そこでは極大値  $f(0) = 0$  をとる。

$x \rightarrow \infty$  で  $f(x) \rightarrow \infty$  であることを併せて考えると、図 5.6 のようなグラフになる。(例おわり)

以上でわかったように、なめらかな関数のグラフが極大値や極小値をとる場所では、微分係数は 0 である。しかし、その逆は必ずしも成り立たないことに注意しよう。つまり、微分係数が 0 であっても、極大にも極小にもならない、という場合が存在するのだ。

例 5.26  $y = x^3$  は  $x = 0$  での微分係数は 0 だが、P.55 の図 4.7 の点線で示されるように、 $y = x^3$  のグラフは、 $x = 0$  で極大にも極小にもならない。(例おわり)

## 5.10 偶関数や奇関数の微分

関数  $f(x)$  が偶関数であるとする。すなわち、 $f(-x) = f(x)$  が恒等的に成り立つ。この両辺を  $x$  で微分すると、 $-f'(-x) = f'(x)$  となる (左辺は合成関数の微分!)。すなわち、 $f'(-x) = -f'(x)$  が恒等的に成り立つ、すなわち  $f'(x)$  は奇関数である。偶関数の導関数は奇関数なのだ!

問 121 奇関数の導関数は偶関数であることを示せ。

問 122  $n$  を 0 以外の任意の整数とする。以下の関数について、偶関数の導関数が奇関数になり、奇関数の導関数が偶関数になることを実際に確認せよ。なお、単に「確認した」というだけではレポートにはなりません!

- (1)  $f(x) = x^{2n}$                       (2)  $f(x) = x^{2n+1}$   
(3)    (4)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

ヒント: (3), (4) は問 108 に出てきた。

よくある質問 74 数 III をやっていないのでテストができません。... もう高校時代は終わったのだから「XXX をやっていないから」というのはやめましょう。やっていなければ、今、やればいいのです。高校で数 III をやった人も、それなりの苦労や努力をしたのです。

### 演習問題

演習問題 13  $y = 1/x^n$  と置き、その両辺を  $x^n$  倍し、その両辺を  $x$  で微分する、という発想で、式 (5.62) を導け。

演習問題 14  $y = x^{1/n}$  と置き、その両辺を  $n$  乗し、その両辺を  $x$  で微分する、という発想で、式 (5.69) を導け。

演習問題 15 逆関数の微分の公式 (式 (5.64)) を、グラフの「接線の傾き」という観点で示せ。ヒント: 逆関数のグラフは、もとの関数を、直線  $y = x$  に関して対称移動したものの。

演習問題 16  $n$  を 0 以上の整数とするとき、以下の式で

定義される関数  $P_n(x)$  をルジャンドル関数という\*15

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (5.117)$$

- (1)  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  のそれぞれについて,  $P_n(x)$  を求めよ。  
 (2)  $n$  が偶数のときは  $P_n(x)$  は偶関数であることを示せ。  
 (3)  $n$  が奇数のときは  $P_n(x)$  は奇関数であることを示せ。

### 問題の解答

答 99 略 (がんばれ!)

答 100 無限小  $dx$  に対して,

$$g(a + dx) = g(a) + g'(a)dx$$

と書けるとき, 右辺の  $dx$  の係数  $g'(a)$  のこと。もしくは,

$$g'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x}$$

のこと (どちらでも可)。注: この問題で, あなたは  $g$  を  $f$  と書いたり  $a$  を  $x_0$  と書いたりしなかっただろうか? 本文に出てきた  $f(x)$  や  $x_0$  という記号は, 説明のための便宜的なものであり, この問題のように, 設定に応じて変わるものである。

答 101

$$\begin{aligned} f(x + dx) &= p(x + dx) + q = px + q + p dx \\ &= f(x) + p dx \end{aligned}$$

$dx$  の係数に着目して,  $f'(x) = p$ 。特に,  $f(x)$  が定数関数の場合は  $p = 0$  だから,  $f'(x)$  は恒等的に 0。 ■

答 102 略。

答 103

- (1)  $f'(x) = 2x + 1$       (2)  $f'(x) = 8x + 5$   
 (3)  $f'(x) = 6x + 3$       (4)  $f'(x) = -5/x^2$   
 (5)  $f'(x) = 1 + 1/x^2$

答 104

- (1)  $f'(x) = (x^2 + x + 1)'(x^2 - x - 2)$   
 $+ (x^2 + x + 1)(x^2 - x - 2)'$   
 $= (2x + 1)(x^2 - x - 2)$   
 $+ (x^2 + x + 1)(2x - 1)$   
 $= 4x^3 - 4x - 3$   
 (2)  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3x - 2$   
 $f'(x) = 4x^3 - 4x - 3$

答 105

- (1) ( $g(x) = x^3, f(x) = 3x^2 + 2$  とみなせばよい。)

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3(3x^2 + 2)'(3x^2 + 2)' \\ &= 3(3x^2 + 2)'(6x) = 18x(3x^2 + 2)^2 \end{aligned}$$

- (2) ( $g(x) = x^3, f(x) = x^2 + x + 1$  とみなせばよい。)

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3(x^2 + x + 1)'(x^2 + x + 1)' \\ &= 3(x^2 + x + 1)'(2x + 1) \end{aligned}$$

- (3) ( $g(x) = x^2, f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  とみなせばよい。)

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)' \\ &\quad \times (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)' \\ &= 2(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)' \\ &\quad \times (5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) \end{aligned}$$

- (4) ( $g(x) = x^2, f(x) = 1 + 1/x$  とみなせばよい。)

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)'\left(1 + \frac{1}{x}\right)' \\ &= -2\left(1 + \frac{1}{x}\right)'\frac{1}{x^2} = -2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

答 106 関数  $1/u(x)$  は, 関数  $1/x$  と関数  $u(x)$  の合成関数である。(1/x)' = -1/x^2 だから,

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \left(-\frac{1}{u^2}\right)u' = -\frac{u'}{u^2}$$

答 107 関数  $v(x)/u(x)$  は, 関数  $v(x)$  と関数  $1/u(x)$  の積である。

$$\begin{aligned} \left(v \times \frac{1}{u}\right)' &= v'\left(\frac{1}{u}\right) + v\left(\frac{1}{u}\right)' \\ &= v'\left(\frac{1}{u}\right) + v\left(-\frac{u'}{u^2}\right) = \frac{v'u - vu'}{u^2} \end{aligned}$$

\*15 この関数は, 実は原子の電子軌道 (K 殻とか L 殻とか) と密接な関係がある。 ■

答 108

$$(1) \quad -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad (2) \quad \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

答 109

$$(1) \quad -\frac{1}{x^2} \quad (2) \quad -\frac{1}{2x^{3/2}} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$$

$$(3) \quad \frac{2}{3}x^{-1/3} \quad (4) \quad -5x^{-6}$$

答 110 略 (本文参照)。

答 111

(1) ヒント:  $g(x) = \sqrt{x}$ ,  $f(x) = 2x + 3$  として公式 4 を使う。  $g'(x) = 1/(2\sqrt{x})$  だから,

$$\begin{aligned} (\text{与式})' &= \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{(2x+3)'}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \end{aligned}$$

(2) ヒント:  $g(x) = \sqrt{x}$ ,  $f(x) = 1 - x^2$  として公式 4 を使う。  $g'(x) = 1/(2\sqrt{x})$  だから,

$$\begin{aligned} (\text{与式})' &= \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

(3) ヒント: まず  $x^2$  と  $\sqrt{1+x^2}$  の積と考えて公式 3 を使う。その上で例 5.15 を使う。

$$\begin{aligned} (\text{与式})' &= (x^2)' \sqrt{1+x^2} + x^2 (\sqrt{1+x^2})' \\ &= 2x\sqrt{1+x^2} + \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

(4) ヒント:  $g(x) = x^{-1/2}$ ,  $f(x) = 1 + x^2$  として公式 4 を使う。

$$\begin{aligned} (\text{与式})' &= \frac{-1}{2}(f(x))^{-3/2} f'(x) \\ &= \frac{-1}{2}(1+x^2)^{-3/2} (2x) = -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

(5) ヒント:  $g(x) = 1/x$ ,  $f(x) = 1 + \sqrt{x}$  として公式 4

を使う。

$$\begin{aligned} (\text{与式})' &= -\frac{(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2} \\ &= -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \end{aligned}$$

(6) ヒント:  $g(x) = \sqrt{x}$ ,  $f(x) = 1 + 1/x$  として公式 4 を使う。

$$(\text{与式})' = \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

(7) ヒント:  $x-1$  と  $1/(x+1)$  の積と考えて公式 3 を使う。

$$\begin{aligned} (\text{与式})' &= (x-1)' \frac{1}{x+1} + (x-1) \left(\frac{1}{x+1}\right)' \\ &= \frac{1}{x+1} - (x-1) \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

別解: 与式  $= 1 - 2/(x+1)$  と変形してから微分しても、同じ結果になる。

(8) ヒント:  $g(x) = 1/x$ ,  $f(x) = 1 + 1/x$  として公式 4 を使ってもよいのだが、与式を変形してから微分するほうが簡単。与式の分母分子に  $x$  をかけて,

$$(\text{与式}) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

従って,

$$(\text{与式})' = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$$

答 112  $f(x) = (1+x)^a$  と置くと,  $f(0) = 1$ 。また,  $f'(x) = a(1+x)^{a-1}$  なので, 従って  $f'(0) = a$ 。これを式 (5.77) に入れると, 与式を得る。

答 113

- (1) 式 (5.79) で  $a = -1$  とすれば,  $1/(1+x) \doteq 1-x$   
 (2) 前小問の  $x$  を  $-x$  に置き換えて,  $1/(1-x) \doteq 1+x$   
 (3) 式 (5.79) で  $a = -1/2$  とすれば,  
 $1/\sqrt{1+x} \doteq 1-x/2$

答 114

- (1)  $(0.99)^{10} = (1-0.01)^{10} \doteq 1 - 10 \times 0.01 = 0.9$   
 (2) 3 乗して 10 に近い簡単な数は何かな? と考えると, 2

が思いつく。 $2^3 = 8$  であることに注目し、

$$\begin{aligned} 10^{1/3} &= (8+2)^{1/3} = \left\{8\left(1+\frac{2}{8}\right)\right\}^{1/3} \\ &= 8^{1/3}\left(1+\frac{2}{8}\right)^{1/3} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{1/3} \\ &\doteq 2\left(1+\frac{1}{3\times 4}\right) = 2+\frac{1}{6} = 2.166\dots \end{aligned}$$

答 115

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 + 6x^2 \\ f''(x) &= 20x^3 + 12x \\ f^{(3)}(x) &= 60x^2 + 12 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{6}{(1-x)^4} \end{aligned}$$

答 116 (1), (2), (3) は略。本文をよく読めば簡単。(4) 「距離を」ではなく「位置を」と言わねばならない。距離を時刻で微分したものは「速さ」である。(5) 間違っているとは言いきれないが、「時刻によって微分」と言わねば不正確である。

答 117

- (1) 位置を時刻で微分する:  $(at^2 + bt + c)' = 2at + b$ 。  
 (2) もう1度時刻で微分する:  $(2at + b)' = 2a$ 。

答 118 問 117(2) で、 $2a$  が加速度なので、 $a$  は加速度の次元 (SI 単位では  $\text{m s}^{-2}$ )。問 117(1) で、 $2at + b$  が速度なので、 $b$  は速度の次元 (SI 単位では  $\text{m s}^{-1}$ )。もともと  $x = at^2 + bt + c$  だったので、 $c$  は  $x$  と同じ次元 (長さ; SI 単位では  $\text{m}$ )。

答 119(略解) 位置は  $503 \text{ m}$ 。速度は  $99 \text{ m s}^{-1}$ 。加速度は  $9.8 \text{ m s}^{-2}$ 。

答 120  $\mathbf{r}(t) = (v_0t, -gt^2/2) = (x, y)$  と置く。

- (1)  $x, y$  から  $t$  を消去して、 $y = -gx^2/(2v_0^2)$ 。これを  $xy$  平面にプロットすると、原点を頂点とする、上に凸の放物線になる。  
 (2)  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (v_0, -gt)$   
 (3)  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (0, -g)$

なお、この点の運動は、水平方向に初速  $v_0$  で投げたボールの運動である。

答 121 略。

答 122 (1)  $f(-x) = (-x)^{2n} = (-1)^{2n}x^{2n} = x^{2n} = f(x)$ 。よって  $f(x)$  は偶関数。 $f'(x) = 2nx^{2n-1}$ 。  
 $f'(-x) = 2n(-x)^{2n-1} = (-1)^{2n-1}2nx^{2n-1} = -2nx^{2n-1} = -f'(x)$ 。よって  $f'(x)$  は奇関数。(2) 以下は略。

# 第6章

## 指数・対数

過去の受講生の言葉: 「最近ようやく定義を1つずつ確認する癖がつき、理解しやすくなった。」

### 6.1 指数関数

$a$  を正の定数とし、 $a^x$  という関数を考えよう。こういう関数を 指数関数 という。例えば  $a = 2$  のときは、 $2^x$  であり、これは  $x = 0, 1, 2, 3, 4$  のときはそれぞれ、1, 2, 4, 8, 16, ... と、急速に大きくなる。パソコンを使って  $y = 2^x$  をグラフに描くと、図 6.1 の実線のようになる。ここで、 $y = 2^x$  を数値微分した結果 (つまり導関数) も

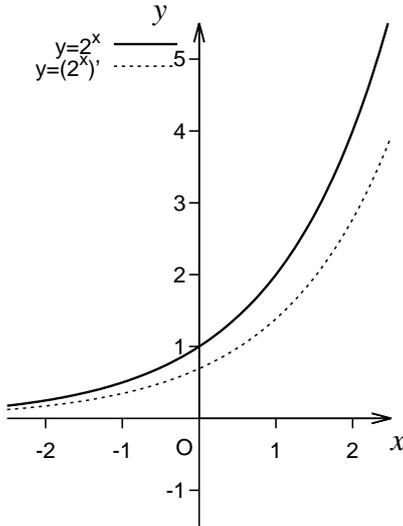


図 6.1  $y = 2^x$  と  $y = (2^x)'$  のグラフ

点線で描いた。これを見ると、 $y = 2^x$  とその導関数はちょっと似ている。それは、 $y = 2^x$  が急激な右肩上がりの曲線なので、右に行くほど接線の傾きも急激に大きくなる、従って、導関数 (接線の傾きの値を並べたもの) も右肩上がりになるのだ。

では、同じようなことを  $y = 3^x$  についてやってみたらどうだろう? 結果は、図 6.2 のようになる。やはり、 $y = 3^x$  は急激に右肩上がりの曲線で、その導関数も似ている。図 6.1 と図 6.2 を比べてみると、図 6.2 の方が、

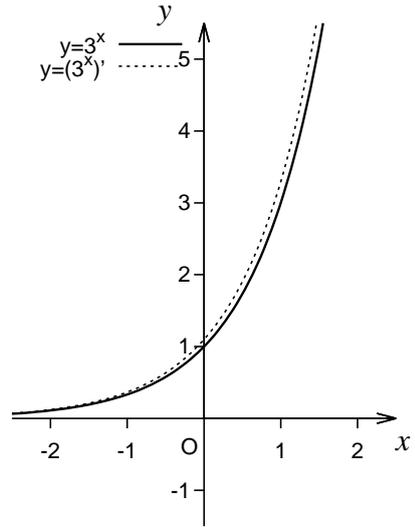


図 6.2  $y = 3^x$  と  $y = (3^x)'$  のグラフ

もとの関数と導関数はずっと近い。しかし、図 6.1 ではもとの関数よりも導関数の方が下にあったのが、図 6.2 ではやや上にある。ということは、 $a$  が 3 よりも若干小さい数では、 $y = a^x$  とその導関数がぴったり一致するのではないだろうか? 実はそうなのである。いろいろ試すと、 $a$  が 2.71828... のときにそうなるのだ。これが、P.9 で出てきた ネイピア数  $e$  の正体である。すなわち、

$$(e^x)' = e^x \tag{6.1}$$

となるような数  $e$  を ネイピア数 と言うのだ。そして、 $e^x$  は、「微分しても変わらない指数関数」である。 $e^x$  のことを、エクスポーネンシャル(exponential) と呼ぶ。なお、第 1 章で述べたように、 $e^x$  を、 $\exp x$  と書くことも多い。単なる書き方の約束だが、意外に見落とす人がいるので、もういちど大きく書いておこう:

約束

$$\exp x := e^x \tag{6.2}$$

問 123 パソコンで,  $y = 2.718^x$  のグラフと,  $y = 2.718^x$  を数値微分したグラフを, 重ねて描け。  $x$  の刻みは 0.01 くらいでよい。  $x$  の範囲は  $-2$  以上  $2$  以下としよう。

実は, ネイピア数  $e$  は, 次式を満たす: \*1

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} \quad (6.3)$$

あるいは,  $1/h$  を  $n$  と置き換えて,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (6.4)$$

問 124 式 (6.4) の  $\lim$  の内側を,  $n = 2, n = 10, n = 100, n = 1000, n = 10000$  の各場合について, 関数電卓で計算せよ。

問 125 式 (6.3), 式 (6.4) をそれぞれ 5 回書いて記憶せよ。

よくある間違い 22 式 (6.4) で,  $n$  を  $\infty$  ではなく 0 に近づける極限と勘違いして覚えてしまう ... 仮に  $n$  を 0.01 や 0.001 などとして式 (6.4) を電卓で計算してごらん。  $2.718 \dots$  ではなく 1 に近づいて行ってしまいます。

実は,  $e^x$  は, 次のようにも表される \*2:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (6.5)$$

問 126 式 (6.5) の  $\lim$  の内側を,  $x = 2, n = 10000$  について電卓で計算せよ。  $e^2$  も電卓で計算し, それらを比べよ。  $x = -1, n = 10000$  についても同様の比較を行え。

式 (6.5) は式 (6.4) を拡張した形の式になっている。これを使うと, 以下のような問題が楽に扱える:

\*1  $dx$  を微小量とする。  $e$  が  $(e^x)' = e^x$  を満たすなら, 微分の定義より,  $e^{x+dx} = e^x + e^x dx$  のはず。従って,  $e^{x+dx} = e^x(1+dx)$ 。一方, 指数法則より,  $e^{x+dx} = e^x e^{dx}$ 。これらを比べて,  $e^{dx} = 1+dx$ 。両辺を  $1/dx$  乗して,  $e = (1+dx)^{1/dx}$ 。  $dx$  を  $h$  に置き換えたら式 (6.3) になる。

\*2 証明は以下の通り:  $1/n = x/N$  と置こう ( $N$  は適当な実数)。すると,  $n = N/x$ 。式 (6.4) の  $\lim$  の内側にこれを入れると,  $(1+x/N)^{N/x}$ 。  $n \rightarrow \infty$  のときはこれが  $e$  に収束するので, この  $x$  乗, つまり  $(1+x/N)^N$  は  $e^x$  に収束する。  $n \rightarrow \infty$  のとき  $N \rightarrow \infty$  となるので,

$$e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$$

となる。ここで改めて  $N$  を  $n$  と置き換えれば, 式 (6.5)。

例 6.1 お金を貯金すると, 利子がつく。一年間の利率が  $r$  の場合,  $x$  円のお金を銀行に預けると一年後には  $rx$  円の利子がついて, お金は  $x + rx = (1+r)x$  円になる。つまり,  $(1+r)$  倍になる。もう一年預けると, お金はさらに  $(1+r)$  倍になり,  $(1+r)^2 x$  円になる。そういうふうに考えれば,  $n$  年後には, お金は  $(1+r)^n$  倍になることがわかる。

問 127 以下の値を, 電卓を使って小数第 4 位まで求めよ (5 位を四捨五入せよ)。

- (1) 年間の利率が 1%, すなわち  $r = 0.01$  のとき, 預けたお金は 100 年間で何倍になるか?
- (2) 年間の利率が 0.01%, すなわち  $r = 0.0001$  のとき, 預けたお金は 10000 年間で何倍になるか? (それまで人類が滅亡しなければ!)

前問で, お金の倍率は,  $2.718 \dots$  という,  $e$  に近い値になっていった。なぜだろう?  $n$  を年数と考えると, この問題では,  $r = 1/n$  である。そして, ここで行った計算は, 式 (6.4) の  $\lim$  内をいろんな  $n$  の値について求めたのと同じである。  $n$  が大きければ大きいほど式 (6.4) が使えるわけだ。

よくある質問 75 問 127(1) で,  $1.01^{100}$  を, P.74 でやった線型近似  $(1+x)^a \cong 1+ax$  で計算したら,  $1.01^{100} = (1+0.01)^{100} \cong 1+100 \times 0.01 = 1+1 = 2$  になってしまい,  $2.7 \dots$  にはなりません。何がおかしい? ... 良いところに気がきました。その線型近似は,  $a$  が大きいと精度が悪いのです。

問 128 金利 2% で 100 年間, お金を借りたとき, お金は元金の何倍になるか? 式 (6.5) を使って近似的に計算せよ。

問 129 ある地域で大災害をもたらす豪雨が, 平均的に  $n$  年に 1 回の頻度でランダムに起きていることが過去の記録からわかった ( $n$  はある自然数)。豪雨は 1 年間に 2 回以上は起きないとする

- (1) その豪雨が, 今からの 1 年間に 1 回も発生しない確率を求めよ。
- (2) その豪雨が, 今からの 2 年間に 1 回も発生しない確率を求めよ。
- (3) その豪雨が, 今からの  $n$  年間に 1 回も発生しない確率を求めよ。
- (4)  $n$  が大きな値になると, 前小問の確率はどのような値に近づくか?
- (5) 平均的に 1000 年に 1 回起きる豪雨が, 1000 年間に

1 回以上発生する確率は? 有効数字 4 桁で。

この問題は、災害リスク等を評価・解析する上で、最も基礎となる考え方でもある。

よくある質問 76 ネイピア数  $e$  というやつ不思議さに驚きました。いったいどんな人が考えたんでしょうか? ... ベルヌーイとかオイラーらしいです。ネイピアというスコットランド人(対数を発明した人)の名前がついていますが、ネイピアが発見したのではないそうです。ちなみにネイピア数の神秘は、さらにもっと続きがあるので。

さて、改めて  $y = e^x$  のグラフを見てみよう。どんな数も 0 乗は 1 だから、 $e^0 = 1$  である。従ってこのグラフは  $(0, 1)$  を通る。また、 $x = 1$  のときは  $y = e = 2.718 \dots$  だから、 $(1, 2.718 \dots)$  を通る。 $x$  が 1 増えるたびに  $y$  は 2.718... 倍になるので、 $x$  が大きくなるにつれてこのグラフは急速に上に伸びていくだろう。一方、 $x = -1$  のときは、 $y = e^{-1} = 1/e = 1/2.718 \dots$  となる。 $x$  が 1 小さくなるたびに  $y$  は  $1/2.718 \dots$  倍になるので、 $x$  が負のほうに行くにつれて、グラフは急激に  $x$  軸に近づいて来るだろう。そう考えると、 $y = e^x$  のグラフは図 6.3 の実線のようになる。

図 6.3 には、 $y = e^{-x}$  のグラフも示した。これは  $y = e^x$  のグラフを  $y$  軸に関して対称移動したものだ(わからない人は P.50 の 4.2 節を参照せよ)。

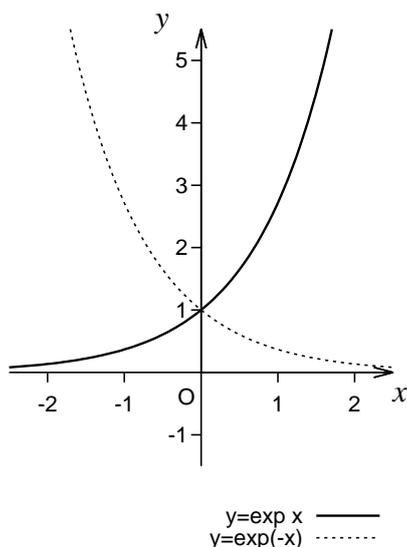


図 6.3  $y = \exp x$  と  $y = \exp(-x)$  のグラフ

問 130 以下の関数のグラフを描け。

- (1)  $y = 1 - e^{-x}$       (2)  $y = 2(1 - e^{-3x})$

さて、指数関数を含む関数の微分を学ぼう。

例 6.2  $f(x) = e^{-2x}$  を微分してみよう。これを  $e^y$  と  $y = -2x$  の合成関数と見れば(合成関数の微分を忘れた人は P.71 へ!), 式 (6.1) に注意して,

$$f'(x) = e^{-2x}(-2x)' = -2e^{-2x} \quad (6.6)$$

例 6.3  $f(x) = xe^{-2x}$  を微分してみよう。まずこれを  $x$  と  $e^{-2x}$  の積とみなして、積の微分の公式 (P.71) より,

$$f'(x) = e^{-2x} + x(e^{-2x})' \quad (6.7)$$

右辺第二項の中の  $(e^{-2x})'$  は、上の例より  $-2e^{-2x}$  となる。これらを組み合わせて,

$$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = (1 - 2x)e^{-2x} \quad (6.8)$$

例 6.4  $f(x) = e^{-a/x}$  を微分してみよう ( $a$  は定数)。これを  $e^y$  と  $y = -a/x$  の合成関数と見れば,

$$f'(x) = e^{-a/x} \left(-\frac{a}{x}\right)' = e^{-a/x} \left(\frac{a}{x^2}\right) = \frac{ae^{-a/x}}{x^2} \quad (6.9)$$

(例おわり)

問 131 次の関数を微分せよ。

- (1)  $f(x) = e^x$       (2)  $f(x) = e^{2x}$   
 (3)  $f(x) = \exp(-x^2)$       (4)  $f(x) = x \exp(-x^2)$

## 6.2 対数

第 1 章で学んだが、正の実数  $a, x$  について ( $a \neq 1$ ), 「 $a$  を何乗すると  $x$  になるか」の指数を求める操作を,

$$\log_a x \quad (6.10)$$

とあらわす。これが対数の定義だった。この定義より,

$$\log_a x = y \quad (6.11)$$

とは,

$$x = a^y \quad (6.12)$$

と同じことである。式 (6.11) を使って、式 (6.12) 右辺の  $y$  を  $\log_a x$  で置き換えられる。すると,

$$x = a^{\log_a x} \quad (6.13)$$

となる。式 (6.13) は対数の定義の言い換えにすぎないのだが、これが「わからない」人が意外に多い。落ち着いて考えよう。 $\log_a x$  は、「 $a$  を何乗すると  $x$  になるか」で

ある。式 (6.13) の右辺は、その数で  $a$  を実際に「何乗かする」ことを意味する。その結果が  $x$  になる (式 (6.13) の左辺になる) のは当然である。

問 132  $a, b, c$  を正の実数として、以下を示せ。ただし  $a \neq 1$  とし、また、(8), (9) では  $b \neq 1$  とし、(10) では  $c \neq 1$  とする。

$$(1) a^{\log_a b} = b \quad (6.14)$$

$$(2) \log_a a = 1 \quad (6.15)$$

$$(3) \log_a 1 = 0 \quad (6.16)$$

$$(4) \log_a b + \log_a c = \log_a bc \quad (6.17)$$

$$(5) \log_a \left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b \quad (6.18)$$

$$(6) \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \quad (6.19)$$

$$(7) \log_a b^c = c \log_a b \quad (6.20)$$

$$(8) \log_a b \times \log_b c = \log_a c \quad (6.21)$$

$$(9) \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (6.22)$$

$$(10) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (6.23)$$

式 (6.23) は、底の変換公式 と呼ばれる。これを使えば、どのような底の対数も、特定の数を底とする対数の計算に変換できる。これは、電卓や計算機等による対数計算にしばしば有用である。

例 6.5  $\log_3 5$  を関数電卓で求めてみよう。関数電卓の多くは、対数といえば常用対数や自然対数しか計算できないので、底が 3 である  $\log_3 5$  は直接は計算できない(ことが多い)。そこで、底の変換公式を使って、 $\log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3}$  としてやる。 $\ln 5 = 1.609 \dots$  や  $\ln 3 = 1.098 \dots$  は関数電卓で計算できる。従って、

$$\log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3} = \frac{1.609 \dots}{1.098 \dots} = 1.464 \dots \quad (6.24)$$

と求まる。これを常用対数でやっても同じ結果になる:

$$\log_3 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} = \frac{0.698 \dots}{0.477 \dots} = 1.464 \dots \quad (6.25)$$

問 133 関数電卓を用いて、以下の値を有効数字を 4 桁で求めよ。

$$(1) \log_2 7$$

$$(2) \log_{0.3} 5$$

問 134  $x$  を任意の正の実数とする。次式を示せ:

$$\log_{10} x = (\log_{10} e) \times (\ln x) \doteq 0.4343 \ln x \quad (6.26)$$

$$\ln x = (\ln 10) \times (\log_{10} x) \doteq 2.3026 \log_{10} x \quad (6.27)$$

世の中では、対数といえば、常用対数と自然対数がよく使われるので、常用対数を自然対数で表したり、その逆をしたり、というために、式 (6.21) や式 (6.23) がよく使われる。特に、ここで出てきた

$$\log_{10} e \doteq 0.4343 \quad (6.28)$$

$$\ln 10 \doteq 2.3026 \quad (6.29)$$

という 2 つの定数は非常によく現れる。

問 135

- (1) 式 (6.28) と式 (6.29) をそれぞれ 5 回書いて記憶せよ。
- (2) 式 (6.28) と式 (6.29) の積が 1 になることを関数電卓を用いて確認せよ
- (3) それを数学的に証明せよ。

ところで、 $f(x) = e^x$  と、 $g(x) = \ln x$  は、互いに逆関数である。これは対数の定義から明らかである。実際、

$$g(f(x)) = \ln e^x = \log_e e^x = x \log_e e = x$$

となるし、

$$f(g(x)) = \exp(\ln x) = e^{\log_e x} = x$$

となる (式 (6.14) より)。これは P.59 の式 (4.38) と整合的である。図 6.4 で明らかのように、 $y = e^x$  と  $y = \ln x$  のグラフは直線  $y = x$  に関して互いに対称である (逆関数の性質。P.60 参照)。

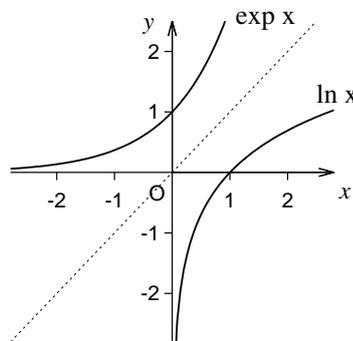


図 6.4  $y = e^x$  と  $y = \ln x$  のグラフ。点線は、 $y = x$  のグラフ。

ここで、 $y = \ln x$  のグラフは  $0 < x$  の範囲でしか描かれていないことに注意。つまり、 $\ln x$  という関数は、

$x \leq 0$  では定義されない (考えることができない) のだ。これは直感的にも明らかで、例えば  $\ln(-5)$  は何か? などと言われても、 $e = 2.718\cdots$  は、何乗しようが必ず正の値であって、 $-5$  のような負の値は、とりようがない。

問 136 以下の関数のグラフを重ねて描け。

- (1)  $y = \log_2 x$     (2)  $y = \ln x$     (3)  $y = \ln(1+x)$

次に、対数関数の微分を考えよう。 $f(x) = e^x$  と  $g(x) = \ln x$  は互いに逆関数であり、かつ、 $f'(x) = f(x)$  なので、逆関数の微分 (微分の公式 5; P.73) により、

$$(\ln x)' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{x} \quad (6.30)$$

である。つまり、 $\ln x$  の微分は  $1/x$  になる。このことは記憶せよ。

問 137 以下の関数をそれぞれ微分せよ：

- (1)  $\ln(x+1)$     (2)  $\ln 2x$     (3)  $\ln \frac{x-1}{x+1}$

ヒント: (3) は、いきなり合成関数の微分公式で処理するよりも、式 (6.19) を使って変形すると楽。

問 138 パソコンの表計算ソフトを使って、 $\ln x$  を数値微分せよ。その結果を、もとの関数 ( $\ln x$ ) と、解析的な微分結果 ( $1/x$ ) とともに、重ねてグラフに描け。ヒント:  $x = 0$  や  $x < 0$  の値では  $\ln x$  の計算がエラーになるので、微妙に  $0$  以上の  $x$  から始めよう。結果は図 6.5 のようになるはず。

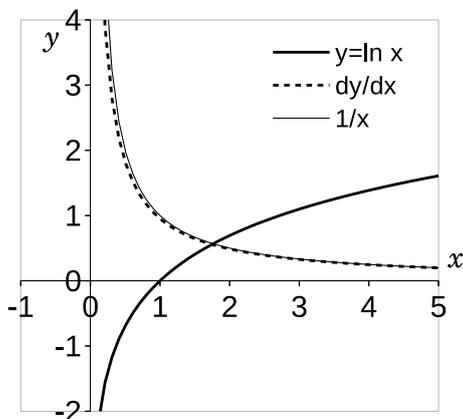


図 6.5  $y = \ln x$  (太い実線) とその数値微分 (点線) のグラフ。細い実線は  $y = 1/x$ 。  $x$  は  $0.01$  からで、刻みは  $0.1$

### 6.3 対数微分

関数  $f(x) = a^x$  を微分してみよう (ただし  $a$  は  $1$  以外の正の定数とする)。このままではこの関数は微分できそうにない。そこで、まず、 $f(x) = a^x$  の両辺の対数をとると、

$$\ln f(x) = x \ln a \quad (6.31)$$

ここで両辺を微分する。左辺の微分は、合成関数の微分の公式から、

$$\{\ln f(x)\}' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (6.32)$$

右辺の微分は、 $\ln a$  である。従って、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln a \quad (6.33)$$

従って、

$$f'(x) = (\ln a)f(x) = (\ln a)a^x \quad (6.34)$$

となる。このように、両辺の対数をとってから微分するテクニックを 対数微分 という。

問 139 対数微分を使って、次式を示せ:

$$\frac{d}{dx} x^x = (1 + \ln x)x^x \quad (6.35)$$

ヒント:  $f(x) = x^x$  と置き、両辺の  $\ln$  をとって、それらを  $x$  で微分。 $x \ln x$  の微分は積の微分の公式を使う。

ちなみに、問 139 で考えた関数  $x^x$  のグラフは、図 6.6 のようになる。これを見ると、式 (6.35) が  $0$  になるとき、つまり  $x = 1/e$  で最小値をとることがわかる。

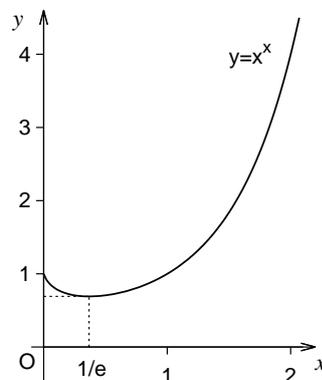


図 6.6  $y = x^x$  のグラフ。

よくある間違い 23  $x^x$  の微分を、「 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ 」という公式 (P.73 の式 (5.71)) に「当てはめ」て、 $(x^x)' = x x^{x-1} = x^x$  としてしまう ...  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  は、 $\alpha$  が定数のときにしか成り立ちません。この間違いでは、指数部分の  $x$  を  $\alpha$  に見立ててしまっていますが、 $x$  は定数ではないので、このような適用は許されません。それに、 $x = 1/e$  でこのグラフの傾きは 0 になっているので、そこでの微分係数は 0 のはず。でも、 $x^x$  に  $x = 1/e$  を入れたら、 $(1/e)^{1/e} = 0.692\dots$  で、0 になりません。だから、少なくとも  $x = 1/e$  では  $(x^x)' = x^x$  は成り立ちません。

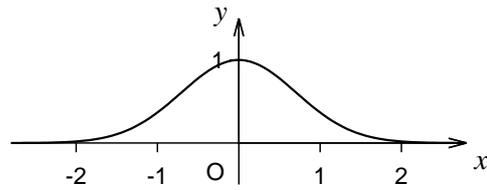


図 6.7 ガウス関数  $y = \exp(-x^2)$  のグラフ。常に  $y > 0$  なので、本当は  $x$  軸と重なることは無いのだが、 $x$  がある程度大きくなると、非常に速く  $x$  軸に接近するので、 $|x|$  が 3 や 4 くらいになったら  $x$  軸にぴったり重ねて描いてもかまわない (むしろその方が実情に近い)。

### 6.4 ガウス関数

$a$  を正の定数として、

$$f(x) = \exp(-ax^2) \tag{6.36}$$

という形の関数を ガウス関数 (Gauss function) という。ガウス関数は、統計学をはじめ、様々な分野で重要な関数なので、ここでいくつか性質を調べておこう。

問 140 ガウス関数に関して、以下のことを示せ：

- (1) 偶関数である。
- (2) 常に 0 より大きい。
- (3)  $f'(0) = 0$  である (だから  $x = 0$  での接線は水平)。
- (4)  $x$  が大きくなると、0 に近づいていく。
- (5)  $x = 0$  で最大値をとる。

これらから、ガウス関数のグラフは、 $x = 0$  を頂点とする、左右対称の山形のグラフになることが想像できる。

問 141 以上のことから、

- (1)  $a = 1$  のときのガウス関数のグラフを描け。
- (2)  $a$  が 1 より大きくなるとグラフはどう変わるか？

よくある間違い 24  $y = \exp(-x^2)$  のグラフを、 $y = e^{-x}$  のような左右非対称なグラフを描いたり、最大値のところまで尖ったグラフを描いてしまう。... 偶関数のグラフは左右対称でしょ？

### 6.5 対数グラフ

実験データの解析等で、軸が対数で目盛られたグラフをよく使う。図 6.8 は、横軸は普通目盛りだが縦軸が対数目盛になったグラフである。このように片方の軸が

対数目盛のグラフを 片対数グラフ という。対数軸には、以下のような特徴がある：

- "0" が存在しない。下に行くほど 0 に近づくが、決して 0 をグラフ上で表現することはできない。
- 太い目盛りをひとつ移動すれば値が 10 倍になる。
- 細い目盛りをひとつ移動すれば最上位の桁の値がひとつ増える。

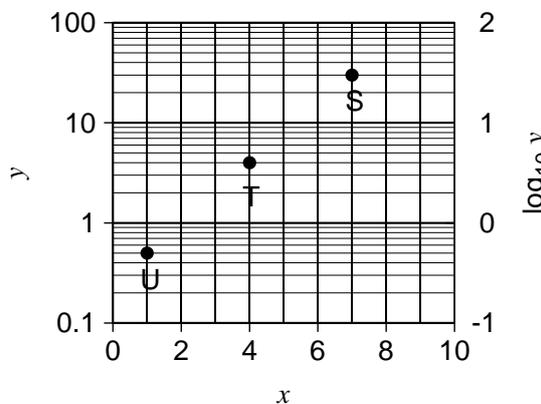


図 6.8 片対数グラフの例。左の軸に振られている目盛りは、対数にする前の値の目盛り (だから変な間隔になっている; グラフ上に点を打つときは便利)。右の軸に振られている目盛りは、対数にした後の値の目盛り。直線の傾きは右側の目盛りで求める。なお、世の中の多くの対数グラフでは、左のような軸が、右のような軸のどちらか片方だけが、左側に書かれている。

例えば図 6.8 で、点 S の値は (7, 30) である。点 S よりひとつ上の細目盛り線は  $y = 40$  の線である。点 T の値は (4, 4) である。

問 142 点 U の値を読み取れ。

このような変なグラフを使う理由は、2つある。ひとつには、対数目盛りを使うことで、非常に範囲の広い値を、ひとつのグラフにコンパクトに表現できるからである。例えば、0.1, 1, 10, 100 の4つのデータをふつうの目盛りにプロットすると、「100」だけが飛び抜けて上の方に行ってしまう一方、「0.1」と「1」はほとんど固まってしまっで見分けづらい。しかし対数目盛りにプロットすると、これらのデータは等間隔に並ぶのだ。

もうひとつの理由は、そもそも自然界に多く存在する指数関数的な現象（細菌の増殖、光の減衰、化学物質の一次反応などなど）の様子を調べるには、このグラフが好都合だというものだ。というのも、ある現象が、

$$y = Ae^{ax} \quad (6.37)$$

という関数（それは式(6.44)の形の微分方程式の解だった!）であらわされることが確実な場合、実験データによって定数  $A, a$  を決定したい、ということがよくある。その場合、上の式の両辺の常用対数をとると、

$$\log_{10} y = \log_{10} A + ax(\log_{10} e) \quad (6.38)$$

となる。この場合、 $\log_{10} y$  は  $x$  の一次関数（直線関係）になる。これを片対数グラフにプロットすると、その傾き ( $a \log_{10} e$ ) から  $a$  の値がわかり、切片（横軸の座標が0になるときの値;  $\log_{10} A$ ) から  $A$  の値がわかるのだ。

ただし、この方法で傾きを求める時には注意が必要だ。傾きは、縦軸方向の変化量を横軸方向の変化量で割れば求まるが、その時、縦軸（対数軸）方向の変化量は、実際の変化量（対数を取る前の  $y$  の変化量）でなくて、いったん対数に変換したあとの変化量 ( $\log_{10} y$  の変化量) である。例えば図6.8では、点Tと点Sでは、実際の変化量 ( $y$  の変化量) は、左側の軸で値を読み取って、 $30 - 4 = 26$  である。しかし、対数としての変化量 ( $\log_{10} y$  の変化量) は、右側の軸の値で考えねばならない。それにはまず、点Tから点Sまでの高さを定規で計り、一方で、太い目盛り線の間隔（右側の軸で1に相当する変化量; 左側の軸では「10倍」に相当する変化量）も定規で計り、前者を後者で割り算する。そうやって得たのが「縦軸の変化量」である。そして、

$$\text{傾き} = \frac{\text{縦軸の変化量}}{\text{横軸の変化量}} = a \log_{10} e \quad (6.39)$$

が成り立つ。従って、

$$a = \frac{1}{\log_{10} e} \frac{\text{縦軸の変化量}}{\text{横軸の変化量}} \doteq 2.3025 \frac{\text{縦軸の変化量}}{\text{横軸の変化量}} \quad (6.40)$$

によって  $a$  の値が求まる。ちなみに、もしも式(6.37)ではなく  $y = A \times 10^{ax}$  のような関数を想定していれば、式(6.40)の  $1/\log_{10} e$  や 2.3025 という数は必要ない。

問143 図6.8のグラフについて、3点S, T, Uを最もうまく結ぶようなひとつの直線を引いて、その傾きと切片から、 $y = Ae^{ax}$  の定数  $A$  と  $a$  の値を推定せよ。その際、定規で測定して得た数値と、それをもとに行った計算式も明記せよ。また、推定された  $A$  と  $a$  の値を用いて、3つの点S, T, Uは、うまく再現されるか?

図6.9は、横軸と縦軸が対数目盛になったグラフ用紙である。このようなグラフを 両対数グラフ という。

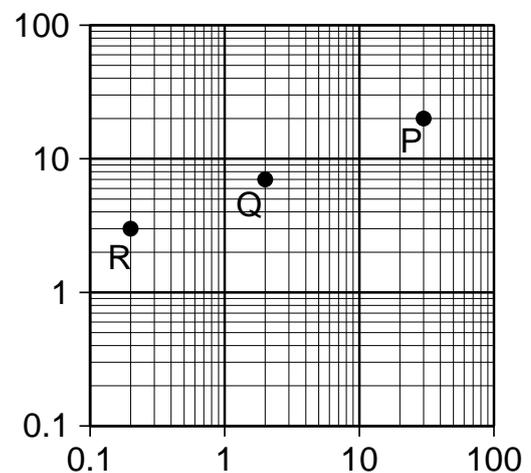


図6.9 両対数グラフの例。

例えばこのグラフで、点Pの座標は(30, 20)である。

問144 点Qと点Rの座標をそれぞれ読み取れ。

両対数グラフを使う理由は、まず、片対数グラフと同様に、非常に範囲の広い値を、ひとつのグラフにコンパクトに表現するためである。

もうひとつの理由は、指数関数に劣らぬくらいに自然界に多く存在する、べき関数的な現象<sup>\*3</sup>を調べるには、このグラフが好都合だというものだ。というのも、ある現象が、

$$y = Ax^a \quad (6.41)$$

<sup>\*3</sup> 例えば、本川達雄「ゾウの時間 ネズミの時間」(中公新書) 参照。ある種の現象がべき関数で表現できることを、power law とか scaling と呼ぶ。power とは「べき」のこと。

という関数(べき関数)であらわされる場合, 実験データによって定数  $A, a$  を決定したい, ということがよくある。その場合, 式 (6.41) の両辺の常用対数をとると,

$$\log_{10} y = \log_{10} A + a \log_{10} x \quad (6.42)$$

となる。従って, もし現象がべき関数的であるならば, そのデータを両対数グラフにプロットすると, 直線になり, その直線の傾き(適当な2点の間の, グラフ用紙上での横の距離と縦の距離を定規で測って, 後者を前者で割ればよい)が  $a$  の値であり, 切片( $\log_{10} x = 0$  となるとき  $y$  座標の値)が  $A$  の値なのだ\*4。

問 145 図 6.9 のグラフについて, 3 つの点 P, Q, R を最もうまく結ぶようなひとつの直線を引いて, その傾きと切片から,  $y = Ax^a$  の定数  $A$  と  $a$  の値を推定せよ。その際, 定規で測定して得た数値と, それをもとに行った計算式も明記せよ。また, 推定された  $A$  と  $a$  の値を用いて, 3 つの点 P, Q, R は, うまく再現されるか?

## 6.6 指数関数の微分方程式

ところで, 唐突ではあるが,

$$\frac{d}{dx} f(x) = 3f(x) \quad (6.43)$$

という式を考えよう。この式 (6.43) は, 関数  $f(x)$  に関する方程式とみなすことができる。一般に, 関数に関する方程式で, なおかつその関数の微分を含むような方程式を 微分方程式 という。式 (6.43) は一種の微分方程式である。

第3章で学んだ代数方程式は,  $x$  などで表される「数」に関する方程式だった。つまり, その「解」は数値である。一方, 微分方程式は,  $f(x)$  などで表される「関数」に関する方程式である。つまりその「解」は関数である。

さて, 例えば関数「 $f(x) = x^2$ 」は, 式 (6.43) の解だろうか? 式 (6.43) の左辺にこの関数を代入すると,  $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$  となるが, 右辺にこの関数を代入すると,  $3x^2$  となる。 $2x = 3x^2$  は恒等的には成り立たない( $x = 1$  や  $x = 2$  のときは成り立たない)。従って, 関数「 $f(x) = x^2$ 」は, 式 (6.43) の解ではない!

問 146 以下の関数が, 式 (6.43) の解であるかどうかを調べよ。注: (5)(6) は定数関数。

- |                |               |               |
|----------------|---------------|---------------|
| (1) $2x$       | (2) $2e^{3x}$ | (3) $3e^{2x}$ |
| (4) $-5e^{3x}$ | (5) $2$       | (6) $0$       |

ここでわかったように, ひとつの微分方程式には, 複数の解がありえるのだ。

ここでは証明しないが, 式 (6.43) の解は, 「定数  $\times e^{3x}$ 」という形の関数である, ということがわかっている。もっと一般的に言えば, 以下のような定理が知られている:

—— 定理 ——

$\alpha$  を 0 でない定数として,

$$\frac{d}{dx} f(x) = \alpha f(x) \quad (6.44)$$

という微分方程式の解(その方程式を恒等的に成り立たせるような関数)は,

$$f(x) = \beta e^{\alpha x} \quad (6.45)$$

という関数である ( $\beta$  は任意の定数)。

問 147 式 (6.45) は式 (6.44) の解であることを示せ。

よくある質問 77 式 (6.44) の解は式 (6.45) のような形の関数の他にはありえないのですか? ... その理由はまだ説明できません(いずれ説明します)が, ありえません。とりあえず今は, 式 (6.44) の形の微分方程式の例をいくつか経験して慣れてください。

式 (6.43) は, 式 (6.44) で  $\alpha = 3$  としたケースだったのだ。その解が複数あったのは, 式 (6.45) で  $\beta$  の値が何でもよかったからなのだ。

さて,  $\beta$  はどんな値でもよいのだが, 式 (6.45) で  $x = 0$  と置くと,

$$f(0) = \beta e^0 = \beta \quad (6.46)$$

となる。つまり,  $\beta = f(0)$  と表すことができる。これを式 (6.45) に入ると,

$$f(x) = f(0)e^{\alpha x} \quad (6.47)$$

となる。生物資源学類生にとって大事なことは, 「式 (6.44) の形の微分方程式の解は式 (6.47) である」ということだ。なぜなら, この形の微分方程式が, 生物資源学類の(数学以外の)様々な授業や実験, 研究でガンガン出てくるからである。

\*4 片対数グラフのときと違って, 両対数グラフは, 底が  $e$  のときも  $10$  のときも, 直線の傾きはかわらない。

## 6.7 放射性核種 (放射能) の崩壊

ここからは、指数・対数の応用例の話である。

炭素には、原子量 12 の普通の炭素原子の他に、原子量 13 の炭素原子と原子量 14 の炭素原子がある。一般に、同じ元素 (ここでは炭素) なのに互いに原子量が違う原子のことを、「同位体」(isotope) と呼ぶ。このうち、原子量 13 の炭素同位体 ( $^{13}\text{C}$ ) は安定で原子核崩壊しないが、原子量 14 の炭素同位体 ( $^{14}\text{C}$ ) は不安定なので徐々に原子核崩壊<sup>\*5</sup>をして、原子量 14 の窒素原子 ( $^{14}\text{N}$ ) に変わってしまう。この崩壊の様子を数学的に考えてみよう。

$^{14}\text{C}$  の個数を、時刻  $t$  の関数  $C(t)$  で表すことにしよう。いま、時刻 0 年で  $C_0$  モルの  $^{14}\text{C}$  があるとす (つまり、 $C_0 := C(0)$ )。これがどんどん崩壊して減っていくのだが、時刻  $t$  年目のとき  $C(t)$  モルであるとして、 $t$  年目から  $t + dt$  年目の間 (ごく短い時間を考える) に、その一部が放射性崩壊して別の元素 (窒素) に壊変する。その変化は、まず、そのときの個数  $C(t)$  に比例する。これは常識的に明らかで、母数 (崩壊するもとの原子の数) が倍になれば、一定時間内の崩壊回数も倍になる、というだけの話である。また、時間間隔  $dt$  にも比例する。これも、時間が長いほど崩壊もたくさん起きるだろうという常識的な判断による。ただし、 $dt$  が長すぎると、その間にも母数  $C(t)$  がどんどん減ってくるので、この判断は成り立たない。あくまで、 $dt$  が十分に短いことを想定した判断である。以上の考察から、

$$C(t + dt) = C(t) - \alpha C(t)dt \quad (6.48)$$

と書ける。 $\alpha$  はなんらかの定数である ( $0 < \alpha$  とする)。  $C(t)$  は減る方向なので、右辺第二項の符号はマイナスである。この式を変形すれば、

$$C(t + dt) - C(t) = -\alpha C(t)dt \quad (6.49)$$

両辺を  $dt$  で割ると、

$$\frac{C(t + dt) - C(t)}{dt} = -\alpha C(t) \quad (6.50)$$

ここで  $dt$  が十分に小さいことを考えると、左辺は  $C(t)$  の微分 (導関数) である。従って次式を得る:

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha C(t) \quad (6.51)$$

これが、放射性炭素の崩壊に関する微分方程式である。

式 (6.51) は、 $C$  を  $f$ 、 $t$  を  $x$ 、 $-\alpha$  を  $\alpha$  に読み替えると、式 (6.44) になる。従って、式 (6.51) の解は、式 (6.47) のようになるはずだから、

$$C(t) = C_0 e^{-\alpha t} \quad (6.52)$$

となる。従って、 $C_0$ 、つまり  $t = 0$  (つまり最初) のときの  $C$  の値がわかれば、式 (6.52) によって、その後の  $C$  がどのように変化するかが、予測できるのである。

問 148 放射性炭素の崩壊が式 (6.52) のように予測できることを説明せよ (上の議論を簡潔にまとめれば OK)。

ところで、放射性炭素の問題に戻ると、通常は、式 (6.52) のかわりに、次のような式がよく使われる:

$$C(t) = C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_h}} \quad (6.53)$$

$t_h$  は「半減期」と呼ばれる定数であり、 $^{14}\text{C}$  の場合、

$$t_h = 5730 \text{ 年} \quad (6.54)$$

であることが知られている。

問 149 式 (6.53) について、

- (1) 式 (6.53) を、横軸  $t$ 、縦軸  $C(t)$  のグラフにかけ。
- (2)  $C(t_h)$  はもとの値  $C_0$  の半分であることを確かめよ。この故に、 $t_h$  を半減期と呼ぶ。
- (3) 式 (6.53) を、式 (6.52) の形に変形せよ。ヒント:  $1/2 = \exp(-\ln 2)$
- (4) 半減期は、式 (6.52) の定数  $\alpha$  とどのような関係にあるか?
- (5) 式 (6.54) から、定数  $\alpha$  の値を求めよ。

上で、 $C_0$  がわかればその先のことが予測ができると書いたが、実際にこの式を使う場面では、むしろ、「 $C_0$  だけでなく現在の値  $C(t)$  もわかっているが、 $t$  がわからない」という状況の方が多い。それは、次のような状況である: 生物体は、生きている間は大気中の  $\text{CO}_2$  中の  $^{14}\text{C}$  と同じ比率の  $^{14}\text{C}$  を持っているが、死ぬと地球大気との交換が止まるので、 $^{14}\text{C}$  がだんだん減って行く。一方、地球大気中の  $^{14}\text{C}$  は、宇宙線によって生産されると崩壊するのがつりあって、常にほとんど一定の比率をし

\*5 この場合は、放射線 (ベータ線: 高速の電子線) を出しながら崩壊する「ベータ崩壊」。

ていることがわかっている (それが  $C_0$  に相当する)。これらのことから、昔に生きていた生物体の遺骸の現在の  $^{14}\text{C}$  の比率を調べることで、その生物が生きていた年代を推定するのだ\*6。

問 150 昔の火山噴火によってできた火山灰の地層の中から木の枝が出てきた。その木の枝の  $^{14}\text{C}$  の比率は、 $C_0$  の  $1/4$  であった。その木が埋まって死んだ年代、つまり火山噴火の起きた年代はいつごろか?

## 6.8 化学反応速度論

前節で考えたのと似たような話が、生物資源学類の「化学」や「化学実験」で出てくる。それは「化学反応速度論」だ。いろんな化学反応がどのくらい速く進むかを考える理論だ。ここでは単純に、一種類の化学物質 A が、別の化学物質 B と化学物質 C に分解するような場合:



の化学反応速度論を学ぼう。ただし反応は左から右に一方方向にしか進まないとする。

A の量 (モル濃度) を  $[A]$  と書く。 $[A]$  は時刻  $t$  の関数なので、 $[A](t)$  と書くべきだが、煩雑なので、基本的に「 $(t)$ 」は省略する。 $dt$  を微小な時間間隔とする。この  $dt$  の間に A から B+C に変化する反応の回数を考える: まず、物質 A の全体の中のある割合が物質 B と物質 C に変わると考えられるから、反応の回数は、A の現存量、つまり  $[A]$  に比例するだろう (量が 2 倍になれば、反応する回数も 2 倍になるだろう!)。そして、これは時間間隔  $dt$  にも比例するだろう (目の前で 1 秒間に 10 回の反応が起きているなら、2 秒間では 20 回の反応が起きるだろう!)。つまり、この回数は、ある正の定数  $k$  を用いて、

$$k[A] dt \quad (6.56)$$

と書けるはず。この回数のぶんだけ、 $[A]$  は減るわけだ。従って、 $dt$  の間の  $[A]$  の変化量  $d[A]$  は\*7、

$$d[A] = -k[A]dt \quad (6.57)$$

\*6 生物遺骸の年代推定は、防災科学において重要な情報を与えてくれる。例えば、過去の火山噴火や津波等によって形成された堆積物の層の中に、木片などの生物遺骸を見つければ、その年代を測ることで、その火山噴火や津波の起きた時期を知ることができる。そのような情報があれば、その地域で将来的に起こりうる災害の規模や頻度を想定することができる。それをもとに災害対策を立てることができる。

\*7  $d[A] = [A](t + dt) - [A](t)$  である。

となる。すなわち、 $[A]$  は、

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A] \quad (6.58)$$

という微分方程式を満たすはず\*8。ここで右辺にマイナスがついたのは、 $[A]$  が「減る」ことを表す。式 (6.58) の左辺は、 $[A]$  の変化の速さ、すなわち「反応速度」を意味する。式 (6.58) のように、反応速度が物質量の一次式で表現できるような化学反応を「1 次反応」という。 $k$  は「反応速度定数」と呼ばれ、主に反応の種類と温度、触媒の有無等によって決まる。詳しくは生物資源学類の「化学 I」の講義で習おう!

式 (6.58) は、 $[A]$  を  $f$ 、 $t$  を  $x$ 、 $-k$  を  $\alpha$  に読み替えると、式 (6.44) になる。従って、式 (6.58) の解は、式 (6.47) のようになるはずだから、

$$[A](t) = [A](0)e^{-kt} \quad (6.59)$$

となる。 $[A](0)$  は反応のスタート時点 (実験開始の時点) での  $[A]$  の値なので、実験者はわかっているはずだ (そういうのを調べないで実験を始める人は科学者ではない!)。従って、式 (6.59) によって、この反応中の物質 A の量がどう変化するかが、予測できるのである。

問 151 式 (6.55) のような化学反応が式 (6.59) のように予測できることを説明せよ。(上の議論を簡潔にまとめれば OK)。

生物資源学類の「化学実験」では、実際にこのような反応の例として、酢酸メチルという物質の加水分解を実験し、このような数学を使って解析する。他にも、農地に撒かれた農薬の残留性なども、このような数学で解析される。

## 6.9 ロジスティック曲線

$a, b, c$  を正の定数として、

$$f(x) = \frac{1}{a + be^{-cx}} \quad (6.60)$$

\*8 式 (6.57) から式 (6.58) への式変形を詳しく書くとうなる:

$$[A](t + dt) - [A](t) = -k[A]dt$$

$$\frac{[A](t + dt) - [A](t)}{dt} = -k[A]$$

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

という形の関数を、ロジスティック関数と呼ぶ。この関数は、生物学や統計学などでよく使う。どう使うかは先々のお楽しみにしとして、ここではこの関数のグラフを描いてみよう。

問 152

- (1)  $f(0) = 1/(a+b)$ であることを示せ。
- (2) 分母, すなわち  $a + be^{-cx}$  は,  $x$ が増えるにつれて減少することを示せ。
- (3)  $f(x)$  は,  $x$ が増えるにつれて増加することを示せ。
- (4)  $x \rightarrow \infty$  のとき,  $f(x)$  はどうなるか?
- (5)  $x \rightarrow -\infty$  のとき,  $f(x)$  はどうなるか?
- (6)  $f'(0)$  を求めよ。
- (7) 以上を元に,  $y = f(x)$  のグラフを手で描け。結果は図 6.10 のようになる。このグラフをロジスティック曲線と呼ぶ。

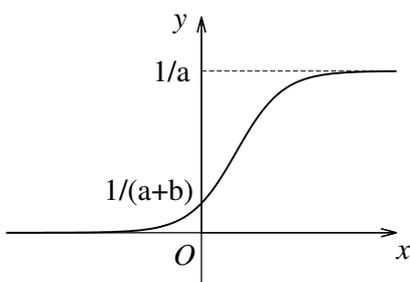


図 6.10 式 (6.60)(ロジスティック曲線) のグラフ。  
 $x = 0$  での接線の傾きは  $bc/(a+b)^2$

特に,  $a = b = 1$  のときは, 式 (6.60) はシグモイド関数と呼ばれる。これは, 生物の神経細胞の性質を表すのに使われ, 「ニューラルネット」と呼ばれる技術(いわゆる「ディープ・ラーニング」とか「人工知能」の一部)の基礎である。

よくある質問 78 微分 指数・対数 三角関数 積分の順番で勉強するのはなぜですか? ... 指数・対数・三角関数の理解に微分が役立つので, 微分を先にやります。指数・対数・三角関数は他の科目(物理・化学・各種実験等)で早く必要になるので, 早めにやります。というわけで, 積分が後になりました。

よくある質問 79 自分は今まで何もわかっていなかったということを痛感しました。... 「無知の知」(ソクラテス) ってやつですね。知性の出発点です。

よくある質問 80 やっぱり, 分かっているつもりでも実際に問題を解いてみると全然分かってなかったことに気づいた。... だから「読んで理解する」だけではダメです。

よくある質問 81 みんなより出来なさ過ぎて焦ります。... 人は人, 自分は自分。急がず焦らずコツコツやり続ければ, 必ず追いつけます。

よくある質問 82 質問に行ったらすごくよくわかり, すっきりしました。... 聞くは一時の恥, 聞かぬは一生の損。いつでもおいで。

## 演習問題

演習問題 17 福島第一原子力発電所の事故では, 2011年3月15日前後に, 大量の放射性物質が放出されてしまい, 各地に降下した。そのとき放出された放射性物質は, 徐々に崩壊して減っている。以下の放射性物質は, 事故後1800日(約5年)たった現在, 当初の何倍になったか? (有効数字2桁で)

- (1) ヨウ素 131 ( $^{131}\text{I}$ ; 半減期 8.02 日)
- (2) セシウム 134 ( $^{134}\text{Cs}$ ; 半減期 2.07 年)
- (3) セシウム 137 ( $^{137}\text{Cs}$ ; 半減期 30.1 年)

ヒント: 式 (6.53) を用いて  $C(t)/C(0)$  を求めればよい。

演習問題 18 君は「ベクレル」(Bq) という単位を聞いたことがあるだろうか? これは, 放射性物質が1秒間に崩壊する個数<sup>\*9</sup>を表し, その放射性物質がどのくらいあるかを間接的に表す指標になる。ある食品に含まれる $^{137}\text{Cs}$ は, 200 Bqであった(1秒間あたり200回の崩壊を起こした)。この食品には, 何個の $^{137}\text{Cs}$ が含まれているか? (有効数字2桁で) ヒント: 式 (6.49) を使う。左辺は変化した個数を表しているから, ここでは  $-200$  個。右辺の  $C(t)$  が未知数。  $dt=1$  秒。  $\alpha$  は前問で示された半減期から求める。

演習問題 19 対数微分を使わないで, 関数  $a^x$  と関数  $x^x$  をそれぞれ微分せよ ( $1 < a$ )。ヒント:  $a = e^{\ln a}$  を使って,  $a^x = (e^{\ln a})^x$  と変形。同様に,  $x^x = (e^{\ln x})^x$ 。そして指数法則, そして合成関数の微分。

演習問題 20 森林や草原, 農地では, 植物の葉が地表を覆うことで土壌浸食を抑制する。この効果を調べるために, 葉の量と地表面被覆率の関係を調べよう。

- (1)  $1 \text{ m}^2$  の地表の上に,  $0.01 \text{ m}^2 (100 \text{ cm}^2)$  の水平な葉

\*9 崩壊するときに放射線が発せられるので, それを検知することによって, 崩壊する個数は比較的容易に計測できる。

が1枚あれば、地表面の1%が被覆される(被覆率0.01)。では $1\text{ m}^2$ の地表の上に、1枚あたり $p\text{ m}^2$ の水平な葉が $n$ 枚、ランダムに分布するとき、葉による地表面の被覆率 $F$ は、

$$F = 1 - (1 - p)^n \tag{6.61}$$

となることを示せ(葉の重なりがあることに注意せよ)。

- (2)  $1\text{ m}^2$ の地表の上に存在する葉の総面積が一定値 $L\text{ m}^2$ であるとする。すなわち、

$$np = L \tag{6.62}$$

である。 $F$ を $n$ と $L$ であらわせ( $p$ を消去せよ)。

- (3) 式(6.62)の $L$ が一定、という条件のもとで、 $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$ のとき、

$$F = 1 - e^{-L} \tag{6.63}$$

となることを示せ。これは、1枚1枚の葉の大きさが十分小さいとみなせるときに、葉が全体として地表面を覆う割合を与える理論である。

- (4)  $1\text{ m}^2$ の地表の上にある葉の総面積が $1\text{ m}^2$ のときに地表面を覆う割合は、どのくらいか？

演習問題 21 地震のエネルギーは、マグニチュードという指標であらわされることが多い。地震のエネルギーを $E$ とすると、マグニチュード $M$ は、次式で定義される：

$$\log_{10} \frac{E}{1\text{ J}} = 4.8 + 1.5M \tag{6.64}$$

- (1) 1995年の兵庫県南部地震(いわゆる阪神大震災)では、 $M = 7.2$ であったとされる。このときの地震のエネルギーはどのくらいか？
- (2) マグニチュードが1増えると、地震のエネルギーは何倍になるか？
- (3) 2011年の東北地方太平洋沖地震(いわゆる東日本大震災)では、 $M = 9.0$ であったとされる。このときの地震のエネルギーはどのくらいか？それは、兵庫県南部地震の何倍か？
- (4) 日本人は、平均的に、1人あたり1 kWの電力を消費する。東北地方太平洋沖地震で放出されたエネルギーは、日本人全員(約1億人)が使う電力量の何年分に相当するか？
- (5) 地震の「震度」と「マグニチュード」は、どう違うか？

問題の解答

答 123 下図参照。

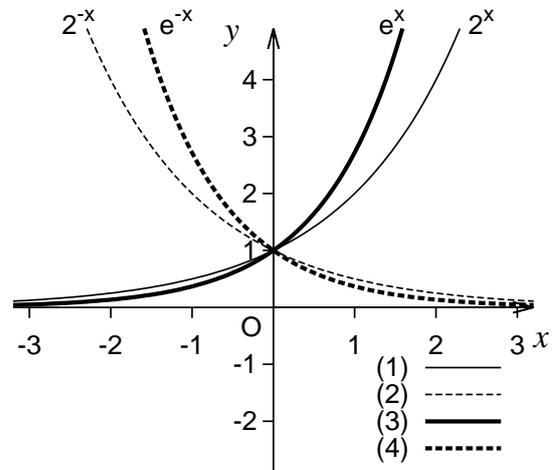


図 6.11 問 123 の答え。

答 124 略 ( $n = 100$  のとき  $2.70 \dots$  となる)。

答 125 略 (がんばれ!)

答 126 略 ( $n = 10000$  のとき  $7.3875 \dots$  となる。それに対して、 $e^2 = 7.3890 \dots$ 。)

答 127 略。どちらも最初の2桁は2.7になるはず。

答 128  $(1 + 0.02)^{100} = (1 + 2/100)^{100}$  の値を求めればよい。式(6.5)より、これは  $e^2 = 7.38 \dots$  に近いはず。ちなみに、厳密に計算すれば、 $(1 + 0.02)^{100} = 7.24 \dots$  倍となる。

答 129 (1)  $n$ 年に1回起きるのだから、今からの1年間がたまたまその1回にあたる確率は $1/n$ 。従って、あたらない(豪雨が起きない)確率は $1 - 1/n$ 。(2)「1年間で1回も起きない」が2回続くと考えて、 $(1 - 1/n)^2$ 。(3)以降は略。

答 130 略。ヒント:  $x = 0$ での $y$ の値をまず考えてみよう。その次に、 $x$ が $\infty$ と $-\infty$ に行く時のそれぞれについて、 $y$ の値がどうなっていくか考えてみよう。

答 131

- (1)  $e^x$  (2)  $2e^{2x}$   
 (3)  $-2x \exp(-x^2)$  (4)  $(1 - 2x^2) \exp(-x^2)$

答 132 (略解)

- (1) 対数の定義より自明。

(2)  $a^1 = a$  より自明。

(3)  $a^0 = 1$  より自明。

(4)

$$a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} a^{\log_a c} = bc = a^{\log_a bc}$$

従って,  $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$  ■

(5)  $0 = \log_a 1 = \log_a \{b \times (1/b)\} = \log_a b + \log_a (1/b)$

従って,  $\log_a (1/b) = -\log_a b$  ■

(6) (4)(5) より明らか。

(7) 左辺を指数として  $a$  の肩にのせると, (1) より,

$$a^{\log_a b^c} = b^c$$

一方, 右辺を指数として  $a$  の肩にのせると,

$$a^{c \log_a b} = a^{(\log_a b)^c} = (a^{\log_a b})^c = b^c$$

これらは等しいから, 左辺=右辺。 ■

(8) 左辺を指数として  $a$  の肩にのせると,

$$a^{\log_a b \log_b c} = (a^{\log_a b})^{\log_b c} = b^{\log_b c} = c$$

一方, 右辺を指数として  $a$  の肩にのせると,

$$a^{\log_a c} = c$$

これらは等しいから, 左辺=右辺。 ■

(9) 式 (6.21) で,  $c$  を  $a$  とおくと,

$$(\log_a b)(\log_b a) = \log_a a = 1$$

この両辺を  $\log_b a$  で割ると, 与式を得る。 ■

(10) 式 (6.21) で,  $a$  を  $c$ ,  $b$  を  $a$ ,  $c$  を  $b$  におきかえると,

$$(\log_c a)(\log_a b) = \log_c b$$

この両辺を  $\log_c a$  で割ると, 与式を得る。 ■

答 133

(1)  $\log_2 7 = (\ln 7)/(\ln 2) \approx 2.807$

(2)  $\log_{0.3} 5 = (\ln 5)/(\ln 0.3) \approx -1.337$

答 134 略。式 (6.21) を使う。

答 135 略。(3) は式 (6.21) を使う。

答 136 図 6.12 参照。

答 137

(1)

$$\frac{d}{dx} \ln(x+1) = \frac{1}{x+1} \times (x+1)' = \frac{1}{x+1}$$

(2)

$$\frac{d}{dx} \ln(2x) = \frac{1}{2x} \times (2x)' = \frac{1}{x}$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \frac{x-1}{x+1} &= \frac{d}{dx} \{\ln(x-1) - \ln(x+1)\} \\ &= \frac{1}{x-1} \times (x-1)' - \frac{1}{x+1} \times (x+1)' \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1} \end{aligned}$$

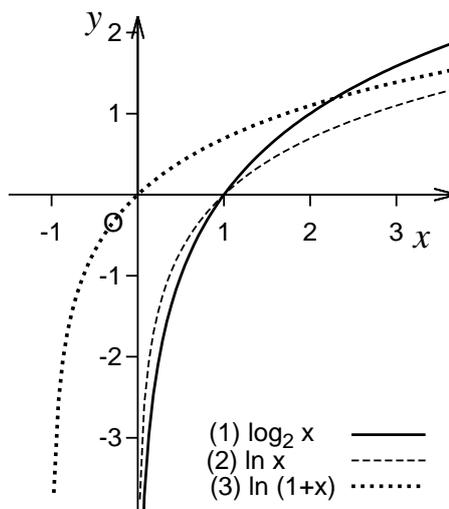


図 6.12 問 136 の答え。

答 138 略。

答 139  $f(x) = x^x$  の両辺の対数をとると,

$\ln f(x) = x \ln x$ 。この両辺を微分する。左辺の微分は  $f'(x)/f(x)$ 。右辺の微分は  $\ln x + 1$  である。

従って,  $f'(x)/f(x) = \ln x + 1$ 。

従って,  $f'(x) = (\ln x + 1)f(x) = (1 + \ln x)x^x$  ■

答 140  $f(x) = \exp(-ax^2)$  として ( $a$  は実数の定数),

(1)  $f(-x) = \exp\{-a(-x)^2\} = \exp(-ax^2) = f(x)$ 。  
従って偶関数。

(2)  $e = 2.718\dots$  は 0 より大きいから, それを何乗しても 0 以下にはならない。

(3)  $f'(x) = -2ax \exp(-ax^2)$ 。これに  $x = 0$  を代入すると 0。

(4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-ax^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{ax^2}} \quad (6.65)$$

である。  $0 < a$  だから,  $x \rightarrow \infty$  のとき,  $ax^2 \rightarrow \infty$

である。従って、 $e^{ax^2} \rightarrow \infty$  である。すなわち、式 (6.65) の右辺の分母は  $\infty$  に発散する。従って、式 (6.65) は 0 に収束する。

- (5)  $0 \leq x$  では、 $e^{-ax^2}$  は、減少関数である。従って、 $x = 0$  のとき最大値をとる。 $e^{-ax^2}$  は偶関数なので、 $x \leq 0$  でも  $x = 0$  のとき最大値をとる。従って、 $e^{-ax^2}$  は  $x = 0$  のとき、最大。

答 141

- (1) 本文の図のとおり。  
 (2)  $\exp(-ax^2) = \exp\{-(\sqrt{a}x)^2\}$  だから、 $a$  が大きくなると、グラフは  $x$  軸方向に  $1/\sqrt{a}$  倍になる。つまり、山型の幅が狭くなる。

答 142 (1, 0.5)

答 143 略 ( $a = 0.69$ ,  $A = 0.25$  程度になるはず (多少違って構わない)。それを用いて S, T, U の  $y$  の値を計算してみることに)。

答 144 点 Q: (2, 7), 点 R: (0.2, 3)

答 145 略 ( $a = 0.375$ ,  $A = 5.5$  程度になるはず (多少違って構わない)。それを用いて P, Q, R の  $y$  の値を計算してみることに。A を求めるときの「切片」は、このグラフの左端ではなく、 $x = 1$  のところの縦線に交わる時の値であることに注意)。

答 146 (1)  $f(x) = 2x$  として、式 (6.43) の左辺と右辺にそれぞれ代入すると、左辺  $= (2x)' = 2$ , 右辺  $= 3(2x) = 6x$  となり、左辺と右辺は恒等的には一致しない。従って、この関数は式 (6.43) を満たさない (解ではない)。  
 (2) 以下は略。(解であるのは (2), (4), (6) だけ)

答 147 略。

答 148 略。

答 149

- (1) 図 6.13 のとおり。  
 (2) 略。  
 (3) 略解:  $C = C_0 \exp[-(\ln 2)t/t_h]$  (導出過程も書くこと)  
 (4)  $\alpha = (\ln 2)/t_h$   
 (5)  $\alpha = (\ln 2)/(5730 \text{ 年}) \doteq 1.21 \times 10^{-4}/\text{年}$  ... 必ず単位を!

答 150  $C = C_0/4$  なので、 $t = 2t_h = 11460$  年くらい前

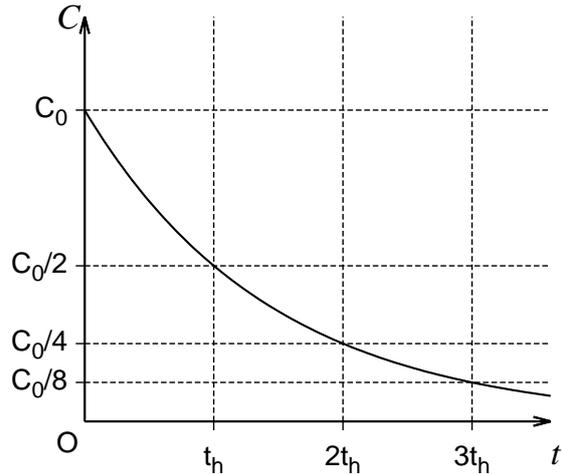


図 6.13 放射性炭素 14 の量の変化。

(11500 年でも可)。

答 151 略。

答 152 略。

## 第7章

# 三角関数

過去の受講生の言葉: 「友人に教えてたら, 自分もわかっていなかったことに気づきました」

### 7.1 三平方の定理

まず, 中学校で習った 三平方の定理 (ピタゴラスの定理) を復習しておこう。

問 153 三平方の定理を証明しよう。直角三角形 ABC を考える。角 C が直角であるとする。点 C から辺 AB に下ろした垂線の足を点 D とする。(図 7.1)

- (1) 三角形 ABC と三角形 ACD は相似であることを示せ。
- (2) そのことから,  $AB:AC=AC:AD$ , すなわち  $AB \times AD = AC^2$  であることを示せ。
- (3) 三角形 ABC と三角形 CBD は相似であることを示せ。
- (4) そのことから,  $AB:BC=BC:BD$ , すなわち  $AB \times BD = BC^2$  であることを示せ。
- (5) 以上と  $AB = AD + BD$  より次式を示せ:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad (7.1)$$

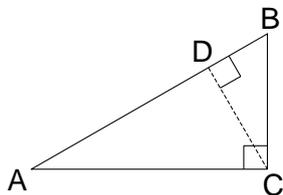


図 7.1 三平方の定理の証明に使う図

### 7.2 弧度法

高校初年級までの数学や, 一般社会では, 角の大きさを「度」で表現することが多い。「度」は, 一周を 360 度とする表現である。360 という数字と円の本質的な性質

の間には, 数学的な必然性はない。たぶん, 子だくさんの家族で, 丸いケーキを分ける時に, いろんな数で割り切れる 360 という数が好まれたのだろう!

角を「度」で表すときは, 細かい数字を小数で表す場合と, 「分」「秒」という補助単位を使って表す場合(度分秒表記)がある。60 分=1 度, 60 秒=1 分である。度, 分, 秒は, それぞれ $^{\circ}$ 、 $'$ 、 $''$  という記号で表してもよい。例えば, 「36 度 6 分 42.5 秒」は, 「 $36^{\circ} 6' 42.5''$ 」と表す。

例 7.1 「36 度 6 分 42.5 秒」という角を, 度だけで(分や秒を使わずに)表してみよう。60 秒=1 分なので, 1 秒  $= (1/60)$  分である。

従って,  $42.5 \text{ 秒} = 42.5 \times (1/60) \text{ 分} \doteq 0.7083 \text{ 分}$

従って,  $6 \text{ 分 } 42.5 \text{ 秒} \doteq 6 + 0.7083 \text{ 分} = 6.7083 \text{ 分}$

また, 60 分=1 度なので, 1 分  $= (1/60)$  度である。

従って,  $6.7083 \text{ 分} = 6.7083 \times (1/60) \text{ 度} \doteq 0.11181 \text{ 度}$

従って,  $36 \text{ 度 } 6 \text{ 分 } 42.5 \text{ 秒} \doteq 36 + 0.11181 \text{ 度}$

$= 36.11181 \text{ 度}$ 。

例 7.2 「140.10217 度」という角を, 度分秒表記してみよう。小数点以下の 0.10217 度は分や秒の単位で表されるはずだ。1 度=60 分なので,

$$0.10217 \text{ 度} = 0.10217 \times 60 \text{ 分} = 6.1302 \text{ 分}$$

となる。従って, 分の単位の値は 6 であり, 小数点以下の 0.1302 分は秒単位で表されるはずだ。従って,

$$0.1302 \text{ 分} = 0.1302 \times 60 \text{ 秒} = 7.812 \text{ 秒}$$

従って,  $140.10217 \text{ 度} \doteq 140 \text{ 度 } 6 \text{ 分 } 7.81 \text{ 秒}$ 。(例おわり)

一方, 高校の上級(数 II・数 B 以降)や大学の数学・物理学では, 以下で定義される ラジアン (radian) という単位で角を表すことが多い:

半径 1 の円を切り取ってできる扇形において, その頂角を, 扇形の弧の長さで表す(図 7.2)。これを 弧度法 と呼ぶ。弧度法での角度の単位を ラジアン という。

例 7.3 円を 4 つの扇型で等分すると, 1 つの扇形の

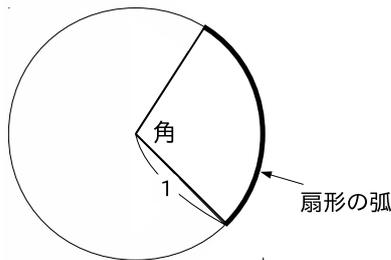


図 7.2 弧度法

頂角は 90 度。半径が 1 なら、その扇形の弧の長さは、 $2\pi/4 = \pi/2$ 。従って、 $90 \text{ 度} = \pi/2 \text{ ラジアン}$  である。

例 7.4 半径 1, 中心角 360 度の「扇形」は、円全体である。その「弧」は円周全体だから、長さは、 $2\pi$  である。従って、 $360 \text{ 度} = 2\pi \text{ ラジアン}$  である。(例おわり)

弧度法 (ラジアンで角度を表すこと) は、あまり直感的ではないが、数学的には自然である。後に学ぶが、例えば、弧度法では、三角関数をうまく微分できたり、指数関数と三角関数を統一的に扱える。

度からラジアンへの換算法を学ぼう: 半径 1 の円を切り取る扇形を考えると、扇形の頂角を度で表したものと弧長 (ラジアン) は比例する。従って度とラジアンは比例する。ところで例 7.4 より、 $360 \text{ 度}$  は  $2\pi \text{ ラジアン}$  なので、

$$1 \text{ 度} = \frac{2\pi}{360} \text{ ラジアン} = \frac{\pi}{180} \text{ ラジアン} \quad (7.2)$$

となる。この式の左辺と右辺をそれぞれ  $x$  倍すれば、

$$x \text{ 度} = \frac{\pi}{180} x \text{ ラジアン} \quad (7.3)$$

となる。また、この式 (7.3) の両辺を  $180/\pi$  倍して左辺と右辺を入れ替えれば、

$$x \text{ ラジアン} = \frac{180}{\pi} x \text{ 度} \quad (7.4)$$

となる。式 (7.3), 式 (7.4) を使えば、「度」とラジアンを相互に変換できる。

ところで、角度をラジアンで表記するときは、多くの場合は、慣習的に「ラジアン」という単位を省略する。例えば、「ある角は  $\pi/2$  ラジアンである」という記述は「ある角は  $\pi/2$  である」としてもよい。

よくある質問 83 単位は省略してはいけないのではなかったんですか? ... ラジアンの定義の中で、「半径 1」とあったで

しょ? その 1 には単位はついていません。つまり無次元量です。従って、この円の大きさは無次元量で表しています。従って弧の長さも無次元量です。従って、「 $\pi/2$  ラジアン」は無次元量であり、「ラジアン」という単位自体も無次元量なのです。本来、無次元量を表すのに単位は必要ありません。

よくある質問 84 うーん、よくわかりません ... では、こう考えましょう。円の半径を  $r$  とし、弧の長さを  $l$  とすると、 $l/r$  が、その扇形の頂角をラジアンで表したものになります。ところが、 $r$  も  $l$  も「長さ」という次元の量なので、その比は無次元量です。つまりラジアンで表した角は、無次元量です。

問 154 角の大きさの表現法「ラジアン」を定義せよ。また、「度」から「ラジアン」へ変換する式を示せ。

問 155 以下の角を、「度」からラジアンへ変換せよ。

- (1)  $90^\circ$  (2)  $45^\circ$  (3)  $180^\circ$  (4)  $30^\circ$  (5)  $1^\circ$

問 156 以下の角を、ラジアンから「度」へ変換せよ。

- (1)  $\pi$  (2)  $\pi/3$  (3)  $2\pi$  (4)  $\pi/4$  (5) 1

前問で、1 ラジアンは  $180/\pi$  度であることがわかった。 $\pi$  は約 3 なので、1 ラジアンは約 60 度である ( $57.2957\dots$  度)。このことは、弧度法の定義に戻れば直感的に理解できる: 半径 1 で頂角 1 ラジアンの扇形では、弧度法の定義によって、半径と弧長がともに 1 である。この扇形は、正三角形の 1 つの辺を円弧に変形したものと考えることもできるから、頂角は正三角形の角 60 度に近いだろう (図 7.3)。

そもそも、角は 0 以上  $2\pi$  以下なのだが、数学では便宜上、0 未満や  $2\pi$  より大きい角を考えたりする。そういう角は、 $2\pi$  を適当に足し引きして、0 以上  $2\pi$  未満の範囲の角に帰着すればよい。例えば  $3\pi$  の角とは  $2\pi + \pi$  の角、つまり 1 周してさらに  $\pi$  回った角と考え、 $2\pi$  を余分とみなし、要するに  $\pi$  の角と同じ、と考える。

よくある質問 85 なら、要するに  $3\pi = \pi$  と書いていいのですか? ... それは微妙です。もしそれが許されるなら、両辺を 2 で割ってみましょう。 $3\pi/2 = \pi/2$  になっちゃいますね。度で言えば、この左辺は 270 度、右辺は 90 度です。変ですよ。

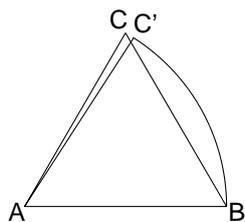


図 7.3 1 ラジアン概念図。AB=BC=CA=1 とする。正三角形 ABC を少し歪ませると、扇形 ABC' になる。辺 BC と弧 BC' は同じ長さ 1 である。角 BAC は  $\pi/3$  ラジアン (60 度)、角 BAC' は 1 ラジアンである。この図から、1 ラジアンは 60 度に近い角であることが直感的に理解できるだろう。

だから、「何周か余分に回った角」どうしを等号で結ぶのは、やめておきましょう。

問 157 以下の角と同じになるような、0 以上  $2\pi$  未満の角を述べよ。

- (1)  $-\pi$       (2)  $3\pi$       (3)  $-6\pi$

よくある質問 86 ラジアンを定義せよという問題で、「180 度を  $\pi$  とする」と書いたら不正解になりました。なぜ? ... その解答では、180 度以外の角、たとえば 90 度とか 20 度とかについて定義できないからダメなのです。

でも、90 度は 180 度の半分だから、 $\pi$  の半分で  $\pi/2$  というふうに解釈できると思います。... 度が半分になったらラジアンも半分になる、という定義は書かなかったでしょ? それが無いと、P.30 の演習問題 4 のような変なことが起きるかもよ!

でも、このテキストでは一周を 360 度とする、と書いてありますよ。半周や 0.1 周とかはどうなるのか、度では定義できていないじゃないですか! ... そうです。だからこのテキストは度でなくラジアンで話を進めるのです。度をきちんと定義したければ、まずラジアンを「単位円周を切りとる弧の長さ」と定義し、ラジアンから度への換算式を書けばよいのです。

よくある間違い 25 角の大きさを、ラジアンで表してるのか度で表してるのが混乱する ... テキストの練習問題などでは、ラジアン表記の角にはたいてい  $\pi$  が入っているので混乱しにくいですが、関数電卓やパソコンで計算する時は、ラジアンでも度でも、一見、ただの数値ですので、この手のミスをしがちです。度で表す場合は数値に必ず「度」か「°」をつけねばなりません。単位を忘れて単位を落とす!

### 7.3 弧度法の応用: ビッターリッヒ法

弧度法の考え方の応用例を紹介する (高校数学を手取り早く自習したい人はこの節は飛ばしてもよい)。

問 158 生物資源学類を卒業し、森林科学者になった君は、森林による炭素固定量の調査のために、東南アジアの森林に出かけた。すると、その森の材積量 (単位面積あたり、どのくらいの体積の木質が蓄積されているか) を推定するために、まず胸高断面積 (人の胸のあたりの高さで木をぜんぶ切ったとして、その切口の面積の合計) を簡易的に推定するように依頼された。君は、筑波大学で習ったことを思い出し、以下のような測定を行った。

まず君は、森林内の 1 箇所に立ち、片腕を水平に伸ばし、親指を立てて、ぐるっと 1 回転しながら、幹の太さが親指の陰に隠れない木の本数  $N$  を数えた。片腕を水平に伸ばしたとき、君の親指は、君の水平方向の視角のうち  $\theta$  ラジアンをさえぎるとする。君の親指の幅を  $a$ 、君の腕の長さを  $l$  とする。

- (1)  $\theta \doteq a/l$  であることを示せ。  
 (2) 君の立ち位置から距離  $R$  にある、胸高直径  $d$  の木の幹が、君の親指にちょうどぴたり隠れるとき、

$$d = R\theta \quad (7.5)$$

であることを示せ。

- (3) 林の木は全て等しい胸高直径  $d$  を持つとしよう。上の式で決まる  $R$  よりも遠いところにある木は、君の親指に隠れてしまう。このことから、 $N$  は君の立ち位置を中心とする半径  $R = d/\theta$  の円内の木の本数であることを示せ。  
 (4) この円内の面積を  $A$ 、この円内にある木の胸高断面積の合計を  $B$  とすると、

$$A = \pi R^2 \quad (7.6)$$

$$B = N\pi d^2/4 \quad (7.7)$$

であることを示せ。ただし木の断面は全て円形であると仮定する。

- (5) この円内で、単位面積あたりの胸高断面積は、

$$\frac{B}{A} = \frac{N\theta^2}{4} \quad (7.8)$$

となることを示せ。

- (6)  $a = 2$  cm,  $l = 60$  cm,  $N = 10$  のとき、単位面積あたりの胸高断面積はどのくらいか?  
 (7) この方法は、どんな太さの木からなる林についても

有効であることを示せ。

- (8) この方法は、さまざまな太さの木が混在する林についても有効であることを示せ。

注：この方法は、森林の胸高断面積を、驚くほどの簡便さで推定する方法であり、「ビッターリッヒ (Bitterlich) 法」という。一般に、森林の材積量などを現場で正確に見積もるのは容易ではない。それを研究する分野を「森林計測学」という。

### 7.4 三角関数

半径 1 の円を 単位円 (unit circle) と呼ぶ。

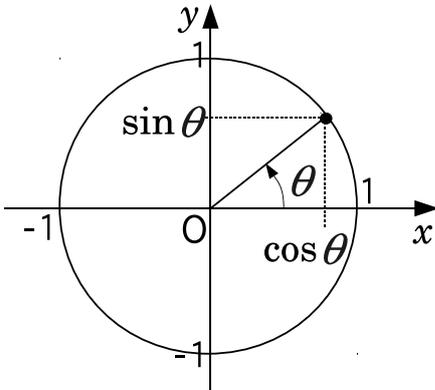


図 7.4 単位円による,  $\cos \theta, \sin \theta$  の定義

$xy$  平面上で、原点を中心とする単位円の上で、 $(1, 0)$  から左回りに角  $\theta$  にある点の、 $x$  座標を  $\cos \theta$ 、 $y$  座標を  $\sin \theta$  と定義する。 $\sin \theta / \cos \theta$  を  $\tan \theta$  と定義する (図 7.4)。

$\cos \theta, \sin \theta, \tan \theta$  のことを、三角関数 (trigonometry) と呼ぶ。 $\cos$  は「コサイン」、 $\sin$  は「サイン」、 $\tan$  は「タンジェント」と読む。コサインを「余弦」、サインを「正弦」、タンジェントを「正接」と呼ぶこともある。

問 159 単位円とは何か?

問 160 角  $\theta$  について、 $\cos \theta, \sin \theta, \tan \theta$  のそれぞれを定義せよ。

よくある質問 87 上の問題で、「単位円上の点の  $x$  座標を  $\cos \theta$ 、 $y$  座標を  $\sin \theta$ 、 $\sin \theta / \cos \theta$  を  $\tan \theta$  という、と書いたら不正解になりました。なぜ? ... その答案では  $\theta$  が何にあたるのか明言されていないからです。

問 161  $\cos \theta$  や  $\sin \theta$  は、全ての実数  $\theta$  について  $-1$

から 1 の範囲の値をとることを示せ。ヒント：単位円の上の点の座標はどのような範囲を動くか?

問 162 以下の角  $\theta$  について、正弦 ( $\sin \theta$  のこと)、余弦 ( $\cos \theta$  のこと)、正接 ( $\tan \theta$  のこと) の値をそれぞれ求めよ (表にせよ)。最後の 4 問は、関数電卓を使う。

(14)(15)(16) の単位はラジアン。

- (1)  $0^\circ$     (2)  $30^\circ$     (3)  $45^\circ$     (4)  $60^\circ$   
 (5)  $90^\circ$     (6)  $120^\circ$     (7)  $180^\circ$     (8)  $270^\circ$   
 (9)  $-30^\circ$     (10)  $\pi/6$     (11)  $\pi/4$     (12)  $\pi/3$   
 (13)  $1^\circ$     (14) 1    (15) 0.1    (16) 0.01

注：関数電卓で三角関数を計算するときは、その関数電卓が角を「ラジアン」で解釈するのか「度」で解釈するのか、どちらのモードにあるのかを確認する必要がある。画面の端っこに、RAD とか R という表示が小さく出ているならおそらくラジアンモードだし、DEG とか D という表示が小さく出ているなら、おそらく度モードである。確認するには、90 を与えて  $\sin$  を計算させてみることである。その結果が 1 ならば度モードだし、1 以外の数値 (0.893...) ならばラジアンモードだ。多くの関数電卓は、これらのモードを切り替えることができる。P.8 の図 1.1 の左上あたりのように、多くの関数電卓には、shift というキーと MODE というキーがある。これらを使って切り替えるのだ。そのやりかたはそれぞれ関数電卓によって異なるので、いろいろ試してみよう。どうしても切り替え方がわからなければ、式 (7.3) や式 (7.4) を使ってラジアンと度を変換して計算すればよい。

前問の (15), (16) の経験から、ラジアンで表現すれば、 $\theta$  が 0 に近ければ近いほど、

$$\sin \theta \doteq \theta \text{ かつ } \tan \theta \doteq \theta \tag{7.9}$$

であることがわかるだろう。

ちなみに、あまり使わないが、 $\cos$  と  $\sin$  の逆数には、 $\sec$  (セカント) と  $\operatorname{cosec}$  (コセカント) という名前がついている:

$$\sec \theta := \frac{1}{\cos \theta}, \quad \operatorname{cosec} \theta := \frac{1}{\sin \theta} \tag{7.10}$$

### 7.5 三角関数の公式

三角関数には以下のように、たくさん公式 (定理) がある。それらを覚えるのが苦手、という人も多いが、定義に戻って考えれば簡単なことばかりである。忘れてもその場で自力で証明できるくらいに理解すればいいの

だ。以下、 $\theta$  を任意の角とする。

まず、次の式が成り立つ：

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (7.11)$$

なぜか？ 原点から点  $(\cos \theta, \sin \theta)$  までの距離は、三平方の定理から、 $\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$ 。一方、定義より  $(\cos \theta, \sin \theta)$  で表される点は単位円上にあるので、原点からの距離は 1。従って、 $\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$ 。両辺を 2 乗すると式 (7.11) を得る。

角は  $2\pi$  ラジアンでひとまわりなので、 $\theta$  と  $\theta + 2\pi$  は同じ角を意味する。従って、次の 2 つの式が成り立つ：

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta \quad (7.12)$$

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta \quad (7.13)$$

すなわち、 $\sin$  や  $\cos$  は、 $2\pi$  ごとに、同じ値が繰り返して出てくるのだ。

さて、図 7.5 のように、 $-\theta$  という角は、 $x$  軸から逆まわり (右回り; 時計回り) に  $\theta$  だけ回った角である。それは、 $\theta$  という角 ( $x$  軸から左回りで回った角) とは、 $x$  軸に関して対称の位置にある。従って、 $(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$

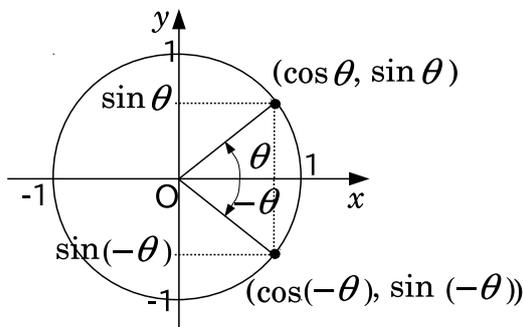


図 7.5 式 (7.14)、式 (7.15) を示す図

と  $(\cos \theta, \sin \theta)$  は、 $x$  軸に関して対称の位置にある (図 7.5)。すなわち、 $x$  座標は同じで  $y$  座標は正負が逆。従って、次の 2 つの式が成り立つ：

$$\cos(-\theta) = \cos \theta \quad (7.14)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \quad (7.15)$$

これらと同様に、次の問の各式を証明できる。コツは、面倒でも毎回、図 7.5 みたいな図を描き、単位円上での点の位置関係 (対称性) を使うことである。

問 163  $n$  を整数とする。三角関数の定義から、以下

の式を導け。

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \quad (7.16)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta \quad (7.17)$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta \quad (7.18)$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta \quad (7.19)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \quad (7.20)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \quad (7.21)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta \quad (7.22)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta \quad (7.23)$$

ヒント:  $\pi - \theta$  は、 $\theta$  とは  $y$  軸対称。  $\pi + \theta$  は、 $\theta$  とは原点对称。  $\pi/2 - \theta$  は、 $\theta$  とは  $x$  軸と  $y$  軸を入れ替えた関係 (直線  $y = x$  に関して対称)。言い換えれば、 $y$  軸から右周り (時計回り) に  $\theta$  だけ回った角。  $\pi/2 + \theta$  は、 $y$  軸から左周り (反時計回り) に  $\theta$  だけ回った角。

問 164  $n$  を整数とする。三角関数の定義から、以下の式を導け。

$$\sin n\pi = 0 \quad (7.24)$$

$$\cos n\pi = (-1)^n \quad (7.25)$$

問 165 三角関数の定義から、以下の式を導け。

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (7.26)$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta \quad (7.27)$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta \quad (7.28)$$

ここで式 (7.28) に注意しよう。これを見ると、 $\tan$  は、 $\theta$  が  $\pi$  増えるごとに、同じ値が繰り返して出てくるのだ。  $\sin$  や  $\cos$  は  $2\pi$  ごとの繰り返しだったが、 $\tan$  はその半分で繰り返しが来るのだ。このことは、あとで  $\tan$  のグラフを見れば、よりはっきりわかるだろう。

問 166  $\cos \theta, \sin \theta, \tan \theta$  は、それぞれ、 $\theta$  の関数と見たとき、偶関数? 奇関数? あるいはそのどちらでもない?

## 7.6 加法定理

次に述べるのは、2 つの角の和の三角関数を、それぞれの角の三角関数で表す公式であり、「加法定理」と呼ばれる。三角関数の応用では頻繁に出てくる、重要な定理である。

問 167 単位円の上に、 $x$  軸から角  $\alpha$  だけ離れたとこ

るに点 A をとり,  $x$  軸から角  $-\beta$  だけ離れたところに点 B をとる。このとき, 原点 O と点 A, 点 B を頂点とする三角形 OAB を考える。一方, 単位円と  $x$  軸が交わる点  $(1, 0)$  を  $A'$  とし, 単位円上で  $x$  軸から角  $\alpha + \beta$  だけ離れたところに点  $B'$  をとる。このとき, 原点 O と点  $A'$ , 点  $B'$  を頂点とする三角形  $OA'B'$  を考える。

- (1) 三角形 OAB と三角形  $OA'B'$  をそれぞれ別の図として作図せよ。
- (2) 三角形 OAB と三角形  $OA'B'$  が合同であることを示せ。
- (3) 点 A, 点 B の各座標を,  $\alpha, \beta$  を用いて表せ。
- (4) 辺 AB の長さの 2 乗 ( $AB^2$ ) を,  $\alpha, \beta$  を用いて表せ。
- (5) 点  $A'$ , 点  $B'$  の各座標を,  $\alpha, \beta$  を用いて表せ。
- (6) 辺  $A'B'$  の長さの 2 乗 ( $A'B'^2$ ) を,  $\alpha, \beta$  を用いて表せ。
- (7)  $AB^2 = A'B'^2$  より, 次式を示せ。

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (7.29)$$

- (8) 式 (7.20) より  $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\pi/2 - \alpha - \beta)$  が成り立つ。このことを利用して, 次式を示せ:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (7.30)$$

ヒント:  $\sin(\alpha + \beta)$  を  $\cos((\pi/2 - \alpha) + (-\beta))$  と考え, 式 (7.29) を使う。

式 (7.29) と式 (7.30) は,  $\alpha, \beta$  がどのような角であっても成り立つ。これらの式を三角関数の 加法定理 と呼ぶ。

加法定理の特別な場合として, 以下のような公式が成り立つ。

問 168 以下の式を示せ:

$$(1) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (7.31)$$

$$(2) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (7.32)$$

(3) (cos の倍角公式)

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (7.33)$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1 \quad (7.34)$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha \quad (7.35)$$

(4) (sin の倍角公式)

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha \quad (7.36)$$

問 169 以下の式を示せ:

$$(1) \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (7.37)$$

$$(2) \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad (7.38)$$

式 (7.29)~式 (7.38) は, いずれも重要な公式なので, 少なくとも, 自力で導出できるようになろう。できれば覚えることが望ましい(数 III を受験で使った人は覚えたはず!)。少しくらい忘れても, うろおぼえの状態から正しい式を思い出すコツがある。

例 7.5 式 (7.29)~式 (7.32) を混同してしまい, 右辺の符号 ( $\pm$ ) や  $\sin$  と  $\cos$  の順序を間違えることがよくある。そんなときは,  $\alpha = \beta = 0$  とか,  $\alpha = 0, \beta = \pi/2$  などの値を代入して, 左辺と右辺が整合的になるかどうかを確かめればよい。例えば,

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \cdots (\text{これは間違い})$$

だったっけ? と考える。ここで  $\alpha = \beta = 0$  を代入すると, 左辺は 1, 右辺は  $-1$  になるから, 何かが違う!なら,

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \cdots (\text{これも間違い})$$

かな? と考える。ここで  $\alpha = \beta = 0$  を代入すると, 左辺は 1, 右辺は 0 になるから, やっぱり何かが違う!そうやって, 可能性を絞り込んで行くことができる。

例 7.6 式 (7.20) を忘れたら, 式 (7.29) を用いて導出できる:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{2} \sin \theta$$

ここで,  $\cos(\pi/2) = 0$ ,  $\sin(\pi/2) = 1$  より, 上の式の右辺は,  $\sin \theta$  となる。(例おわり)

## 7.7 三角関数のグラフ

次に,  $y = \sin x$  や  $y = \cos x$  等のグラフを描けるようになろう。 $y = \sin x$  のグラフは図 7.6 である。

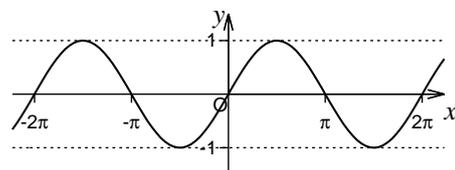


図 7.6  $y = \sin x$  のグラフ

このグラフには, 関数  $y = \sin x$  の, 次のような性質がよくあらわれている:

- $\sin 0 = 0$
- $x$  が  $2\pi$  だけ進むと, もとの値に戻る。

- $y$  は  $-1$  から  $1$  までの範囲の値だけをとる。
- $x = \pi/2$  のとき (直角のとき), 最大値  $1$  をとる。
- 奇関数である。

図 7.6 は波っぽい形のグラフである。そこで, このような形 (図 7.6 を拡大縮小したり平行移動した形) を「正弦曲線」という。

次に  $y = \cos x$  のグラフを描こう。式 (7.23) から,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad (7.39)$$

だから,  $y = \sin x$  のグラフを左に ( $x$  軸の負の方向に)  $\pi/2$  だけ平行移動したものが  $y = \cos x$  のグラフになる。従って図 7.7 のようになる。 $\cos x$  が偶関数であることが, きちんと表現されている。このグラフは図

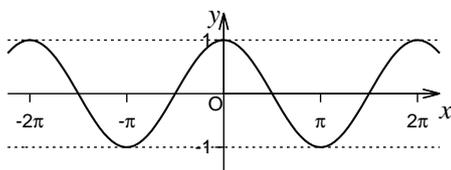


図 7.7  $y = \cos x$  のグラフ

7.6 のグラフを平行移動したものとみなせるから, 正弦曲線と言える (余弦なのにな!?)

次に  $y = \tan x$  のグラフを描こう。まず, 定義より

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (7.40)$$

だから,  $\tan x$  は奇関数であり,  $x = 0$  のときに  $0$  をとることがすぐわかる。また,  $x$  が  $0$  から次第に増加すると, 最初のうちは  $\sin x$  は増加,  $\cos x$  は減少するから,  $\tan x$  は次第に増加する。 $x = \pi/2$  に近づくと, 分母の  $\cos x$  が  $0$  に近づくから,  $\tan x$  の値はどんどん大きくなって  $\infty$  に飛んでいく。ところが  $x = \pi/2$  を少し越えると,  $\cos x$  は  $0$  に近いマイナスの値になり,  $\sin x$  はプラスの値のままだから,  $\tan x$  の値は, いきなり  $-\infty$  に飛んで行ってしまふ。

そういうふうに考えると,  $y = \tan x$  のグラフが図 7.8 のようになることが, 納得できるだろう:

問 170 以下の関数のグラフを描け:

- (1)  $y = \sin x$                       (2)  $y = \cos x$   
 (3)  $y = \tan x$                       (4)  $y = \sin 2x$

問 171  $y = \sin^2 x$  のグラフを書いてみよう。

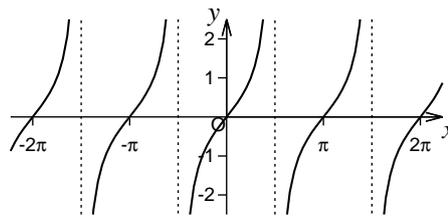


図 7.8  $y = \tan x$  のグラフ。点線は漸近線。

- (1)  $y$  は常に  $0$  以上, つまり  $x$  軸よりも上にあることを示せ。
- (2)  $y$  は  $1$  よりも大きくはならないことを示せ。
- (3) このグラフは原点を通ることを示せ。
- (4) このグラフは  $y$  軸に関して対称 (偶関数) であることを示せ。
- (5) 式 (7.38) も参考にして, この関数のグラフを描け。

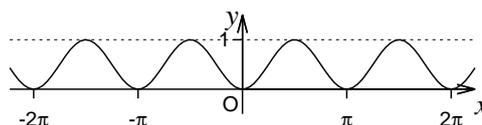


図 7.9  $y = \sin^2 x$  のグラフ。  $x$  軸に接する部分がなめらかな曲線になっていることに注意。

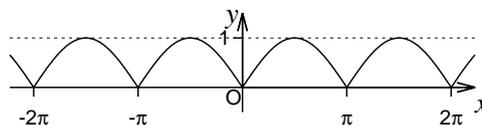


図 7.10  $y = |\sin x|$  のグラフ。この図は図 7.6 つまり  $y = \sin x$  のグラフの  $x$  軸より下の部分を上に折り返したものである。従って,  $x$  軸に接する部分はとがっている。図 7.9 との違いをじっくり観察しよう。

よくある間違い 26  $y = \sin^2 x$  のグラフを描けと言われて, 図 7.10 のようなグラフを描いてしまふ。

## 7.8 三角形と三角関数

以上は「三角関数」の話なのに三角形が登場せず, 円ばかり出てきた。そう, 実は, 「三角関数」は三角形の関数よりもむしろ円の関数なのだ。それが「三角関数」と呼ばれるのは歴史的な経緯にすぎない。しかし, 三角形と三角関数の関係も重要である。

問 172 図 7.11 の直角三角形 OAB について, 次式

を示せ:

$$(1) \sin \theta = \frac{AB}{OA} \quad (7.41)$$

$$(2) \cos \theta = \frac{OB}{OA} \quad (7.42)$$

$$(3) \tan \theta = \frac{AB}{OB} \quad (7.43)$$

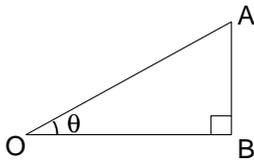


図 7.11 問 172 の説明図

高校の数学 II では、式 (7.41)、式 (7.42)、式 (7.43) を利用して三角関数を定義している。しかし、これらは  $\pi/2$  以上の角や負の角には適用できないので、大学レベルの数学では三角関数を単位円で定義するのだ。

よくある間違い 27  $\sin$  や  $\cos$  を、いつまでも直角三角形の辺の比で定義する ... 間違いとまでは言えないけど、それは一般性に欠ける不完全な定義です。単位円を使おう。

実用的には、式 (7.41)、式 (7.42)、式 (7.43) は、以下のような形で使われることが多い。

$$AB = OA \sin \theta \quad (7.44)$$

$$OB = OA \cos \theta \quad (7.45)$$

$$AB = OB \tan \theta \quad (7.46)$$

問 173 傾斜 30 度の斜面を、斜距離で 100 m だけ登ると、高度は約何 m だけ上がるか?

問 174 傾斜 3 度の斜面を、斜距離で 100 m だけ登ると、高度は約何 m だけ上がるか? 3 度を 0 に近い量とみなし、式 (7.9) を使って近似計算してみよ。

## 7.9 正弦定理と余弦定理

ここで、三角形の辺と角の間に成り立つ重要な定理を 2 つ、学ぶ。これらは、生物資源学類では、森林や農地の測量に必要である。

問 175 図 7.12 のような三角形 ABC を考える。BC の長さを  $a$ 、CA の長さを  $b$ 、AB の長さを  $c$  とする。頂点 A、B、C をそれぞれ挟む角の大きさをそれぞれ  $A$ 、 $B$ 、 $C$  とする (例えば角 ACB の大きさが  $C$ )。B から辺 CA に

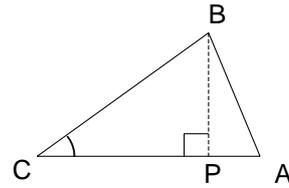


図 7.12 問 176 の説明図

おろした垂線の足を P とする。

- (1) 次式を示せ。

$$BP = a \sin C \quad (7.47)$$

- (2) 三角形 ABC の面積を  $S$  とする。次式を示せ。

$$S = \frac{ab \sin C}{2} \quad (7.48)$$

- (3) 同様に考えて次式を示せ。

$$S = \frac{bc \sin A}{2} \quad (7.49)$$

$$S = \frac{ca \sin B}{2} \quad (7.50)$$

- (4) 式 (7.48) ~ 式 (7.50) から次式を示せ:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (7.51)$$

式 (7.51) を 正弦定理 と呼ぶ。

問 176 前問の続きを考える。

- (1)  $CP = a \cos C$ 、 $AP = |b - a \cos C|$  となることを示せ。  
 (2) 直角三角形 PAB について三平方の定理を考えて、次式を示せ:

$$c^2 = (a \sin C)^2 + (b - a \cos C)^2 \quad (7.52)$$

- (3) 前小問より、次式を示せ:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (7.53)$$

この問題で、三角形 ABC の頂点と辺の名前付けを適当に変えると、以下の式も成り立つ:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (7.54)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad (7.55)$$

また、式 (7.53) ~ 式 (7.55) を少し変形すると次式が成り立つ:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (7.56)$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (7.57)$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad (7.58)$$

式 (7.53) ~ 式 (7.58) を 余弦定理 と呼ぶ。

問 177 式 (7.53) は、角  $C$  が直角の場合、三平方の定理に一致することを示せ。

このように、余弦定理は、その特別な場合として三平方の定理を含んでいる。いわば、三平方の定理の拡張版である。

よくある質問 88 式 (7.53) ~ 式 (7.58) は全部覚えるべきですか? ... どれか 1 つだけでいいので、何も見ないで導出できるくらい何回も証明してみましょう。そうすれば、忘れても自力で導出できるし、残りは全部、そこから記号の置き換えと式変形で出てきます。

さて、多角形の面積を求める時、多角形を三角形に分割し、それぞれの三角形の面積を求めて足す、ということがよく行われる。その際、最も基本的なのは、「3 辺の長さがわかっている三角形の面積を求めよ」という問題だ。

問 178 3 辺の長さがそれぞれ  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$ ,  $c = 2 \text{ cm}$  である三角形の面積を求めてみよう。

- (1) 式 (7.56) から  $\cos \theta$  の値を求めよ。
- (2)  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  から、 $\sin \theta$  の値を求めよ。
- (3) 式 (7.48) から、この三角形の面積を求めよ。

注: 三角形の面積に関する「ヘロンの公式」というものがあり、それを使って問 178 を解く人がたまにいるが、その場合は、ヘロンの公式を証明することが必要である。率直に言えば、ヘロンの公式は煩雑なだけで、あまり便利なものではない。式 (7.48) と余弦定理の組み合わせで十分に代用できる。

よくある間違い 28 問 178(3) の答に単位をつけない ... 当然、不正解です。

## 7.10 逆三角関数

$\cos$ ,  $\sin$ ,  $\tan$  のそれぞれの逆関数を、 $\arccos$  (アークコサイン),  $\arcsin$  (アークサイン),  $\arctan$  (アークタンジェント) と呼ぶ。これらを逆三角関数という。

ただし、この定義はまだ不完全である。というのも、例えば  $\cos \theta = 1/2$  となるような  $\theta$  を  $\arccos(1/2)$  というのだが、 $\cos$  は周期的な関数なので、 $\cos \theta = 1/2$  となるような  $\theta$  の値は、 $\pm\pi/3$  や  $\pm7\pi/3$  や  $\pm13\pi/3$  など、たくさんあるから、どれなのか迷ってしまう。そこで、 $\arccos$  の値は、 $0$  以上  $\pi$  以下に限定するのだ。すなわち、「 $\arccos x$  とは、 $\cos \theta = x$  かつ  $0 \leq \theta \leq \pi$  となるような  $\theta$  のことである」

と定義する。従って、例えば

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \quad (7.59)$$

である ( $-\pi/3$  や  $7\pi/3$  などはこの答に含めてはいけない)。

同様に、

「 $\arcsin x$  とは、 $\sin \theta = x$  かつ  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$  となるような  $\theta$  のことである」

「 $\arctan x$  とは、 $\tan \theta = x$  かつ  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$  となるような  $\theta$  のことである」

と定義する。

注 1:  $\arcsin$  と  $\arctan$  は、 $\arccos$  とは値域 ( $\theta$  のとり得る範囲) が違うことに注意せよ。

注 2:  $\arcsin x$  を  $\text{Arcsin } x$  とか  $\sin^{-1} x$  と書くこともある。後者の場合は  $1/\sin x$  と間違えないように。同様に、 $\arccos x$  を  $\text{Arccos } x$  とか  $\cos^{-1} x$  と書くこともある。後者の場合は  $1/\cos x$  と間違えないように。同様に、 $\arctan x$  を  $\text{Arctan } x$  とか  $\tan^{-1} x$  と書くこともある。後者の場合は  $1/\tan x$  と間違えないように。

注 3:  $\theta$  がどんな値であっても  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  は  $-1$  以上  $1$  以下の値しか取り得ない。従って、 $x$  が  $1$  より大きかったり  $-1$  より小さかったりする場合は、 $\sin \theta = x$  とか  $\cos \theta = x$  となるような  $\theta$  は存在しない。そのような  $x$  については、 $\arccos x$  や  $\arcsin x$  は存在しないのだ。一方、 $\tan \theta$  は、どのような実数値もと取り得る。従って、任意の実数  $x$  について  $\arctan x$  が存在する。

問 179 以下の値を求めよ :

- (1)  $\arctan 1$
- (2)  $\arctan 0$
- (3)  $\arccos 0.5$
- (4)  $\arcsin(-0.5)$
- (5)  $\arctan 5$  (電卓使用)
- (6)  $\arcsin 2$

よくある間違い 29 上の問の (5) で, 78.69 という間違い ...  
 そういう人は, 度とラジアンをまだ使い分けできていませんね。

よくある質問 89 えっ!? どういうことですか? 電卓は確かに 78.69... と表示してるんですけど, なぜ 78.69 はダメなんですか? ... その電卓は角の大きさを度で表しているのです。だから答えには 78.69 度とか, 78.69° と書けば正解です。でもあなたは「78.69」とだけ書いて, 単位を書かなかつたでしょ? 単位のついていない角の値は, ラジアンとして解釈されます。

問 180 筑波山 (標高約 880m) と筑波大学 (標高約 30m) は, 約 12km 離れている。筑波大学から見た筑波山頂は, どのくらいの仰角 (水平からの角度) で見えるか? ただし地球が丸いことは無視してよい。

## 7.11 三角関数の微分

次に三角関数の微分を学ぼう。

問 181 表計算ソフトを用いて,

- (1)  $y = \sin x$  のグラフを,  $0 \leq x \leq 7$  の範囲で描け。
- (2) それを数値微分し, 結果をグラフに描け。
- (3)  $y = \cos x$  のグラフに描け。

$x$  の刻みは 0.1 程度で OK。(1), (2), (3) のグラフを重ねて描くこと。結果は図 7.13 のようになるはず。

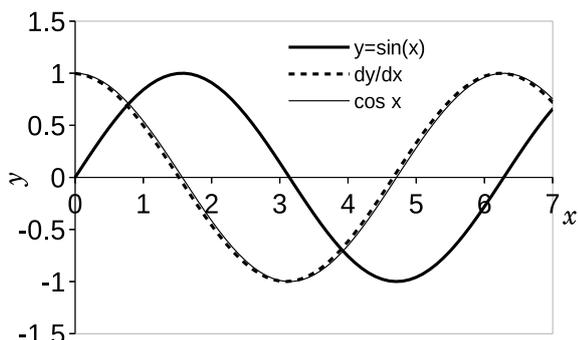


図 7.13  $y = \sin x$  (太い実線) とその数値微分 (点線),  
 そして  $y = \cos x$  (細い実線) のグラフ。 $x$  の刻みは  
 0.1。刻みをもっと小さくすると,  $y = \sin x$  の数値微  
 分と  $y = \cos x$  はもっと近くなる。

なんとびっくり! 上の問で,  $\sin x$  の数値微分は,  
 $\cos x$  のグラフにぴったり重なるではないか! つまり,  
 $(\sin x)' = \cos x$  なのだ!

問 182 表計算ソフトを用いて,

- (1)  $y = \cos x$  のグラフを,  $0 \leq x \leq 7$  の範囲で描け。
- (2) それを数値微分し, 結果をグラフに描け。
- (3)  $y = -\sin x$  のグラフに描け。

$x$  の刻みは 0.1 程度で OK。(1), (2), (3) のグラフは重  
 ねて描くこと。結果は図 7.14 のようになるはず。

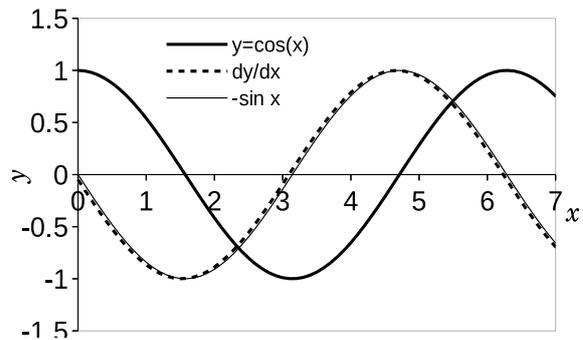


図 7.14  $y = \cos x$  (太い実線) とその数値微分 (点線),  
 そして  $y = -\sin x$  (細い実線) のグラフ。 $x$  の刻みは  
 0.1。刻みをもっと小さくすると,  $y = \cos x$  の数値微  
 分と  $y = -\sin x$  はもっと近くなる。

なんとまたびっくり! 上の問で,  $\cos x$  の数値微分は,  
 $-\sin x$  のグラフにぴったり重なるではないか! つまり,  
 $(\cos x)' = -\sin x$  なのだ!

では  $\tan x$  の導関数は?  $\tan x = \sin x / \cos x$  に P.72  
 の式 (5.60) をあてはめればよい。すなわち,  $v = \sin x$ ,  
 $u = \cos x$  として,

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{v'u - vu'}{u^2} \\ &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned} \quad (7.60)$$

となる。以上をまとめると,

$$(\sin x)' = \cos x \quad (7.61)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (7.62)$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (7.63)$$

である。この 3 つの公式は必ず記憶しよう。

よくある質問 90  $\cos x$  を微分する問題で,  $\cos x = -\sin x$   
 と書いたら不正解になりました。なぜ? ... 君は微分する前  
 の関数と微分した後の関数を等号で結んでしまっています。

$(\cos x)' = -\sin x$  と書くべきなのです。

よくある質問 91 でも、答えは合っているからよくないですか? ... その等式に  $x = 0$  を代入してご覧。  $1 = 0$  になっちゃうよ。それでもいいの?

ここで、式 (7.61) に  $x = 0$  を代入すると、その値は  $\cos 0 = 1$  となる。微分係数は、その関数のグラフの接線の傾きでもあるから、 $y = \sin x$  のグラフ、つまり、P.104 の図 7.6 において、 $x = 0$  での接線の傾きは 1 である。

式 (7.62) に  $x = 0$  を代入してみると、 $-\sin 0 = 0$  となる。つまり、 $y = \cos x$  のグラフ、つまり、図 7.7 は、 $x = 0$  での接線の傾きは 0、つまりそこでグラフは平坦になることがわかる (実際、図 7.7 でもそうなっている)。

式 (7.63) に  $x = 0$  を代入してみると、 $1/\cos^2 0 = 1$  となる。つまり、 $y = \tan x$  のグラフ、つまり、図 7.8 は、 $x = 0$  で接線の傾きは 1 である。

さて、式 (7.61)、式 (7.62)、式 (7.63) と、微分のいくつかの公式を組み合わせれば、三角関数を含むいろんな関数を微分できる。

例 7.7

$$(\cos 3x)' = (-\sin 3x)(3x)' = -3 \sin 3x \quad (7.64)$$

$\cos x$  と  $3x$  の合成関数の微分。

$$\begin{aligned} (\sin^3 x)' &= \{(\sin x)^3\}' = 3\{(\sin x)^2\}'(\sin x)' \\ &= 3 \sin^2 x \cos x \end{aligned} \quad (7.65)$$

$x^3$  と  $\sin x$  の合成関数の微分。

$$\begin{aligned} (x^2 \sin 3x)' &= (x^2)' \sin 3x + x^2 (\sin 3x)' \\ &= 2x \sin 3x + x^2 (3 \cos 3x) \\ &= 2x \sin 3x + 3x^2 \cos 3x \end{aligned} \quad (7.66)$$

$x^2$  と  $\sin 3x$  の積の微分。(例おわり)

例 7.8 以下の関数を微分してみよう:

$$f(x) = x^3 \cos^2 3x$$

これを  $x^3$  と  $\cos^2 3x$  の積とみて、積の微分の公式より、

$$f'(x) = (x^3)' \cos^2 3x + x^3 \{(\cos^2 3x)'\}$$

右辺第一項の中の  $(x^3)'$  は  $3x^2$  である。右辺第二項の中の  $(\cos^2 3x)'$  は、 $\cos 3x$  の 2 乗の微分とみなして合成関数の微分の公式を使えば、 $2 \cos 3x (\cos 3x)'$  となる。 $(\cos 3x)'$  は、 $3x$  をひとつの変数とみなして合成関数の

微分の公式により、 $-3 \sin 3x$  となる。これらをぜんぶ元に組み合わせれば、

$$f'(x) = 3x^2 \cos^2 3x - 6x^3 \cos 3x \sin 3x$$

(例おわり)

問 183 次の関数を微分せよ。

- (1)  $\cos x$       (2)  $\tan x$       (3)  $\sin 2x$   
 (4)  $x \cos x$       (5)  $\cos^2 x$       (6)  $\cos x^2$

## 7.12 極座標

問 184  $xy$  平面上の任意の点  $P(x, y)$  について、原点からの距離を  $r$  とする。つまり  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  とする。点  $P$  は、原点を中心とする半径  $r$  の円周上にある。いま、 $\theta$  を  $x$  軸から点  $P$  までの左回りの角とすると、

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (7.67)$$

と書けることを示せ (図 7.15)。

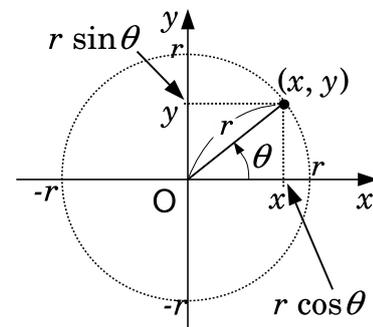


図 7.15 極座標の説明図。図 7.4 を  $r$  倍に拡大したものと考えてもよい。

上のように、平面上の点の位置を、原点からの距離  $r$  と  $x$  軸からの角  $\theta$  であらわすことを、極座標 (polar coordinate) と呼ぶ。それに対して、君が慣れ親しんだ、 $x$  軸と  $y$  軸のそれぞれに沿った成分の大きさであらわす  $(x, y)$  のようなあらわしかたを、デカルト座標 と呼ぶ<sup>\*1</sup>。

問 185 以下のデカルト座標を極座標に、極座標をデカルト座標に書き換えよ:

\*1 ちなみに 3 次元空間の点についても「極座標」は存在する (大学数学の範囲)。

- (1) (1,1)  
 (2)  $(-\sqrt{3}, 1)$   
 (3) (2,3) ヒント:  $\theta = \arctan(3/2)$ 。電卓使用。  
 (4)  $r = 2, \theta = \pi/3$   
 (5)  $r = 3, \theta = 10^\circ$  ヒント: 電卓使用

### 7.13 単振動

ばねに吊るされた重りの上下運動や、振り子の左右運動など、世の中には周期的に振動する現象が多くある。中でも、時刻  $t$  での物体の位置  $x(t)$  が以下のような式:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (7.68)$$

であらわされる場合、その振動運動を単振動という。ここで  $x_0, \omega, \delta$  はいずれも  $t$  によらない適当な定数であり、 $x_0 > 0$  とする。 $x_0$  を振幅と呼び、 $\omega$  を角速度と呼ぶ。

問 186 部屋の天井からバネをつるし、その末端に重りをつけて、つりあいの位置に静止させる。この位置を原点とし、バネに沿って上向きに  $x$  軸を考えよう。つりあいの位置から重りを  $x_0$  だけ持ち上げて静かに離すと、重りは上下に振動運動をする。そのとき重りの運動の様子は、次式で表現される\*2:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad (7.69)$$

ここで、 $t$  は、重りを離してから経過した時間。 $x(t)$  は、時刻  $t$  における重りの位置である。

- (1) この運動の周期を、 $\omega$  を使ってあらわせ。  
 (2) 時刻  $t$  における速度を求めよ。  
 (3) 時刻  $t$  における加速度を求めよ。  
 (4) 振動の振幅が変わらないままで  $\omega$  が 2 倍になると、速度や加速度の最大値はそれぞれ何倍になるか?

### 7.14 三角関数の合成

三角関数には他にも公式がたくさんある。それらを暗記する必要はないけれど、自力で導出できるようにはなっておこう。そうすれば、たとえ忘れても、必要に応じて思い出して活用できるだろう。

\*2 その理由は物理学で学ぶだろう。角速度  $\omega$  が、重りの質量とバネの強さで決まることも学ぶだろう。なお、このような運動が実現するには、空気抵抗が無視でき、 $x_0$  がバネの長さ比べて十分に 0 に近いことが必要である。

$a, b$  を任意の実数として、

$$a \sin x + b \cos x \quad (7.70)$$

という形の式を、適当な実数  $A, p$  を使って (ただし  $0 \leq A, 0 \leq p < 2\pi$  とする)

$$A \sin(x + p) \quad (7.71)$$

という形の式にすることを 三角関数の合成 という。その方法を以下に述べる:

まず、式 (7.71) は、加法定理 (P.104 の式 (7.30)) より、次式のように変形できる:

$$\begin{aligned} A \sin(x + p) &= A\{\sin x \cos p + \cos x \sin p\} \\ &= A \cos p \sin x + A \sin p \cos x \end{aligned}$$

これが式 (7.70) と等しくなるには、

$$\begin{cases} a = A \cos p \\ b = A \sin p \end{cases} \quad (7.72)$$

であればよい。これは式 (7.67) とよく似ている。すなわち、 $xy$  平面上で  $(a, b)$  という座標で表される点を極座標で表したときの  $r$  を  $A$  とし、 $\theta$  を  $p$  とすればよい。

例 7.9  $\sin x + \cos x$  について、三角関数の合成をしよう。この場合、 $a = b = 1$  である。点  $(1, 1)$  の極座標は、 $r = \sqrt{2}, \theta = \pi/4$  である。従って以下ようになる:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

実際、右辺の  $\sqrt{2} \sin(x + \pi/4)$  を加法定理で展開してみると、

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right) \\ &= \sin x + \cos x \end{aligned}$$

となり、左辺に等しくなっている。

例 7.10

- (1)  $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \pi/4)$   
 (2)  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin(x + \pi/6)$   
 (3)  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \pi/3)$

三角関数の合成は、物理学で出てくる「波の干渉」などで、波長の等しい正弦波形の重ねあわせをするときに使う。

## 7.15 積和公式と和積公式

加法定理, すなわち P.104 の式 (7.29), 式 (7.31) より,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

これらの両辺を加えたり引いたりすると,

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad (7.73)$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta \quad (7.74)$$

となる。すなわち,

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \quad (7.75)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \quad (7.76)$$

となる。一方, P.104 の式 (7.30), 式 (7.32) より,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

これらの両辺を加えると,

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \quad (7.77)$$

となる。すなわち, 次式が成り立つ:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2} \quad (7.78)$$

式 (7.75), 式 (7.76), 式 (7.78) は, 2 つの三角関数の積を, 2 つの三角関数の和に変換する公式であり, 「積和公式」と呼ばれる。

また, 式 (7.73) において,

$$\alpha + \beta = A \quad (7.79)$$

$$\alpha - \beta = B \quad (7.80)$$

とすれば,

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad (7.81)$$

となる。ところが, 式 (7.79)+ 式 (7.80) より,  $2\alpha = A+B$ 。式 (7.79)- 式 (7.80) より,  $2\beta = A-B$ 。従って,

$$\alpha = \frac{A+B}{2}, \quad \beta = \frac{A-B}{2}$$

なので, 式 (7.81) は,

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (7.82)$$

となる。同様に, 式 (7.74), 式 (7.77) より,

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad (7.83)$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (7.84)$$

となる。式 (7.82), 式 (7.83), 式 (7.84) は, 2 つの三角関数の和 (や差) を, 2 つの三角関数の積に変換する公式であり, 「和積公式」と呼ばれる。

和積公式は, 物理学で出てくる「うなり」という現象などで, わずかだけ波長が違う正弦波の重ねあわせをするときに使う。

## 演習問題

演習問題 22 「微分」の章で, 奇関数の導関数は偶関数, 偶関数の導関数は奇関数であることを学んだ。三角関数の導関数についてそれらが成り立っていることを確かめよ。と言っても, 「確かめた」だけでは解答にならないよ! どのように確かめたかを, ちゃんと書くこと。

演習問題 23  $y = \arccos x$ ,  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arctan x$  のそれぞれのグラフを描け。

演習問題 24  $\theta$  が 0 に近い時, 次式を示せ:

$$\sin \theta \doteq \theta \quad (7.85)$$

また, 実際,  $\theta = 1$  度について上の両辺を電卓で計算して, 上の式がどのくらいの精度で成り立つか (有効数字何桁まで合っているか) を調べよ (ヒント: 前半は式 (5.78)。後半は度をラジアンに換算することを忘れないように!)

## 問題の解答

答 153

- (1) 角 A は共通で等しく, かつ, A 以外の 1 つの角が直角で等しい。2 つの角が等しいので相似。
- (2) ABC と ACD は相似なので,  $AB:AC=AC:AD$ 。従って,  $AC^2=AB \times AD$ 。
- (3) 角 B は共通で等しく, かつ, B 以外の 1 つの角が直角で等しい。2 つの角が等しいので相似。
- (4) ABC と CBD は相似なので,  $AB:BC=BC:BD$ 。従って,  $BC^2=AB \times BD$ 。

- (5) (2) より  $AD=AC^2/AB$ 。(4) より  $BD=BC^2/AB$ 。  
これを  $AB=AD+BD$  に代入して、  
 $AB=AC^2/AB+BC^2/AB$ 。  
両辺に  $AB$  を掛けて、式 (7.1) を得る。

答 154 「ラジアン」とは、角の大きさを、その角が半径  
1 の円を切り取る扇型の弧の長さで表したものだ。

ラジアン=度  $\times \pi/180$

答 155 (1)  $\pi/2$  (2)  $\pi/4$  (3)  $\pi$  (4)  $\pi/6$  (5)  $\pi/180$

答 156 (1)  $180^\circ$  (2)  $60^\circ$  (3)  $360^\circ$  (4)  $45^\circ$  (5)  $180^\circ/\pi$

答 157 (1)  $\pi$  (2)  $\pi$  (3) 0

答 158

- (1) 君の目を中心として、腕の長さ( $l$ )を半径とする円において、親指の幅  $a$  が切り取る弧の角度は、 $\theta \doteq a/l$  となる。
- (2) 君の目を中心として、半径  $R$  の円において、胸高直径  $d$  の木の幹が切り取る弧の角度は、 $d/R$  である。幹が親指にちょうどぴったり隠れるとき、この角度と前問の角度が等しくなるから、 $\theta = d/R$ 。よって、 $d = R\theta$
- (3) 前問より、親指に隠れない木は、すべて半径  $R$  の円内にあり、かつ、半径  $R$  の円内にある木はどれも親指からはみだして見える。従って、 $N$  は君の立ち位置を中心とする半径  $R = d/\theta$  の円内の木の本数である。
- (4)  $A = \pi R^2$  は自明。この円内にある木の胸高断面積の合計は、それぞれの木の胸高断面積  $\pi(d/2)^2$  と  $N$  の積だから、 $B = N\pi d^2/4$
- (5) 前問より、
- $$\frac{B}{A} = \frac{N\pi d^2/4}{\pi R^2}$$
- ここで、(2) より  $d = R\theta$  とすれば、この上の式の右辺は、
- $$= \frac{N\theta^2}{4}$$
- となる。
- (6)  $a = 2$  cm,  $l = 60$  cm のとき、 $\theta \doteq a/l = 1/30$ 。これと  $N = 10$  を上の式に代入して、 $B/A = 0.0028$ 。(地表面の 0.28 パーセントが木の幹で占められている。)
- (7) 式 (7.8) は、木の太さ(胸高直径)  $d$  に依存しない。従って、この方法は、どんな太さの木からなる林に

についても有効である。

- (8) 太さ  $d_1, d_2, \dots, d_n$  の木が混在しているとし、親指に隠れない本数は、太さ  $d_k$  の木について  $N_k$  本だったとする ( $1 \leq k \leq n$ )。式 (7.8) より、太さ  $d_k$  の木に関する単位面積当たりの胸高断面積  $C_k$  は、 $C_k = N_k\theta^2/4$  となる。全ての木に関する、単位面積当たりの胸高断面積  $C$  は、 $C_1 + C_2 + \dots + C_n = (N_1 + N_2 + \dots + N_n)\theta^2/4 = N\theta^2/4$  となり、結局、 $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$ 、すなわち、さまざまな太さの木をぜんぶひとまとめにして親指に隠れない本数を数えたときの値だけで決まる。従って、さまざまな太さの木が混在する状況でも、この方法は有効である。

答 159 半径 1 の円。

答 160 略(本文に書いてある)。

答 161 定義より  $(\cos \theta, \sin \theta)$  で表される点  $P$  は  $xy$  平面上の原点を中心とする単位円の上の、いかなる点もとりにうる。よって、 $\cos \theta$  すなわち  $P$  の  $x$  座標と、 $\sin \theta$  すなわち  $P$  の  $y$  座標は、 $-1$  から  $1$  の範囲のどんな値もとりにうる。しかし、点  $P$  はこの単位円上以外の点はとらない。従って  $\cos \theta$  も  $\sin \theta$  も、 $-1$  より小さくなったり  $1$  より大きくなったりはしない。

答 162

角	sin	cos	tan
$0^\circ$	0	1	0
$30^\circ$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$45^\circ$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$60^\circ$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$90^\circ$	1	0	解なし
$120^\circ$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
$180^\circ$	0	$-1$	0
$270^\circ$	$-1$	0	解なし
$-30^\circ$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$1^\circ$	0.017...	0.999...	0.017...
1	0.841...	0.540...	1.557...
0.1	0.099...	0.995...	0.100...
0.01	0.010...	0.999...	0.010...

答 163 略。

答 164  $n\pi$  ラジアンは、 $n$  が偶数のときは  $0$  ラジアンと同じであり、 $n$  が奇数のときは  $\pi$  ラジアンと同じである。従って、単位円上で、 $x$  軸から  $n\pi$  ラジアンにある点 P の座標は、 $n$  が偶数のときは  $(1, 0)$  であり、 $n$  が奇数のときは  $(-1, 0)$  である。いずれのときも、その  $y$  座標は  $0$  である。従って  $\sin n\pi = 0$ 。同様の考察で点 P の  $x$  座標を考えると、 $n$  が偶数のときは  $1$ 、 $n$  が奇数のときは  $-1$ 。これは  $(-1)^n$  と統一的に表現できる。従って、 $\cos n\pi = (-1)^n$ 。

答 165  $\tan^2 \theta = \sin^2 \theta / \cos^2 \theta$  だから、

$$1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

また、 $\cos(-\theta) = \cos \theta$ 、 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$  より、

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

また、

$$\tan(\theta + \pi) = \frac{\sin(\theta + \pi)}{\cos(\theta + \pi)} = \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

答 166

式 (7.14) から、 $\cos \theta$  は偶関数。

式 (7.15) から、 $\sin \theta$  は奇関数。

式 (7.27) から、 $\tan \theta$  は奇関数。

答 167 略 (誘導に従う)。

答 168

(1) 略。前問で  $\beta$  をあらたに  $-\beta$  と置き直せばよい (実際に計算してみよ)。

(2) 略。前問で  $\beta$  をあらたに  $-\beta$  と置き直せばよい (実際に計算してみよ)。

(3)  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  において、 $\beta = \alpha$  とおけば、 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ 。また、 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  より、 $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ 。これを使って上の結果の  $\sin^2 \alpha$  を消去すれば、 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ 。同様に、 $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$  を使って上の結果の  $\cos^2 \alpha$  を消去すれば、 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ 。

(4)  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  において、 $\beta = \alpha$  とおけば、 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ 。

答 169

(1) 式 (7.34) より、 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ 。これを变形

して与式を得る。

(2) 式 (7.35) より、 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ 。これを变形して与式を得る。

答 170 (1)(2)(3) は、図 7.6、図 7.7、図 7.8 参照。(4) は、図 7.6 を横方向に半分に縮めたもの (グラフの縮小)。

答 171

(1)  $\sin x$  は常に実数なので、その二乗である  $\sin^2 x$  は常に  $0$  以上。

(2) 常に  $-1 \leq \sin x \leq 1$  なので、 $\sin^2 x \leq 1$ 。

(3)  $x = 0$  のとき  $y = \sin^2 x = 0$ 。従って原点を通る。

(4)  $f(x) = \sin^2 x$  とすると、 $f(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$ 。従って偶関数。

(5) 式 (7.38) より、この関数のグラフは、関数  $y = \cos 2x$  のグラフを  $y$  軸方向に  $-1/2$  倍して  $y$  軸方向に  $1/2$  移動したものだ。そのグラフは、図 7.9 参照

答 172 単位円上に、 $x$  軸から角  $\theta$  の位置に点 P をとる。点 P から  $x$  軸におろした垂線の足を点 Q とする。三角形 OPQ は、直角三角形 OAB と相似である。OP = 1 なので、三角形 OPQ の OA 倍が三角形 OAB になる。

(1) PQ =  $\sin \theta$  なので、AB = PQ × OA = OA  $\sin \theta$ 。よって  $\sin \theta = AB/OA$ 。

(2) OQ =  $\cos \theta$  なので、OB = OQ × OA = OA  $\cos \theta$ 。よって  $\cos \theta = OB/OA$ 。

(3) これらより、

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{AB/OA}{OB/OA} = \frac{AB}{OB}$$

答 173 式 (7.44) で、AB を高度、OA を斜距離と考えればよい。高度 =  $100 \text{ m} \times \sin(30 \text{ 度}) = 50 \text{ m}$ 。

答 174 高度 =  $100 \text{ m} \times \sin(3 \text{ 度})$ 。関数電卓で計算すると、 $\sin(3 \text{ 度}) = 0.05233595 \dots$  なので、

高度 =  $100 \text{ m} \times 0.05233595 \dots = 5.233 \dots \text{ m}$ 。

一方、 $3 \text{ 度} = \pi/60$  ラジアンは、 $0$  に近いので、関数電卓を使わないでも、

$$\sin(3 \text{ 度}) = \sin(\pi/60) \approx \pi/60 = 0.05235986 \dots$$

となる。従って、高度  $\approx 100 \text{ m} \times 0.05235986 \dots = 5.235 \dots \text{ m}$ 。このように、近似による誤差は、わずか  $2 \sim 3 \text{ mm}$  程度である。

答 175

- (1) 直角三角形 CBP で,  $BP=CB \sin C = a \sin C$ 。  
 (2) 三角形 ABC について, 底辺を  $CA=b$ , 高さを BP とすれば, 前問より,

$$S = \frac{CA \times BP}{2} = \frac{ab \sin C}{2}$$

- (3) 前小問によって, 「三角形の面積は, 2 辺の長さ  $\times$  それらが挟む角の正弦/2」ということがわかった。これを, 辺 CA と辺 AB に適用すると式 (7.49) を得るし, 辺 AB と辺 BC に適用すると式 (7.50) を得る。  
 (4) 式 (7.48) ~ 式 (7.50) より,

$$S = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{ca \sin B}{2}$$

これらに  $2/(abc)$  をかければ (いちばん左の  $S$  の項は落として),

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

これらの逆数をとれば与式を得る。

答 176

- (1) 直角三角形 CBP を考えれば  $CP=BC \cos C = a \cos C$ 。また,  $AP=|AC-CP|=b - a \cos C|$ 。注: 絶対値は, P が線分 CA の外側にあるときに必要。  
 (2) 直角三角形 PAB を考える。斜辺 AB の長さは  $c$ 。直角をはさむ 2 辺は AP と PB であり, 前小問より  $AP=|b - a \cos C|$ 。また,  $PB=a \sin C$ 。これらに三平方の定理を適用して与式を得る。  
 (3) 前小問の与式を展開すると,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 \sin^2 C + b^2 + a^2 \cos^2 C - 2ab \cos C \\ &= a^2(\sin^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab \cos C \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

答 177 略。

答 178

- (1)  $\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$   
 (2)  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$   
 (3)  $S = \frac{ab \sin \theta}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ cm}^2$

注: (3) については, 必ず単位をつけること!

答 179

- (1)  $\arctan 1 = \pi/4$       (2)  $\arctan 0 = 0$   
 (3)  $\arccos 0.5 = \pi/3$       (4)  $\arcsin(-0.5) = -\pi/6$   
 (5)  $\arctan 5 = 1.373 \dots$       (6)  $\arcsin 2$  は存在しない。

答 180 有効数字 2 桁で計算すればよい。関数電卓を使って,  $\arctan\{(880 - 30)/12000\} \doteq 0.071$  ラジアン = 4.1 度

答 181 略。

答 182 略。

答 183

- (1)  $-\sin x$   
 (2)  $1/\cos^2 x$   
 (3)  $2 \cos 2x$   
 (4)  $\cos x - x \sin x$   
 (5)  $-2 \cos x \sin x$ 。または,  $\sin$  の倍角公式 (7.36) を使って,  $-\sin 2x$  としてもよい。  
 (6)  $-2x \sin x^2$

答 184 単位円上に,  $x$  軸から角  $\theta$  の位置に点  $P_0$  をとる。点  $P_0$  は線分 OP 上にあり, かつ,  $OP=r$ ,  $OP_0=1$  なので, 点 P の座標  $(x, y)$  は点  $P_0$  の座標  $(\cos \theta, \sin \theta)$  の  $r$  倍。従って,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ 。

答 185

- (1)  $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ,  $\theta = \pi/4$   
 (2)  $r = 2$ ,  $\theta = 5\pi/6$   
 (3)  $r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ ,  $\theta = \arctan(3/2) = 0.982 \dots$   
 (4)  $x = r \cos \theta = 2 \times \cos(\pi/3) = 1$   
 $y = r \sin \theta = 2 \times \sin(\pi/3) = \sqrt{3}$   
 $\therefore (1, \sqrt{3})$   
 (5) 同様にして  $(2.95 \dots, 0.520 \dots)$

答 186

- (1)  $\cos$  は  $2\pi$  を周期とする関数なので,  $x_0 \cos \omega t$  は,  $\omega t = 2\pi$  になるときにもとに戻る。従って, 運動の周期を  $T$  とすると,  $\omega T = 2\pi$ 。従って,  $T = 2\pi/\omega$  である。  
 (2)  $(x_0 \cos \omega t)' = -x_0 \omega \sin \omega t$   
 (3)  $(x_0 \cos \omega t)'' = -x_0 \omega^2 \cos \omega t$   
 (4) 速度の最大値は  $x_0 \omega$ , 加速度の最大値は  $x_0 \omega^2$  なので,  $\omega$  が 2 倍になると, 速度の最大値は 2 倍, 加速度の最大値は 4 倍になる。

## 第8章

# 積分

### 8.1 積分の発想

「ローマは一日にして成らず」という。何事も、小さな変化の積み重ねが大きな変化につながるのだ。その考え方を数学にしたのが「積分」というものである。

いま、何かの量（ローマの都市の人口とか面積でもいい） $z$  が時刻  $t$  とともにどう変わっていくかを知りたいとする。最初  $t = t_0$  のときは  $z = z(t_0)$  という値であり、 $t$  が  $t_1, t_2, \dots, t_n$  と経つにつれ（現在を  $t = t_n$  とする）、 $z$  は  $z(t_1), z(t_2), \dots, z(t_n)$  という風に変化していったとしよう。すると現在の値  $z(t_n)$  は、それまでの成長の積み重ねで決まる。つまり、年々、もしくは日々の成長を、

$$\begin{aligned} \Delta z_1 &:= z(t_1) - z(t_0) \quad \dots t_0 \text{ から } t_1 \text{ までの成長} \\ \Delta z_2 &:= z(t_2) - z(t_1) \quad \dots t_1 \text{ から } t_2 \text{ までの成長} \\ \Delta z_3 &:= z(t_3) - z(t_2) \quad \dots t_2 \text{ から } t_3 \text{ までの成長} \\ &\dots \\ \Delta z_k &:= z(t_k) - z(t_{k-1}) \quad \dots t_{k-1} \text{ から } t_k \text{ までの成長} \\ &\dots \\ \Delta z_n &:= z(t_n) - z(t_{n-1}) \quad \dots t_{n-1} \text{ から } t_n \text{ までの成長} \end{aligned} \tag{8.1}$$

とすれば、

$$\begin{aligned} z(t_n) &= z(t_0) + \Delta z_1 + \Delta z_2 + \Delta z_3 + \dots + \Delta z_n \\ &= z(t_0) + \sum_{k=1}^n \Delta z_k \end{aligned} \tag{8.2}$$

である。

さてここで、年々や日々の成長を、もっともっと細かいステップ（分ごととか、秒ごととか）で考えれば、それぞれの  $\Delta z_k$  は 0 に近づいて無限小  $dz$  になり、そのかわりステップの個数  $n$  は無限に大きくなっていく（ただし  $t_n$  は  $n$  がどんなに大きくなっても「現在の時刻」に固定する）。そういう状況で、式 (8.2) を以下のように書き

あらわす：

$$z(T) = z(t_0) + \int_{z(t_0)}^{z(T)} dz \tag{8.3}$$

ここで  $t_n$  を改めて  $T$  と置いた。この  $\int$  という記号はインテグラルと呼ぶ。これは、総和記号  $\Sigma$  の「極限」、つまり「各ステップの幅を無限小にして、ステップの数を無限大にしたときの  $\Sigma$ 」であると考えればよい。また、末尾の  $dz$  は、ステップの幅  $\Delta z_k$  を 0 に近づける極限の無限小である。つまり、形式的には、

ステップの幅を無限小に、数を  $\infty$  にする極限では

$\Sigma$  は  $\int$  に変わる！  $\Delta z_k$  は  $dz$  に変わる！  
( $\Delta$  は  $d$  に変わり、 $k$  は消える)

のだ\*1。

さて、式 (8.2) や式 (8.3) は、何かの量を、その微小な変化の積み重ねで表しただけである。ところが多くの場合、個々の微小な変化は、その変化に要した（微小な）時間

$$\Delta t_k := t_k - t_{k-1} \tag{8.4}$$

に比例すると考えてよからう。例えば  $z$  がローマの大きさなら、2 日間の変化は 1 日の間の変化の約 2 倍だろう。ただしこれが 1 万日くらいの長い時間になるとそんなに単純ではない。そんなに長い時間では、その間にローマの発展の勢いが大きく変わるかもしれないから、単純に 1 万日間の変化 = 1 日の変化  $\times$  1 万とは言えない。そこで、その比例係数は、その時々で変わると考え、それを  $f(t)$  とし、 $\Delta t_k$  は、 $f(t)$  がほとんど変化しないくらい短い時間を考えれば、

$$\Delta z_k \doteq f(t_k) \Delta t_k \tag{8.5}$$

と書けるだろう。ここで気づいた人もいるだろうが、こ

\*1 計算機で積分を考えるときは、逆に  $f$  を  $\Sigma$  に、 $dz$  を  $\Delta z_k$  に置き換えて考える。

の  $f(t_k)$  は、要するに  $z$  を  $t$  の関数と見た時の微分係数 (導関数) である。

すると、式 (8.2) は、

$$z(t_n) = z(t_0) + \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta t_k \tag{8.6}$$

となる。ここで、先ほどやったように  $t_n = T$  を固定して、 $\Delta t_k$  が無限小になり、 $n$  が無限大になる極限で、式 (8.5)、式 (8.6) をそれぞれ以下のように書く：

$$dz = f(t) dt \tag{8.7}$$

$$z(T) = z_0 + \int_{t_0}^T f(t) dt \tag{8.8}$$

この例のように、一般に関数  $f(x)$  に、 $x$  の小刻みな増分  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  を掛けながら足しあわせること、すなわち、

$$\begin{aligned} & f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + f(x_3)(x_3 - x_2) + \dots + f(x_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \end{aligned} \tag{8.9}$$

について、最初 ( $x_0 = a$ ) と最後 ( $x_n = b$ ) の値を固定したまま、ステップの幅 (つまり  $\Delta x_k$ ) をどんどん 0 に近づけ、 $n$  をどんどん増やすときの式 (8.9) の極限を以下のように書き表す：

$$\int_a^b f(x) dx \tag{8.10}$$

これを 定積分 もしくは単に 積分 (integral) という。すなわち、

定積分の定義

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \tag{8.11}$$

ただし、 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ,  
 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

要するに、一定区間を無数の微小量 (無限小) に分割し、関数にその微小量を掛けて足し合わせることが積分である。

問 187 定積分の定義 (「ただし」以下も含むよ!) を 5 回書いて記憶せよ。

積分において、始点と終点を定め、差分 (微小量) として分割される量 (変数) のことを、積分変数 と呼ぶ。式

(8.8) では積分変数は  $t$  であり、式 (8.11) では積分変数は  $x$  である。

積分される関数を「被積分関数」という。式 (8.8) では被積分関数は  $f(t)$  であり、式 (8.11) では被積分関数は  $f(x)$  である。

よくある間違い 30 式 (8.11) の左辺を、

$$\int_a^b f(x) \Delta x_k \text{ とか, } \int_a^b f(x) dx_k \text{ とか, } \int_a^b f(x_k) dx$$

などと書く。... 積分では、微小量  $\Delta x_k$  が 0 になる極限 (無限小) を考えているので、 $\Delta$  は  $d$  で置き換えるのです。また、それに伴って、和の項数は無限大になるので、添字  $k$  を残すのは無意味になり、 $k$  を書かないのです。

よくある間違い 31 式 (8.11) の下の「ただし」以下を、 $a < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$  と書く... それでは  $a$  から  $x_0$  までの間や、 $x_n$  から  $b$  までの間に隙間ができちゃうでしょ? 「そうしたら  $a$  から  $b$  まで」を意味する  $\int_a^b$  が無意味になってしまいます。

よくある間違い 32 式 (8.11) の左辺を、

$$\int_a^b f(x)$$

と書く。...  $dx$  を忘れちゃダメです。積分は「微小量を掛けて足す」です。

8.2 グラフと積分

さて、式 (8.11) をグラフでイメージしてみよう。関数  $y = f(x)$  のグラフが図 8.1 のようだとする。話を簡単にするため、グラフは  $x$  軸より上にあるとする。式 (8.11) の  $\sum$  の中身、すなわち、 $f(x_k) \Delta x_k$  は、この図で斜線をかけた長方形の範囲の面積である。こういう長方形を  $x = a$  から  $x = b$  までたくさん考えると、階段状の図形ができる。式 (8.11) の  $\lim$  の内側

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \tag{8.12}$$

は、そういう階段状の図形の面積である。さて、 $n$  を大きくし、 $\Delta x_k$  を 0 に近づけるといのは、こういう長方形の数を限りなく増やし、それぞれの幅を限りなく狭くしていく、ということである。そうすると、それらを集めてできる階段状の図形は、図形 ABCD ( $x$  軸上の線分 AB と、直線  $x = a$  上の線分 AD、直線  $x = b$  上の線分 BC、そして曲線  $y = f(x)$  上の曲がった線分 CD で囲

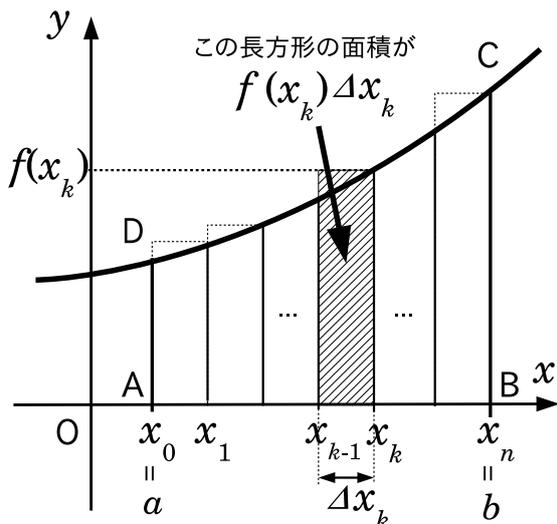


図 8.1 積分のイメージ

まれる図形)に限りなく近づく。そのとき、式 (8.12) は、図形 ABCD の面積に限りなく近づいていく。つまり、式 (8.11) は、図形 ABCD の面積なのだ!

よくある質問 92 てことは、要するに「積分とはグラフの面積」と定義して OK? ... 今学んでいる 1 変数関数の積分に限れば、そういう性質はあります。しかし、グラフが x 軸より下に来てしまったら、積分の値はマイナスになるので、単純に「面積」とは言えません。「グラフの面積を求めること」は、積分概念の、ひとつの側面に過ぎないのです。上述したように、積分は関数に微小量を掛けて足し合わせることで、それが「面積を求めること」になることもあれば、そうならないこともあります。いずれ、積分変数が複数個あったり、積分変数が複素数であったり、被積分関数がベクトルであるような積分も考えます。そういうとき、「面積を求めること」という理解は破綻しますが、「関数に微小量を掛けて足し合わせる」という定義は破綻しないのです (ただし、このような定義も、「ルベグ積分」という、より普遍性の高い積分概念の前では破綻しますが、そのレベルの数学まで到達する資源生はほとんどいないでしょう)。

よくある質問 93 「定積分の定義を述べよ」という問題で、「関数に微小量を掛けて足し合わせる」と書いたら不正解でした。テキストにはそう書いてあるのに! ... それは定義を言葉で簡略的に表現し、イメージしやすくしたものです。式 (8.11) を書かねばなりません。

### 8.3 数値積分

これから具体的に関数を積分する方法を学ぶのだが、まず、計算機で積分するやり方を学ぼう。それを「数値積分」という。数値積分は原理が単純で、積分のアイデアを理解するのに良い題材だ。また、実際に世の中で数値積分は様々な場で使われている。というわけで、積分の勉強はまず計算機から入るのだ。

よくある質問 94 ん? なんか同じようなセリフを P.69 あたりで読んだような... .. 気のせいでしょう!

式 (8.11) で学んだように、積分は、「関数に微小量を掛けて足すこと」である:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\doteq \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k \\ &= f(x_1)(x_1 - x_0) \\ &+ f(x_2)(x_2 - x_1) \\ &+ f(x_3)(x_3 - x_2) \\ &+ \dots \\ &+ f(x_n)(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

(ただし、 $x_0 = a, x_n = b, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ )

$n$  が無限に大きく、 $\Delta x_k$  が無限小になるときだけ、近似等号“ $\doteq$ ”は等号“ $=$ ”になる。しかし、実際は、 $\Delta x_k$  が無限小でなくても、ある程度の小ささであれば、これが大抵成り立つとして OK だろう。これが、数値積分だ。

では表計算ソフトで数値積分してみよう。例として、関数  $f(x) = 2x$  を、 $0 \leq x \leq 3$  で数値積分してみよう。まず以下のように  $f(x) = x$  の値をスプレッドシートに与える (ここでは  $x$  の刻みを 0.1 とした):

	A	B	C
1	x	f(x)	sekibun
2	0.0	0	
3	0.1	0.2	
4	0.2	0.4	
5	0.3	0.6	
...	...	...	
32	3	6	

ここで右端の列 (C 列) に積分を計算するには、まず積分の出発の値 (初期値) としてセル C2 に 0 を書き込む。次に、セル C3 に、「 $=C2+B3*(A3-A2)$ 」という式を書き込む。この式で B3 が  $f(x_1)$  に相当し、 $A3-A2$  が  $\Delta x_1$  に相当する。

そして、セル C3 の内容を、セル C4 以降の C 列全体にコピーペーストすれば(ここで「相対参照」が役に立つ)、C 列に 0 から  $x$  までの積分ができてあがる:

	A	B	C
1	x	f(x)	sekibun
2	0.0	0	0
3	0.1	0.2	0.02
4	0.2	0.4	0.06
5	0.3	0.6	0.12
...	...	...	
32	3	6	9.3

例えば、セル C5 には、 $\int_0^{0.3} 2x dx$  の値が入っているし、セル C32 には  $\int_0^3 2x dx$  の値が入っている。もっとも、これらの値には誤差が含まれている。刻みをもっと細かく、例えば 0.01 などにしたら、もっと正確な結果が得られる。こうして計算機で関数の積分を近似的にやるのが数値積分だ。

よくある質問 95 セル C2 に 0 を入れるのはなぜですか? ... まだ何も足していない状態を意味します(次節で学ぶ式(8.18)に相当します)。

問 188 表計算ソフトで、関数  $f(x) = 2x$  を、 $0 \leq x \leq 3$  の範囲で数値積分し、その結果を、 $f(x)$  とともに、グラフに描け。 $\Delta x$  は各自で適当に定めよ。回答は図 8.2 のようになるはず。

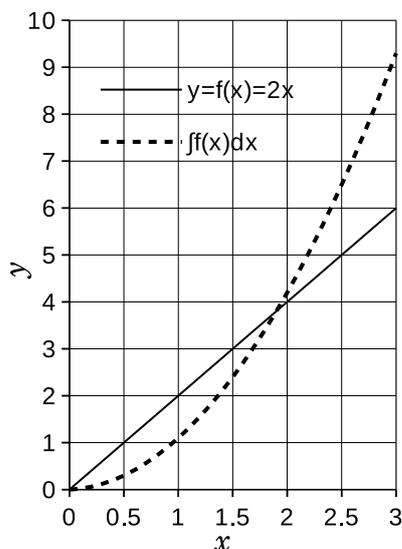


図 8.2  $y = 2x$  と、その数値積分

図 8.2 を見ると、 $y = 2x$  の積分のグラフ(図 8.2 の点線)は、形からして放物線みたいだ。 $x = 1$  で  $y = 1$ 、 $x = 2$  で  $y = 4$ 、 $x = 3$  で  $y = 9$  だから、 $y = x^2$  か? 実はそうなのだ(多少のズレは数値積分の誤差)。そして、 $y = 2x$  と  $y = x^2$  の関係って... そうだ! 後者を微分したら前者になる!

そう、実は、積分と微分は逆の演算なのだ。それを感じられる問題をやってみよう。

問 189 前問の数値積分の結果を数値微分し、もとの関数  $f(x) = 2x$  と値を比較せよ。ヒント: 前問題の C 列を数値微分する。例えば、セル D2 に「=(C3-C2)/(A3-A2)」と打ち込む。それをセル D3 からセル D31 までペーストすればよい。そして D 列を B 列(もとの関数  $2x$ ) と比べればよい。

なんと! 数値積分を数値微分すると、もとの関数と同じになるじゃないか! これは偶然ではない。 $f(x)$  がどんな関数でも、それを積分して微分すれば、もとの関数になるのだ。このことは、後で理論的に確認する。

よくある間違い 33 てことは、要するに「積分とは微分の逆」と定義して OK? ... 今学んでいる 1 変数関数の積分に限れば、確かにそういう性質があります。そういうスタイルで定義される積分を「不定積分」と言います(後で学ぶ)。しかし、積分の概念には、単なる「微分の逆」では捉えきれない広がりがあります。例えばいずれ学ぶ「面積分」や「体積分」という種類の積分は、「微分の逆」では定義できません。何回も言いますが、積分は、あくまで「関数に微小量をかけて足し合わせる」こと。「微分の逆」は、たまについてくるオマケみたいなものです。

問 190 表計算ソフトで、関数  $f(x) = \cos x$  を、 $0 \leq x \leq 7$  の範囲で数値積分せよ。また、その結果を数値微分せよ。それらのグラフを重ねて描け。 $\Delta x$  は各自で適当に定めよ。回答は図 8.3 のようになるはず。

## 8.4 積分の公式

実際に関数を積分するときは、積分の定義式(8.11)に遡ってやることは少ない。複雑な関数の場合は前節でやったように数値積分を使うし、そうでなければ、以下に示すような、いくつかの便利な定理(公式)を活用してちゃっちゃとやってしまうのだ。

よくある質問 96 ん? なんか同じようなセリフを P.69 あたりで読んだような... 気のせいでしょう!

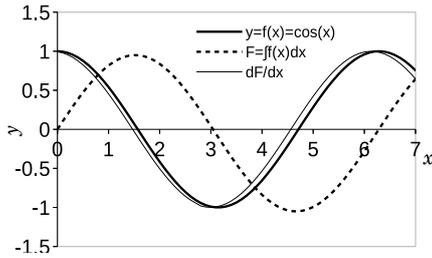


図 8.3  $y = \cos x$  (太実線) と、その数値積分 (点線)、そしてその数値微分 (細実線)。 $x$  の刻みは 0.1。この刻みを小さくすると、太実線と細実線はもっと近くなる。

以下、 $a, b, c$  は実数の定数、 $f(x), g(x)$  を、任意の (積分可能な) 関数とする\*2。また、以後、本章で出てくる変数や定数は全て実数とする (虚数は考えない)。

積分の公式 1: 足し算はバラせる

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (8.13)$$

証明:

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx &\doteq \sum_{k=1}^n \{f(x_k) + g(x_k)\} \Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(x_k) \Delta x_k \\ &\doteq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

1 行目から 2 行目にかけて P.42 の式 (3.86) を使った。

■

注: ここでの“ $\doteq$ ”は、 $\Delta x_k$  を無限小に、 $n$  を無限大にする極限では等号“ $=$ ”になる。以下、同様。

よくある間違い 34 式 (8.13) の左辺を

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx$$

と書く。... カッコを忘れちゃダメです。理由は、上の証明を見ればわかります。カッコがないと、 $f(x)$  には微少量がかか

\*2 詳しくは説明しないが、世の中には積分できない関数も存在する。例えば次式のような積分はできない ( $\infty$  に発散する):

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

りません ( $dx$  が  $g(x)$  だけにかかる)。

積分の公式 2: 定数倍は前に出せる

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad (8.14)$$

証明:

$$\begin{aligned} \int_a^b cf(x) dx &\doteq \sum_{k=1}^n cf(x_k) \Delta x_k \\ &= c \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \doteq c \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

1 行目から 2 行目にかけて P.42 の式 (3.87) を使った。

■

積分の公式 3: 積分区間は分割できる

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad (8.15)$$

証明:  $a$  から  $c$  までの区間を  $m$  個に分割し、途中、 $n$  個めの分割 ( $n \leq m$  とする) の右端が  $b$  になるようにする。つまり  $x_0 = a, x_n = b, x_m = c$  である。 $m, n$  が十分に大きければ、積分の定義から、

$$\int_a^b f(x) dx \doteq \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \quad (8.16)$$

$$\int_b^c f(x) dx \doteq \sum_{k=n+1}^m f(x_k) \Delta x_k \quad (8.17)$$

である。このとき、右辺どうしを足し合わせると、

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k + \sum_{k=n+1}^m f(x_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^m f(x_k) \Delta x_k$$

となる。 $x_0 = a, x_n = b, x_m = c$  を固定したまま、 $n$  と  $m$  を限りなく大きくして  $\Delta x_k$  を限りなく小さくすれば、この式は、積分の定義から

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

■

さて、積分の定義によると、 $\int_a^b f(x) dx$  は、 $a < b$  が前提だった (式 (8.11) の「ただし」以下を見よ)。これを、 $a \geq b$  の場合にも拡張しよう。それには、ここまで証明してきた公式が、 $a \geq b$  の場合にも成り立つように、つじつまを合わせればよい。まずは  $a = b$  の場合。積分の公

式3で,  $b = c = a$  とすれば,

$$\int_a^a f(x) dx + \int_a^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx$$

右辺を左辺に移項すれば,

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

よって, 以下のように約束しよう:

積分の公式4: 始点 = 終点なら積分は0

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (8.18)$$

次に,  $a > b$  の場合。積分の公式3で,  $c = a$  とすれば,

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx \quad (8.19)$$

ここで積分の公式4より, この右辺は0。従って, 以下のように約束しよう:

積分の公式5: 積分区間を逆転すると正負も逆転

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad (8.20)$$

次に, 積分と微分の関係調べていこう。

積分の公式6: 微小区間の積分は単なる掛け算

$h$  が微小量であれば, つまり  $a \leq x \leq a + h$  の範囲で  $f(x)$  がほとんど変化しなければ,

$$\int_a^{a+h} f(x) dx \doteq f(a)h \quad (8.21)$$

証明:  $x_0 = a, x_n = a + h$  として, 積分の定義より,

$$\int_a^{a+h} f(x) dx \doteq \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \quad (8.22)$$

とできる。 $x_k$  を  $a \leq x_k \leq a + h$  の範囲に限定すれば,  $h$  は微小量であるという前提から,  $f(x_k) \doteq f(x_0) = f(a)$ 。従って,

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \doteq \sum_{k=1}^n f(a) \Delta x_k = f(a) \sum_{k=1}^n \Delta x_k$$

ここで,  $\Delta x_k$  は,  $a$  から  $a + h$  までの範囲を  $n$  個の区間に刻んだものなので, その総和は  $h$  となる。従って,

$$f(a) \sum_{k=1}^n \Delta x_k = f(a)h \quad (8.23)$$

従って, 与式が成り立つ。 ■

積分の公式7: 積分の微分は元の関数

$a$  を定数として,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (8.24)$$

証明:  $a$  を任意の定数とし,

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (8.25)$$

とおくと,

$$F(x + dx) = \int_a^{x+dx} f(t) dt \quad (8.26)$$

となる ( $dx$  は無限小)。ここで積分の公式3から,

$$\begin{aligned} F(x + dx) &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+dx} f(t) dt \\ &= F(x) + \int_x^{x+dx} f(t) dt \end{aligned} \quad (8.27)$$

$dx$  は微小量なので積分の公式6より,

$$\int_x^{x+dx} f(t) dt = f(x)dx \quad (8.28)$$

となる ( $dx$  は無限小なので  $\doteq$  が  $=$  になった)。従って, 式(8.27)右辺は,

$$F(x) + \int_x^{x+dx} f(t) dt = F(x) + f(x)dx$$

となる。従って, 式(8.27)は,

$$F(x + dx) = F(x) + f(x)dx \quad (8.29)$$

となる。従って, 導関数の定義式(5.5)(P.66)より,

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

この公式7は, 問189で見たことを裏付けるものだ。 ■

積分の公式 8: 微分の積分は元の関数

$$\int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt = f(x) - f(a) \quad (8.30)$$

証明: まず, 積分の定義より,

$$\int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt \doteq \sum_{k=1}^n f'(t_k) \Delta t_k \quad (8.31)$$

である。ここで  $t_0 = a$ ,  $t_n = x$ ,  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$  である。 $\Delta t_k$  が微小なとき, 微分係数の定義から,

$$f(t_k) \doteq f(t_{k-1}) + f'(t_k) \Delta t_k \quad (8.32)$$

が成り立つ。すなわち,

$$f'(t_k) \Delta t_k \doteq f(t_k) - f(t_{k-1}) \quad (8.33)$$

である。従って, 式 (8.31) 右辺は,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \{f(t_k) - f(t_{k-1})\} &= f(t_1) - f(t_0) \\ &+ f(t_2) - f(t_1) \\ &+ \cdots \\ &+ f(t_{n-1}) - f(t_{n-2}) \\ &+ f(t_n) - f(t_{n-1}) \quad (8.34) \end{aligned}$$

となる。この式は, 前後の行どうして打ち消し合って, 最初と最後, つまり  $f(t_0)$  と  $f(t_n)$  しか残らず, 結局,  $f(t_n) - f(t_0)$ , すなわち  $f(x) - f(a)$  になる。■

公式 7, 8 のように, ある関数をどこかから  $x$  まで積分して  $x$  で微分すれば, もとの関数になってしまうし, ある関数を微分して積分しても, もとの関数に戻ってしまう (これを, 解析学の基本定理 と呼ぶ)。つまり, 微分と積分は, 互いに逆の操作である (あくまで今学んでいる範囲では)。

## 8.5 原始関数と不定積分

ここで話はちょっと変わり, 「原始関数」と「不定積分」というものを学ぼう。この話は, 後で関数の積分を実際に計算する方法を学ぶための準備である。

ある関数  $F(x)$  を微分したら関数  $f(x)$  になるようなとき, すなわち

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad (8.35)$$

となるとき,  $F(x)$  を  $f(x)$  の原始関数 と呼ぶ (定義)。もちろん, このとき,  $f(x)$  は  $F(x)$  の導関数である。従っ

て, 原始関数は導関数の対義語である。

例 8.1

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x \quad (8.36)$$

従って,  $x^2$  は  $2x$  の原始関数である。(例おわり)

よくある間違い 35 原始関数を原子関数と書いてしまう。

よくある間違い 36 「 $F(x)$  を微分して  $f(x)$  になるとき  $F(x)$  を原始関数と呼ぶ」... そう書いたら「 $F(x)$  を  $f(x)$  の原始関数と呼ぶ」と言わねばなりません。原始関数は単体で成立する概念ではありませんから。

ある関数  $f(x)$  の原始関数  $F(x)$  を一般的に求めることを 不定積分 とよび, 以下のように書き表す:

$$\int f(x) dx \quad (8.37)$$

式 (8.37) は式 (8.11) の左辺とよく似た記号を使っているし, 「不定」という語がついているものの「積分」という用語も使っている。しかし, 不定積分は「原始関数を求めること」であり, 式 (8.11) で定義される「積分」とは別物なのだ。式 (8.11) の積分を 定積分 とも呼ぶのは, この「不定積分」との区別を明示するためである。とは言うものの, 後で学ぶように, 定積分と不定積分の間には実は密接な関係がある。だから, 慣習的には, 不定積分も定積分もまとめて「積分」と呼ぶことも多い。

よくある間違い 37 「 $F(x) = \int f(x) dx$  となる  $F(x)$  を  $f(x)$  の原始関数と呼ぶ」... それは不定積分の式ですね。不定積分は「原始関数を求めること」です。この「定義」を言い換えると, 「 $f(x)$  の原始関数を求めたら  $F(x)$  になるとき,  $F(x)$  を  $f(x)$  の原始関数という」となります。定義として変でしょ?

さて, 定数は微分したら 0 になるので, ある関数の原始関数に, 定数を足したり引いたりしたのもも原始関数になる。

例 8.2

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 3) = 2x \quad (8.38)$$

従って,  $x^2 + 3$  も  $2x$  の原始関数である。(例おわり)

また, ある関数  $f(x)$  に 2 つの原始関数  $F(x), G(x)$  が

あったとすると、その差  $F(x) - G(x)$  を微分すれば、

$$\frac{d}{dx}\{F(x) - G(x)\} = F'(x) - G'(x) \quad (8.39)$$

$$= f(x) - f(x) = 0 \quad (8.40)$$

となるので、 $F(x) - G(x)$  は定数である（微分して恒等的に 0 になる関数は定数関数しかない）。つまり、

—— 積分の公式 9: 原始関数の不定性 ——

関数  $f(x)$  の原始関数が  $F(x)$  であるとき、それに任意の定数  $C$  を足した関数  $F(x) + C$  も、 $f(x)$  の原始関数である。また、逆に、 $f(x)$  の任意の 2 つの原始関数の差は、定数である。

従って、原始関数は、定数の足し引きのぶんだけ、不確定である。その不確定な定数のことを 積分定数 と呼び、通常は  $C$  と書く。

不定積分は原始関数を一般的に求めることなので、答えには常に積分定数  $C$  をつけねばならない。

例 8.3  $2x$  の原始関数は、一般的に、 $x^2 + C$  と書ける ( $C$  は積分定数)。すなわち、

$$\int 2x \, dx = x^2 + C \quad (8.41)$$

(例おわり)

よくある間違い 38 不定積分して、積分定数をつけ忘れる。

以後しばらく、不定積分において重要な公式をいくつか示す。これらの多くは、定積分でも似たようなものがあったことに君は気づくだろう：

—— 積分の公式 10:  $x^a$  の不定積分 ——

$a$  を  $-1$  以外の定数とすると、

$$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (8.42)$$

証明：微分で学んだように、 $a \neq -1$  ならば、実際、

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{a+1} x^{a+1} \right) = x^a \quad (8.43)$$

■

問 191 上の公式を利用して以下の不定積分を求めよ。

- (1) (2) (3)

$$\int x^2 \, dx \quad \int \frac{1}{x^2} \, dx \quad \int dx$$

また、積分の公式 1, 2 は、不定積分についても成り立つ。というのも、もし  $f(x), g(x)$  の原始関数がそれぞれ  $F(x), G(x)$  ならば、

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

$$(aF(x))' = aF'(x) = af(x)$$

なので、 $F(x) + G(x)$  は  $f(x) + g(x)$  の原始関数であり、 $aF(x)$  は  $af(x)$  の原始関数である。従って、

—— 積分の公式 11: 線型性 ——

$$\int \{f(x) + g(x)\} \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx \quad (8.44)$$

$$\int af(x) \, dx = a \int f(x) \, dx \quad (8.45)$$

ただし、右辺に任意の定数（積分定数）がついてもかまわない。

よくある間違い 39 式 (8.44) の左辺を、 $\int f(x) + g(x) \, dx$  と書いてしまう ... これはダメ。定積分でも不定積分でも意味的・形式的には、 $dx$  は  $f(x) + g(x)$  全体にかかる乗算なので、 $f(x) + g(x)$  は括弧 ( ) に入れなければいけません。

例 8.4 以下の不定積分を求めてみよう：

$$\int (2 + 3x) \, dx \quad (8.46)$$

積分の公式 11 より、与式は、

$$\int 2 \, dx + \int 3x \, dx = 2 \int dx + 3 \int x \, dx \quad (8.47)$$

となる。右辺の各項に積分の公式 10、つまり式 (8.42) を使えば、与式は、

$$= 2(x + C_1) + 3\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) \quad (8.48)$$

となる。ここで  $C_1, C_2$  は、それぞれ  $\int dx$  と  $\int x \, dx$  から生じる積分定数であり、それぞれ任意の実数である。この式を整理すると、

$$= 2x + \frac{3x^2}{2} + 2C_1 + 3C_2 \quad (8.49)$$

となる。ところが、 $C_1, C_2$  は任意の実数なので、 $2C_1 + 3C_2$  も任意の実数である。従って  $2C_1 + 3C_2$  を改めて  $C$  とおけば、与式は

$$= 2x + \frac{3x^2}{2} + C \quad (8.50)$$

となる。この例では説明のために積分定数のことを念入りに書いたが、結局最後には積分定数は一つにまとまってしまった。従って、いくつかの関数の定数倍や和であらわされる関数の不定積分は、それぞれの項を、積分定数をいったん忘れて不定積分し、最後に全体でひとつの積分定数をつけたせばよい。つまり、式 (8.46) という問に対して、式 (8.47)、式 (8.48)、式 (8.49) を省略していきなり式 (8.50) を答えてよい。(例おわり)

ここで注意: 不定積分の結果は元の関数の原始関数のはずだから、結果を微分したら元の関数に戻るはず。だから、不定積分の結果に自信が持てない場合は、その結果を微分して元の関数に戻るかどうか確かめるとよい(ほとんどの場合、関数は不定積分するより微分する方が計算は簡単である)。不定積分に慣れていない人には、特にそのことを強く勧めておく。

問 192 以下の不定積分を求めよ。得られた原始関数を微分し、被積分関数に戻ることを確認せよ。

$$\int (1 + x + x^2) dx \quad (8.51)$$

ところで、 $x^a$  の不定積分に関する公式 10 は、 $a = -1$  のとき、つまり  $1/x$  については使えない。なぜなら、このとき  $a + 1 = 0$  となって「0での割り算」が発生してしまうからである。ここで、自然対数の微分、すなわち P.89 式 (6.30) を思いだそう：

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (8.52)$$

これを使えば、 $1/x$  の不定積分は以下のようになりそうな気がする\*3:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (8.53)$$

ただし、 $\ln x$  という関数は、 $0 < x$  でしか成立しない。しかし、 $1/x$  という関数は、 $x < 0$  でも成立する。では、 $x < 0$  であるようなときの  $1/x$  の不定積分はどうなるだろう? 答えは、 $\ln(-x) + C$  である(この場合、 $x < 0$  だから、 $\ln$  の内側の  $-x$  は正である)。実際、これを微分し

\*3

$$\int \frac{1}{x} dx \text{ を } \int \frac{dx}{x} \text{ と書く。}$$

てみると、合成関数の微分より、

$$\{\ln(-x)\}' = (-x)' \frac{1}{-x} = \frac{1}{x} \quad (8.54)$$

となり、確かに  $1/x$  になる。つまり、

$$0 < x \text{ のとき、} \int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (8.55)$$

$$x < 0 \text{ のとき、} \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C \quad (8.56)$$

となる。いずれの場合も、右辺の  $\ln$  の内側は正なので、いっそ統一的に  $|x|$  と書いてしまおう。要するに、 $x$  が正だろうが負だろうが、次式が成り立つ：

積分の公式 12:  $1/x$  の不定積分

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (8.57)$$

よくある間違い 40  $1/x$  の不定積分で、 $\ln$  の中の絶対値記号を付け忘れる ... これは毎年、多くの資源生を泣かせるミスです(後で「微分方程式」を学ぶときに痛い目に会うのです)。

農学や環境科学などの応用分野では、この公式 12 は、極めて重要である。というのも、様々な現象を微分方程式というツールで記述して解析しようとするとき、この形の不定積分が、頻繁にあらわれるからである。詳しくは第 10 章で学ぼう。

指数関数は、微分しても指数関数だから、不定積分も簡単である：

積分の公式 13: 指数関数の不定積分

$$\int \exp x dx = \exp x + C \quad (8.58)$$

ところで、関数  $f(x)$  の原始関数が  $F(x)$  であるとき、 $F(ax + b)$  を  $x$  で微分すると ( $a, b$  は定数とする)、 $a f(ax + b)$  となる。従って、

$$f(ax + b) \text{ の原始関数は、} F(ax + b)/a \quad (8.59)$$

となる。

例 8.5 式 (8.59) を使うと、

$$\int (3x + 1)^4 dx = \frac{1}{3 \times 5} (3x + 1)^{4+1} + C \quad (8.60)$$

$$= \frac{(3x + 1)^5}{15} + C \quad (8.61)$$

(例おわり)

注: 式 (8.59) は「合成関数の微分」を逆にしたような公式だが、あくまで  $f(\cdot)$  の中が  $ax + b$  という形のときにしか使えない。

よくある間違い 41 以下のような誤りをする人が多い:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2x} \ln|1+x^2| + C \quad \text{これは間違い!}$$

右辺を  $x$  で微分すると決して左辺には一致しない。この積分は、後に問 198 で学ぶ。

今まで学んだ公式を組み合わせれば、以下のような不定積分ができる。それぞれ、右辺を微分して確認せよ。

例 8.6

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C \quad (8.62)$$

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2(2x+1)} + C \quad (8.63)$$

$$\int \exp 2x \, dx = \frac{\exp 2x}{2} + C \quad (8.64)$$

(例おわり)

問 193 以下の不定積分を求めよ。得られた原始関数を微分し、被積分関数に戻ることを確認せよ。

(1) (2)

$$\int (2x+1)^3 \, dx \quad \int \frac{dx}{x+1}$$

(3) (4)

$$\int \frac{dx}{1-x} \quad \int \exp(-x) \, dx$$

(5)

$$\int \exp(x+1) \, dx$$

よくある間違い 42 この問題の (3) を、 $\ln|1-x| + C$  と答えてしまう... これも毎年、多くの資源生を泣かせるミスです。これを微分すると、 $-1/(1-x)$  になってしまう!

こんどは三角関数の不定積分を考えよう。P.108 の式 (7.61), 式 (7.62) より、 $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$  だから、

積分の公式 14: 三角関数の不定積分

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \quad (8.65)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad (8.66)$$

となることはすぐわかる。 $\sin x$  や  $\cos x$  の累乗や積を含むような関数は、倍角公式などを使ってシンプルな形に変形してから不定積分する。

例 8.7

$$\int \cos x \sin x \, dx = \int \frac{\sin 2x}{2} \, dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C$$

ここで、P.104 の式 (7.36) を使った。ちなみにこの不定積分は、後で P.127 問 197 で学ぶように、「置換積分」という方法でも可能。(例おわり)

例 8.8

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

ここで、P.104 の式 (7.37) を使った。(例おわり)

例 8.9

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

ここで、P.104 の式 (7.38) を使った。(例おわり)

以上のような不定積分は、勘と慣れがあれば、なんとかできるだろう。しかし、一般に、どんな関数でもきれいに不定積分できるわけではない。ちょっと複雑な関数になると、その不定積分は不可能になるか、できても職人芸になる。不定積分できるのは、被積分関数が単純でラッキーな場合だけなのだ。

例えば、 $\exp(x)$  の不定積分は簡単だが、P.90 で学んだガウス関数  $\exp(-x^2)$  の不定積分は、これまで学んだ数学では不可能である(ガンマ関数という、君には未知の数学が必要)。

定積分や不定積分も含めて、一般に、問題を、論理的に厳密な式変形によって身近な関数(多項式や三角関数、指数関数、対数関数など)の組み合わせとして解くことを、解析的に解く という。上で述べたのは、「不定積分を解析的にできるのはラッキーなときだけ」ということである。

では解析的に解けない問題はどうか? 数値積分

だ! コンピューターにやらせるのだ! しかし数値積分には、誤差とかいろいろ問題があるので、解析的に解けるに越したことはない。というわけで、不定積分を解析的にやる練習をもう少しやろう。

## 8.6 部分分数展開

例 8.10 以下の不定積分を考える:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x} \quad (8.67)$$

被積分関数が、2次式の逆数になっているので、このままでは不定積分できない。そこで、以下のように変形する:

$$= \int \frac{dx}{x(x+1)} \quad (8.68)$$

$$= \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \quad (8.69)$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} \quad (8.70)$$

こうすると、被積分関数は、1次式の逆数になる。1次式の逆数は、 $1/x$  を変形したものだから、 $1/x$  の不定積分を応用することができる。すなわち、

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + C \quad (8.71)$$

となる(積分定数を  $C$  とする)。ここで終えてもよいが、普通は、 $\ln$  をひとまとめにして、

$$= \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C \quad (8.72)$$

とする。(例おわり)

例 8.10 の式 (8.68) から式 (8.69) の変形のように、 $x$  の多項式が分数の分母になっているような関数は、 $x$  の一次式の分数に分解することができる。これを「部分分数展開」と呼ぶ。部分分数展開は、不定積分における重要なテクニックである。

部分分数展開は、通分の逆操作である。例えば、

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} \quad (8.73)$$

という変形は「通分」だが、その逆:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \quad (8.74)$$

という変形が、部分分数展開である。通分は素直に計算すれば簡単にできるものだが、部分分数展開はそう簡単にはいかない。

例 8.11

$$\frac{5}{(2x+1)(x+3)} \quad (8.75)$$

を部分分数展開せよ、と言われて暗算でできる人は少ないだろう。これは以下のようにすればよい: まず、部分分数展開後の「こうなって欲しい」という形の式を、

$$\frac{a}{2x+1} + \frac{b}{x+3} \quad (8.76)$$

というふうに、未知数  $a, b$  を使って表す。これを通分すると、

$$\begin{aligned} \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{x+3} &= \frac{a(x+3) + b(2x+1)}{(2x+1)(x+3)} \\ &= \frac{(a+2b)x + 3a + b}{(2x+1)(x+3)} \end{aligned}$$

となる。これが式 (8.75) と恒等的に等しくならねばならないから、

$$5 = (a+2b)x + 3a + b \quad (8.77)$$

が恒等的に成り立たねばならない。従って、

$$0 = a + 2b \quad (8.78)$$

$$5 = 3a + b \quad (8.79)$$

となり、これを解いて、 $a = 2, b = -1$  となる。従って、

$$\frac{5}{(2x+1)(x+3)} = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+3} \quad (8.80)$$

である。(例おわり)

問 194 以下の不定積分を求めよ。得られた原始関数を微分し、もとの関数(被積分関数)に戻ることを確認せよ。

$$(1) \quad (2) \quad (3)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x} \quad \int \frac{dx}{x^2 - 1} \quad \int \frac{x dx}{x^2 - 1}$$

問 195  $a, b$  を正の実数とする。次式を示せ ( $C$  は積分定数)。

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{b-x}{a-x} \right| + C \quad (8.81)$$

よくある質問 97 なんか小難しいですが、これ、何に使うんですか? ... 問 194(1) は、生物学の個体群動態理論で使います。問 195 は、化学の反応速度論で使います。

## 8.7 部分積分

積の微分の公式, すなわち P.71 式 (5.41):

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (8.82)$$

の両辺を不定積分すると, P.122 式 (8.44) より,

$$\int (fg)' dx = \int f'g dx + \int fg' dx \quad (8.83)$$

となる。左辺, つまり  $(fg)'$  の原始関数は, もちろん  $fg$  になる。従って,

$$fg = \int f'g dx + \int fg' dx \quad (8.84)$$

となる。右辺第 2 項を左辺に移項し, 左辺と右辺を入れ替えれば,

積分の公式 15: 部分積分

$$\int f'g dx = fg - \int fg' dx \quad (8.85)$$

となる。このテクニックを部分積分という。被積分関数が, 何かの関数の微分 (ここでは  $f'$ ) と, 何かの関数 (ここでは  $g$ ) との積になっている場合は, この公式を使うと便利である。

例 8.12

$$\int x \cos x dx \quad (8.86)$$

を考えよう。ここで,  $\cos x = (\sin x)'$  なので, 与式は,

$$\int x (\sin x)' dx \quad (8.87)$$

とできる。ここで  $f = \sin x$ ,  $g = x$  とみなして上の公式を使えば,

$$\begin{aligned} x \sin x - \int (x)' \sin x dx \\ = x \sin x - \int \sin x dx \\ = x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

とできる。(例おわり)

この例では, 発想の順序としては, まず問題を見たときに  $\cos x$  の前にかかっている  $x$  がじゃまだなあ, と思う。この  $x$  を微分してしまえば消えてしまうだろう。そのためには部分積分が使えるかもしれない。では,  $\cos x$  が何かの関数の微分の形にできないか? そうだ,  $\cos x$

は  $\sin x$  の微分だった, というふうを考えるのだ。

問 196 以下の不定積分を求めよ。ただし, (3) では  $0 < x$  とする。得られた原始関数を微分し, もとの関数 (被積分関数) に戻ることを確認せよ。

$$(1) \quad \int x e^x dx \quad (2) \quad \int x \sin x dx \quad (3) \quad \int \ln x dx$$

## 8.8 置換積分

関数  $f(x)$  の原始関数が  $F(x)$  であるとしよう。つまり,

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad (8.88)$$

である。この式は, 次式と同じ意味である:

$$F(x) = \int f(x) dx \quad (8.89)$$

ここで,  $x$  が別の変数  $t$  の関数だとしよう。すると,  $F(x)$  は  $t$  の関数 (合成関数)  $F(x(t))$  とみなすこともできる。これを  $t$  で微分すると,

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = \left( \frac{d}{dx} F(x) \right) \frac{dx}{dt} \quad (8.90)$$

となることは, 合成関数の微分の公式<sup>\*4</sup>から明らかである。

ここで,  $dF(x)/dx = f(x)$  に注意すれば, 式 (8.90) は,

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = f(x) \frac{dx}{dt} \quad (8.91)$$

となる。この式は,

$$f(x) \frac{dx}{dt} \quad (8.92)$$

の,  $t$  による微分に関する原始関数は,  $F(x(t))$  である, というふうに解釈できる。すなわち,

$$F(x(t)) = \int f(x) \frac{dx}{dt} dt \quad (8.93)$$

である。式 (8.89), 式 (8.93) より,

<sup>\*4</sup> 式 (5.49) で,  $g$  を  $F$ ,  $f$  を  $x$ ,  $x$  を  $t$  に置き換えると式 (8.90) になる。

積分の公式 16: 置換積分

$$\int f(x) dx = \int f(x) \frac{dx}{dt} dt \quad (8.94)$$

となる。この式は、変数  $x$  による不定積分を、別の変数  $t$  による不定積分に置き換えている。これを置換積分という。置換積分は、不定積分の重要なテクニックである。

例 8.13

$$\int x \cos x^2 dx \quad (8.95)$$

を考えよう。ふつう、三角関数の中に  $x^2$  なんかが入っていたら、なかなか不定積分はできない。そこで、

$$x^2 = t \quad (8.96)$$

と置く。すると、

$$\frac{dt}{dx} = 2x \quad (8.97)$$

なので、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2x} \quad (8.98)$$

である。ここで上の置換積分の公式を使えば、

$$\int x \cos x^2 dx = \int x \cos t \frac{1}{2x} dt \quad (8.99)$$

となる。この右辺は簡単に計算できて、

$$= \int \frac{\cos t}{2} dt = \frac{\sin t}{2} + C \quad (8.100)$$

となる。最後に  $t$  を  $x$  に戻して (これをやり忘れる人が多い!)

$$= \frac{\sin x^2}{2} + C \quad (8.101)$$

が答えになる。

ここでは説明のために詳しく書いたが、実際は、形式的に式 (8.96) の両辺をそれぞれ  $x$  と  $t$  で微分してそれぞれに  $dx$  と  $dt$  を乗じて

$$2x dx = dt \quad (8.102)$$

と書き、

$$dx = \frac{dt}{2x} \quad (8.103)$$

と変形して、式 (8.95) の  $dx$  に代入する、という手順を踏めばよい。(例おわり)

問 197 以下の不定積分を求めよ。得られた原始関数を微分し、もとの関数 (被積分関数) に戻ることを確認せよ。

$$(1) \quad (2)$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx \quad \int x e^{-x^2} dx$$

$$(3) \quad (4)$$

$$\int \cos x \sin x dx \quad \int x \sqrt{1-x^2} dx$$

問 198 以下の不定積分を求めてみよう:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} \quad (8.104)$$

(1)  $x = \tan \theta$  と置換することで、上の式は次のようになることを示せ:

$$\int \frac{d\theta}{(\cos^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta)} \quad (8.105)$$

ヒント: ここでは  $\theta$  が式 (8.94) の  $t$  に相当する。

(2)  $\cos^2 \theta (1 + \tan^2 \theta) = 1$  であることを示せ。

(3) 式 (8.105) は、

$$\int d\theta$$

となることを示せ。明らかに、この不定積分は、

$$\theta + C \quad (8.106)$$

となる ( $C$  は積分定数)。

(4) 以上より、次式を示せ:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \quad (8.107)$$

よくある間違い 43 置換積分した後、変数をもとに戻し忘れる。例えば式 (8.104) を式 (8.106) で止めてしまい、式 (8.107) まで到達しない。... 「間違い」ではないけど、解答として不完全。

よくある質問 98 上の問題で、 $x = \tan \theta$  と置換する、なんていう発想はどこから来るのですか? ... 分母の  $1+x^2$  という 2 つの項を 1 つにまとめてなおかつ分数を解消するには、 $1 + \tan^2 \theta$  の公式が使えるんじゃないか? という発想ですが、アクロバチックというか職人芸ですよ。世の中にはそういうのを思い付く積分職人みたいな人がいるのです。我々は、そういう人の仕事を使わせてもらえるように、とりあえず式 (8.104) の考え方を理解すれば十分です。

## 8.9 定積分を求めるには

ここで、話は定積分に戻る。関数の定積分を解析的に求める時は、定積分の定義に戻るのではなく、原始関数、つまり不定積分を使うことがとても多いのだ。そのことを今から説明する：まず積分の公式 8 (P.121) を思い出そう：

$$\int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt = f(x) - f(a) \quad (8.108)$$

ここで、形式的に  $f$  を  $F$  と書き換えよう：

$$\int_a^x \frac{d}{dt} F(t) dt = F(x) - F(a) \quad (8.109)$$

ここで、改めて形式的に

$$\frac{d}{dt} F(t) = f(t) \quad (8.110)$$

とする。つまり、 $F$  は何らかの関数  $f$  の原始関数とする (式 (8.110) の  $f$  と式 (8.108) の  $f$  は別物である)。すると、式 (8.109) は、

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a) \quad (8.111)$$

となる。形式的に、 $x$  を  $b$  に、 $t$  を  $x$  に書き換えると、

積分の公式 17

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (8.112)$$

ここで、 $F(x)$  は  $f(x)$  の任意の原始関数である。

となることがわかった。つまり、定積分 (左辺) を求めるには、まず不定積分して、得られた原始関数に、積分区間の両端の値を入れて引き算すればいい (右辺)。

では、これを使った定積分の例を示そう：

例 8.14  $\int_1^2 x^2 dx$  は何だろう？

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \quad (8.113)$$

( $C$  は積分変数) だから、式 (8.112) より、

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} \quad (8.114)$$

(例おわり)

よくある質問 99 式 (8.114) の 2 番目の式で、原始関数が出てきたのはわかりましたが、その積分定数  $C$  はどこに行った

のですか？ ... あえて積分定数  $C$  も書くと、

$$\int_1^2 x^2 dx = \left(\frac{2^3}{3} + C\right) - \left(\frac{1^3}{3} + C\right) \quad (8.115)$$

となるでしょ？  $C$  はどうせ引き算されて消えます。

なるほど。でも、そうであっても、ちゃんと  $C$  を書くべきでは？ ... いえ、これでいいのです。式 (8.112) の  $F$  は、 $f$  の原始関数であれば何でもいいのです。 $x^3/3$  は  $x^2$  の原始関数のひとつですから、それを式 (8.112) に入れたままで。

ここで、便利な記号を紹介する。関数  $F(x)$  について、 $F(b) - F(a)$  のことを、 $\left[F(x)\right]_a^b$  と書くのだ。すると式 (8.114) は、

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{3} \quad (8.116)$$

と、少しシンプルに書ける。

ここで注意。式 (8.114) の積分変数  $x$  は、積分の結果には、もはや現れていない。従って、積分変数を、 $x$  と書こうが  $t$  と書こうが  $p$  と書こうが何と書こうが、定積分の結果は同じである。つまり、 $\int_1^2 x^2 dx$  を  $\int_1^2 t^2 dt$  とか  $\int_1^2 p^2 dp$  と書いても同じことなのだ。

問 199 以下の定積分を求めよ。(  $a$  は実数の定数、 $n$  は自然数の定数とする。)

(1)  $\int_0^1 a dx$  (2)  $\int_0^1 ax dx$

(3)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$  (4)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$

(5)  $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx$  (6)  $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx$

(7)  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  (8)  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

定積分で置換積分を使うときは、もとの積分変数にわざわざ戻したりしないで、積分区間の上端・下端を置換後の変数に変換して計算すればよい。

問 200 以下の定積分を求めよ ( $R$  は正の定数とする)。

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad (8.117)$$

問 201  $a$  を正の実数、 $f(x)$  を任意の (積分可能な)

奇関数,  $g(x)$  を任意の (積分可能な) 偶関数として, 以下の式が成り立つことを示せ:

$$(1) \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad (8.118)$$

$$(2) \int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx \quad (8.119)$$

問 202 以下の積分を, 計算せずに求めよ。

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx \quad (2) \int_{-500}^{500} (x^5 + 3x^3 - x) dx$$

## 8.10 微分と積分の関係

本章の最初の方で, 微分と積分は逆の関係と述べた。ここでは少し違った見方を考えてみる。

「積分の公式 17」である式 (8.112) は, 変形すると次式になる:

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(x) dx \quad (8.120)$$

ここで,  $F$  は  $f$  の原始関数なのだから,  $f(x)$  を  $F'(x)$  で置き換えてよい。また,  $a = x_0$ ,  $b = x_0 + \Delta x$  と置き換えよう:

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} F'(x) dx \quad (8.121)$$

ここで形式的に  $F(x)$  を  $f(x)$  と置き換えると,

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f'(x) dx \quad (8.122)$$

となる。さて, 式 (8.122) を P.66 の式 (5.5) や式 (5.6):

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)dx \quad (8.123)$$

$$f(x_0 + \Delta x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (8.124)$$

と比べてみよう。特に左辺と等号に注目。式 (8.122) と式 (8.123) は,  $\Delta x$  と  $dx$  が違うが, 等号“=”は同じだ。式 (8.122) と式 (8.124) は, 左辺は同じだが, 前者は等号“=”, 後者は近似等号“ $\doteq$ ”を使っている点が違う。式 (8.122) は, 式 (8.124) を積分を使って拡張し, 式 (8.123) と同じくらいの厳密さにした式なのだ。そのポイントは, 式 (8.123) や式 (8.124) の右辺で「 $f'(x_0)$  と微小量の積」だったところが, 式 (8.122) では「 $f'$  を積分したもの」に置き換わったことだ。微分 (掛ける微小量) では近くまでしか行けないが, 積分 (微小量を掛けて足す

こと) では遠くまで行けるのだ。

これらの 3 つの式は,  $x_0$  から離れたところの関数の値を, 微分係数を使って求めるという点では同じであり, いわば「親戚」である。その中で, 最も一般性が高い (遠くまで行ける) のは式 (8.122) である。実際の応用でも, 式 (8.122) はよく出てくる。

## 演習問題

演習問題 25 ガウス関数  $f(x) = \exp(-x^2)$  を考える。

(1) 表計算ソフトで,  $y = f(x)$  のグラフを,  $-4 \leq x \leq 4$  の範囲で描け。ヒント: セルに数式を記述するとき,  $-x^2$  を「 $-x \wedge 2$ 」のように表現するとうまくいかない。表計算ソフトは, この記述を  $(-x)^2$  と解釈してしまうのだ。かわりに, 「 $-x^*x$ 」とか, 「 $-(x \wedge 2)$ 」と表現するとよい。

(2)  $f(x)$  を  $x = -4$  から定積分してできる関数:

$$F(X) = \int_{-4}^X \exp(-x^2) dx \quad (8.125)$$

を,  $-4 \leq X \leq 4$  の範囲で, 表計算ソフトを使って数値積分によって求め, その結果をグラフに描け。刻み幅は 0.1 程度でよい。

(3)  $F(4)$  の値を述べよ。その値を  $\sqrt{\pi}$  の値と比較せよ。

なおこの関数は, 解析的に不定積分するのは困難である。ただし,  $-\infty$  から  $\infty$  までの定積分は, 以下のようになることがわかっている:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi} \quad (8.126)$$

これを ガウス積分 という。

式 (8.126) は, 統計学で使う重要な式である。

よくある質問 100 読めばわかるけど, 自力では思いつきません... それでいいのです。我々は数学類でもないのだから, 偉い数学者が思いついたことを頂戴して, 理解・再現できるようにしなければいけません。

でもそれじゃあテストが解けません... 「解ける」よりもまず「理解する」が大事。テストに出るのは, テキストに載っていることをきちんと理解していれば解ける問題がほとんどです。「定義を述べよ」とかね。「理解しないで解き方だけ覚える」みたいな勉強は, 虚しいからやめましょう。そんなことのために大学に来たんじゃありませんし, 我々もそんなことをさせるために教員をやっているんじゃないから。

よくある質問 101 定義を覚えることに違和感があります。数学は暗記科目じゃないと思う。... 私も昔はそう思っていました。そして膨大な時間を無駄にしました。高校までの数学は、定義にこだわらなくても、素朴な直感でなんとかなるので、パズル脳のある人は「考えるだけ」でやっていけます。でも、大学になると、素朴な直感では太刀打ちできない数学が出てきます。直感よりも先に、定義と論理が最大の武器になります。まず定義を覚え、定義に沿って例を考え、定義に基づいて問題を解き、わからなくなったら定義に戻る。そうやって定義を頭に馴染ませるうちに、定義がよく出来ていることを理解する。その地道な繰り返しは、君の直感を磨くのです。

よくある質問 102 すべてはすべての定義であるだけな気がしてなりません。... そんなことないですよ。例えば、三角関数の加法定理は何かの定義ではなく、三角関数の定義と三平方の定理から論理的に導出できる定理です。

## 問題の解答

以下、特に断らない限り、 $C$  を積分定数とする。

答 187 略 (がんばれ!)

答 188 略 (がんばれ!)

答 189 略 (がんばれ!)

答 190 略 (がんばれ!)

答 191

(1)  $x^3/3 + C$     (2)  $-1/x + C$     (3)  $x + C$

注:  $\int dx$  とは、 $\int 1 dx$ , つまり 1 の原始関数 (微分したら定数 1 になる関数) のこと。

答 192  $x + x^2/2 + x^3/3 + C$

答 193

(1)  $(2x+1)^4/8 + C$     (2)  $\ln|x+1| + C$   
 (3)  $-\ln|1-x| + C$     (4)  $-\exp(-x) + C$   
 (5)  $\exp(x+1) + C$

答 194

(1) まず部分分数展開をしよう。

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$$

とおく。すると、

$$\frac{a(x-1)+bx}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)}$$

これを満たす  $a, b$  を求める。分子の  $x$  の項から、 $a+b=0$ 。分子の定数項から、 $-a=1$ 。従って、 $a=-1, b=1$ 。よって、

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

これで部分分数展開できた。従って、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x-1)} dx &= \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \ln|x-1| - \ln|x| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C \end{aligned}$$

以下、部分分数展開の過程は省略する。

(2)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-1} &= \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} \\ &= \int \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \{ \ln|x-1| - \ln|x+1| \} + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^2-1} &= \int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)} \\ &= \int \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \{ \ln|x-1| + \ln|x+1| \} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln |(x-1)(x+1)| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C \end{aligned}$$

答 195

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} \right) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \{ -\ln|a-x| + \ln|b-x| \} + C = \text{右辺} \end{aligned}$$

答 196

$$(1) \int x e^x dx = \int x(e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx \\ = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

$$(2) \int x \sin x dx = \int x(-\cos x)' dx \\ = x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x) dx \\ = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$(3) \int \ln x dx = \int (x)' \ln x dx \\ = x \ln x - \int x(\ln x)' dx = x \ln x - \int x \left(\frac{1}{x}\right) dx \\ = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

答 197

(1)  $1+x^2=t$  とおくと,  $2x dx = dt$  より,

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(1+x^2) + C$$

ここで,  $1+x^2$  は常に正なので, 絶対値記号は不要。(2)  $x^2=t$  とおくと,  $2x dx = dt$  より,

$$\int x e^{-x^2} dx = \int \frac{e^{-t}}{2} dt = -\frac{e^{-t}}{2} + C = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C$$

(3)  $\sin x = t$  とおくと,  $\cos x dx = dt$  より,

$$\int \sin x \cos x dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C \quad (8.127)$$

(別解)  $\cos x = t$  とおくと,  $-\sin x dx = dt$  より,

$$\int \sin x \cos x dx = -\int t dt \\ = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C \quad (8.128)$$

注: 式 (8.127) と式 (8.128) は, 見かけは違うが, ともに原始関数である。実際, 式 (8.128) について,  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  を使って  $\cos^2 x$  を消去すると, 定数部分を除けば式 (8.127) と同じになる。原始関数は積分定数のぶんだけ任意性があるので, 定数部分の違いは許容される。また, この問題は例 8.7 と同じであり, 結果は一見すると違うが, その違いも積分定数で吸収される (倍角公式を使って確かめてみよ)。

(4)  $1-x^2=t$  とおくと,  $-2x dx = dt$ 

$$\int x \sqrt{1-x^2} dx = \int -\frac{1}{2} \sqrt{t} dt \\ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} + C = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} + C$$

答 198

(1)  $x = \tan \theta$  と置くと,  $dx/d\theta = 1/\cos^2 \theta$ 。したがって,  $dx = d\theta/\cos^2 \theta$ 。式 (8.104) の  $x$  に  $\tan \theta$  を代入し,  $dx$  に上の式を代入すると, 与式を得る。(2)  $(\cos^2 \theta)(1+\tan^2 \theta) = (\cos^2 \theta)(1+\sin^2 \theta/\cos^2 \theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 

(3) 略。

(4) 略 ( $\theta = \arctan x$  より明らか)。

答 199

$$(1) \int_0^1 a dx = [ax]_0^1 = a$$

$$(2) \int_0^1 ax dx = [ax^2/2]_0^1 = a/2$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

( $\sin x$  は奇関数だから当然とも言える。)

(4)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\ = \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

(5) (部分積分を使う) 与式=

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(-\cos x)' dx = [-x \cos x]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} (x)' \cos x dx \\ = 2\pi + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 2\pi$$

(6) (部分積分を 2 回使う。式 (7.24), 式 (7.25) を使う) 与式=

$$\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 (\sin nx)' dx \\ = \frac{1}{n} [x^2 \sin nx]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2)' \sin nx dx \\ = -\frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} x (\cos nx)' dx \\ = \frac{2}{n^2} [x \cos nx]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\ = \frac{4\pi \cos n\pi}{n^2} = (-1)^n \frac{4\pi}{n^2}$$

答 200  $x = R \sin \theta$  と置こう (置換積分),  
 $dx = R \cos \theta d\theta$  である。

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - (R \sin \theta)^2} R \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} R^2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} R^2 \sqrt{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} R^2 \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} R^2 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[ R^2 \frac{\theta + (\sin 2\theta)/2}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4} \end{aligned}$$

ここで、1 行目では積分の範囲が「 $x = 0$  から  $x = R$  まで」  
 だったのが 2 行目では「 $\theta = 0$  から  $\theta = \pi/2$  まで」に変わった  
 ことに注意せよ。これは置換積分で変数変換したことによる。

答 201

(1) まず積分区間を分割すると、P.119 式 (8.15) より

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad (8.129)$$

となる。次に、右辺の第一項で  $x = -t$  と置換する。  
 $dx = -dt$  となり、積分区間は「 $t = a$  から  $t = 0$ 」  
 となるので、

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t) dt$$

となる (最後の变形で積分の公式 5 を使った)。  
 $f(x)$  が奇関数なら  $f(-t) = -f(t)$  だからこの式  
 は、 $-\int_0^a f(t) dt$  となる。 $t$  を改めて  $x$  と書き換  
 えればこの式は  $-\int_0^a f(x) dx$  となる。従って、式  
 (8.129) は、

$$\int_{-a}^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

(2) 前問と同様にまず積分区間を分割する:

$$\int_{-a}^a g(x) dx = \int_{-a}^0 g(x) dx + \int_0^a g(x) dx \quad (8.130)$$

前問と同様に、 $x = -t$  と置換すれば、右辺の第一

項は、

$$\int_{-a}^0 g(x) dx = \int_a^0 g(-t)(-dt) = \int_0^a g(-t) dt$$

となる。 $g(x)$  が偶関数なら  $g(-t) = g(t)$  だから、  
 この式は、 $\int_0^a g(t) dt$  となる。 $t$  を改めて  $x$  と書き  
 換えれば、この式は、 $\int_0^a g(x) dx$  となる。従って、式  
 (8.130) は

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a g(x) dx &= \int_0^a g(x) dx + \int_0^a g(x) dx \\ &= 2 \int_0^a g(x) dx \end{aligned}$$

答 202 計算するまでもなく、いずれも 0。(被積分関数が  
 奇関数で、積分区間が正負対称なので、前問の (1) が適  
 用される)

## 第9章

# 積分の応用

積分は、様々なことに応用される。2つの量の間の関係を知りたいとき、2つの量の微小量どうしの関係がわかれば、あとは積分で何とかなる。本章ではその実例を学び、積分がいかに便利で強力なツールかを君に納得してもらおう。

### 9.1 円の面積

ある図形の面積を知りたいとき、その図形を多くの小さな単純な図形に分解して、それぞれの小図形の面積を足し合わせる(積分する)ことで、もとの図形の面積がわかる。例として、円の面積や球の体積の公式を導いてみよう。

まず円の面積の公式を、オーソドックスなアプローチで求めてみよう。P.116で学んだように、関数のグラフが $x$ 軸より上にあるときは、その関数の定積分は、その関数と $x$ 軸で囲まれた図形の面積になる。それを使うのだ。

例 9.1 2次元平面上に、原点を中心とする半径 $R$ の円を考え、その面積を $S$ とする。この円が、 $0 \leq x$ かつ $0 \leq y$ の範囲、つまり第一象限の範囲で、 $x$ 軸と $y$ 軸とで囲む領域(つまり円板の $1/4$ )の面積を求めてみよう。この円周の上の点 $(x, y)$ は、

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (9.1)$$

を満たすが、特にこの範囲では、

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (9.2)$$

を満たす。従って、この領域(円板の $1/4$ )の面積 $X$ は、次式のようになる:

$$X = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad (9.3)$$

問 203 式(9.3)を使って、

(1) 次式を示せ:

$$X = \frac{\pi R^2}{4} \quad (9.4)$$

(2) それを使って次式を示せ。

$$S = \pi R^2 \quad (9.5)$$

このアプローチは、図 8.1 のように、図形を縦長の短冊に分割するという作戦だ。ところが、円は四方八方に丸いので、もっとエレガントに求まるのだ:

例 9.2 半径 $R$ の円板を、小さな幅の円環の集まりと考える(図 9.1)。すなわち、円を $n$ 個の同心円で分割し、小さい円から順に、それぞれ半径 $r_1, r_2, \dots, r_n$ とする。 $r_0 = 0$ とし、 $r_n = R$ とする。 $k$ を1以上 $n$ 以下の整数とし、半径 $r_{k-1}$ の円と半径 $r_k$ の円で挟まれた円環を考えよう。その幅を $\Delta r_k$ とする。つまり $\Delta r_k = r_k - r_{k-1}$ である。 $\Delta r_k$ が十分に小さいなら、この円環の面積 $\Delta S_k$ は、

$$\Delta S_k \doteq 2\pi r_k \Delta r_k \quad (9.6)$$

となる(円周の長さ $\times$ 幅の積<sup>\*1</sup>)。すると、円の面積 $S$ は、 $\Delta S_k$ を足しあわせたものにほぼ等しい:

$$S \doteq \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \sum_{k=1}^n 2\pi r_k \Delta r_k \quad (9.7)$$

となる。この式を、P.116式(8.9)と見比べながら、 $n$ を十分大きく、 $\Delta r_k$ を十分小さくすれば、次式になる:

$$S = \int_0^R 2\pi r dr = [\pi r^2]_0^R = \pi R^2 \quad (9.8)$$

この積分は、式(9.3)の積分よりもずっと簡単だ。なお、こういう考え方を、とある高校の先生は「バウムクーヘン

\*1 厳密に言えば、円環の面積を求めるには円環の外縁と内縁の間に位置する円の半径を使わねばならないが、幅 $\Delta r_k$ が十分に小さければ、これは外縁の円の半径や内縁の円の半径にほぼ一致する。

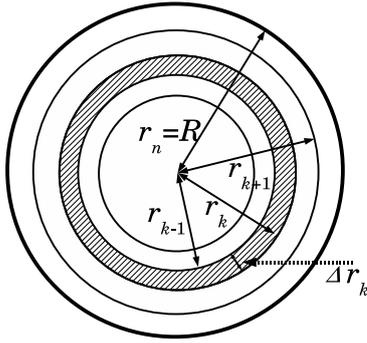


図 9.1 円板を細い円環で分割する。

ン積分」と教えているらしい。なんかイメージわかるよね。(例おわり)

問 204 例 9.2 のやり方を再現して、円の面積の公式を導け。適当に省略・簡略化し、簡潔かつ論理的にまとめ直せ。

## 9.2 球の体積

次は球の体積の公式を求めてみよう。

例 9.3 3次元空間中に  $x, y, z$  の各軸を考え、原点を中心とする半径  $R$  の球を考える。その体積を  $V$  とする。 $-R \leq x \leq R$  の区間を  $-R = x_0 < x_1 < \dots < x_n = R$  となるように  $x_0, x_1, \dots, x_n$  という点で分割し、各点を通り  $x$  軸に垂直な平面で球を刻む。すると、 $x = x_k$  での切り口は、半径が  $\sqrt{R^2 - x_k^2}$  の円になる。さて、 $x_{k-1}$  と  $x_k$  が十分に近ければ、 $x = x_{k-1}$  での切り口と  $x = x_k$  での切り口は、ほぼ同じ大きさの円とみなせるので、それらで挟まれた円盤(薄い円柱)の体積  $\Delta V_k$  は、

$$\Delta V_k = \pi(\sqrt{R^2 - x_k^2})^2 \Delta x_k = \pi(R^2 - x_k^2) \Delta x_k \quad (9.9)$$

となる(底面積  $\times$  高さ)。このような円盤を全ての  $k$  について考えて足し合わせれば、球が再現される。従って、その体積は、

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \pi(R^2 - x_k^2) \Delta x_k \quad (9.10)$$

$$= \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2) dx = \dots = \frac{4\pi R^3}{3} \quad (9.11)$$

(例おわり)

問 205 例 9.3 を再現し、球の体積の公式を導け。丸写しにするのではなく、教育的な説明は省略して、自分な

りに簡潔に書くこと。

ところで、有限の微小量、つまり「 $\Delta$  なんとか」で考えるのはめんどくさい。毎回毎回、結局は  $\Delta$  が  $d$  になって  $\sum$  が  $\int$  になって添字の  $k$  が消えるのだ。そこで、これらの議論は、いきなり無限小 ( $dx$  とか  $dV$  とか) を使って簡略的に書くことにしよう。

例 9.4 (例 9.3 の書き直し)

3次元空間中に  $x, y, z$  の各軸を考え、原点を中心とする半径  $R$  の球を考える。その体積を  $V$  とする。球を、 $x$  軸に垂直で厚み  $dx$  の円盤の集まりとみなす。各円盤の半径は  $\sqrt{R^2 - x^2}$  なので、その体積  $dV$  は、次式になる:

$$dV = \pi(\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi(R^2 - x^2) dx \quad (9.12)$$

これを積分して、

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2) dx = \dots = \frac{4\pi R^3}{3} \quad (9.13)$$

(例おわり)

さて、この球の体積の公式 ( $\frac{4\pi R^3}{3}$ ) は記憶せよ。語呂合わせは、「身の上に心配あるので参上」という。つまり、「3(身)の上に  $4\pi r$ (心配ある)ので3乗(参上)」

ところで、例 9.3 は、例 9.1 によく似た発想である。例 9.1 では円を多くの狭い長方形で平行に刻んだが、ここでは球を多くの狭い円盤で平行に刻んだのだ。

一方、円を同心円で刻んだ例 9.2 のような発想でも球の体積は求まるのではないだろうか? やってみよう! まず、半径  $r$  の球の表面積が  $4\pi r^2$  であるのは既知とする。

例 9.5 半径  $R$  の球(体積を  $V$  とする)を、小さな幅の球殻の集まりと考える。半径  $r$ 、厚さ  $dr$  の球殻の体積  $dV$  は、半径  $r$  の球面積と球殻の厚さの積、つまり

$$dV = 4\pi r^2 dr \quad (9.14)$$

となる。これを積分して、

$$V = \int_0^R 4\pi r^2 dr = \left[ \frac{4\pi r^3}{3} \right]_0^R = \frac{4\pi R^3}{3} \quad (9.15)$$

(例おわり)

問 206 例 9.5 を再現して、球の体積の公式を導け。

ここで、面白いことに気付く。: 半径  $r$  を変数にとると、円の周長と面積の関係や、球の表面積と体積の関係は、一方が他方の微分(積分)となっているのだ(図 9.2)。

$$\begin{array}{l}
 \text{[円の場合]} \\
 \text{周長} = 2\pi r \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{積分}} \\ \xleftarrow{\text{微分}} \end{array} \quad \text{面積} = \pi r^2 \\
 \\
 \text{[球の場合]} \\
 \text{表面積} = 4\pi r^2 \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{積分}} \\ \xleftarrow{\text{微分}} \end{array} \quad \text{体積} = \frac{4\pi r^3}{3}
 \end{array}$$

図 9.2 円の周長と面積，球の表面積と体積には，微分積分の関係がある。半径で微分すると「長さ」の次元がひとつ減り，半径で積分すると「長さ」の次元がひとつ増えることにも注意しよう。

なぜだろう？ 例えば式 (9.14) を見てみよう。この両辺を  $dr$  で割れば， $dV/dr = 4\pi r^2$  が出てくるではないか！

これを手がかりにすれば，球の体積や表面積の公式を思い出すことができる (P.29 の問 48 も参照せよ)。公式は，いろんな観点から体系的に理解することが大事なのだ。

よくある質問 103 例 9.2 では円の周長の公式 ( $2\pi r$ ) を，例 9.5 では球の表面積の公式 ( $4\pi r^2$ ) を，それぞれ既知として使いましたが，そもそもそれらはどうやって導出されるのですか？ ... 良いところに気づきました。円の周長の公式 ( $2\pi r$ ) は，ラジアン定義と，平面図形の相似性 (相似比に応じて長さも変わる) から出てきます。球の表面積の公式 ( $4\pi r^2$ ) は，実は球の体積の公式を微分して導くのです。つまり，例 9.3 で体積を求めて，それを半径で微分して表面積の公式を導くのです。つまり，例 9.5 を逆に辿るのが，本来の考え方です。

よくある質問 104 は積分， $d$  は微分を表すなら， $d =$  ですか？ ... ざっくり言えばそうです。は  $\Sigma$  の極限で， $d$  は微小な差を表します。の細かい差をぜんぶ集めたら自身になります。りんごをこまかく切り刻んでよせあつめたら，りんごになります。

りんごをこまかく切り刻んでよせあつめてもりんごにならないと思います... たしかに，汁が出てぐちゃぐちゃになりそうだもんね。

### 9.3 速度・加速度

微分を使って学んだ速度と加速度 (P.77) を，積分を使って振り返ろう。その前にひとつ準備をする。式 (8.122) を思い出そう。任意の関数  $f(x)$  について，

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f'(x) dx \quad (9.16)$$

だった。この式で， $x$  を  $t$  に， $x_0$  を  $t_0$  に， $x + \Delta x$  を  $t_1$  に形式的に置き換えると，

$$f(t_1) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f'(t) dt \quad (9.17)$$

となる。これで準備 OK。

さて，ある点 P が  $x$  軸上を運動しており，時刻  $t$  で位置  $x(t)$ ，速度  $v(t)$ ，加速度  $a(t)$  であるとき，

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \quad (9.18)$$

$$\frac{dv}{dt} = a(t) \quad (9.19)$$

だった (速度と加速度の定義)。ここで，式 (9.18) より， $x'(t) = v(t)$  ということのを頭に置いて，式 (9.17) を  $x(t)$  に適用すると (つまり  $f$  を  $x$  に形式的に置き換えると)，

$$x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt \quad (9.20)$$

となる。これは時刻  $t_1$  での位置を，時刻  $t_0$  での位置と， $t_0$  から  $t_1$  までの間の速度の積分で表す式である。同様に，式 (9.19) より， $v'(t) = a(t)$  ということのを頭に置いて，式 (9.17) を  $v(t)$  に適用すると，次式になる：

$$v(t_1) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} a(t) dt \quad (9.21)$$

問 207 式 (9.20) から P.78 式 (5.101) を導け。

問 208 式 (9.21) から P.79 式 (5.106) を導け。

さて，もし，加速度  $a$  が時間によらず一定であれば，式 (9.21) の定積分 (定数関数の定積分，チョー簡単!) より，

$$v(t_1) = v(t_0) + a(t_1 - t_0) \quad (9.22)$$

となる。 $t_0 = 0$  とし， $t_1$  を改めて  $t$  と書き直せば，

$$v(t) = v(0) + at \quad (9.23)$$

となる。これを式 (9.20) に代入すれば，

$$\begin{aligned}
 x(t_1) &= x(0) + \int_0^{t_1} \{v(0) + at\} dt \\
 &= x(0) + v(0)t_1 + \frac{1}{2}at_1^2
 \end{aligned} \quad (9.24)$$

となる。再び  $t_1$  を改めて  $t$  と書き直せば，

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 \quad (9.25)$$

となる。

式 (9.23) と式 (9.25) は，高校理科 (物理) で習う式で

ある。これを一生懸命に記憶した人もいるだろうが、この式の実体は定数関数  $a$  を時刻で 2 回積分しただけである。その仕組みを知ってしまえば、わざわざ覚えるようなものではないことがわかるだろう。

さて、注意してほしいのは、これらは一定の加速度の運動(等加速度直線運動)でしか成り立たない!!ということ。というのも、式(9.21)が式(9.23)になるのは、 $a$  が定数だからだし、式(9.24)の積分がこうなるのも  $a$  が定数だからだ。もし  $a$  が定数でない、つまり加速度  $a$  が時間的に変化するなら、これらは成り立たない。そういうときは式(9.20)と式(9.21)に戻るしかない。しかしそういう「使用上の注意」も、この式の数学的な由来を理解していれば、覚えるまでもない、アタリマエのことだ。

よくある質問 105 高校ではなぜそう教えないのでしょうか? ... わかりません。高校物理の「公式」のほとんどは、こんなかんじで、何かの法則やシンプルな仮定から、数学的に導出できます。多くの高校生は、物理は公式が多くて嫌と言いますが、真実は反対で、物理の本質的な公式は少しだけです。

## 9.4 微分方程式

P.92 で、簡単な微分方程式を学んだ。そのとき、

$$f'(x) = af(x) \quad (9.26)$$

という微分方程式の解は

$$f(x) = f(0)e^{ax} \quad (9.27)$$

となることを式(6.47)で学んだ。式(9.27)が式(9.26)を満たすことは、代入してみればすぐにわかる。しかし、ここでは、そういう天下りなやり方を使わないで微分方程式の解を得る方法を学ぶ。

例えば、関数  $f(x)$  について、

$$f'(x) - 2x - 1 = 0 \quad (9.28)$$

は、微分方程式である。といってもこれは  $f'(x) = 2x + 1$  と同じだから、 $f(x)$  は  $2x + 1$  の原始関数である。従って、 $2x + 1$  を不定積分すれば解は求まる。従って、式(9.28)の解は、一般に、

$$f(x) = \int (2x + 1) dx = x^2 + x + C \quad (9.29)$$

となる。ここで  $C$  は任意の定数(要するに積分定数)である。だから、 $x^2 + x + 1$ 、 $x^2 + x - 5$ 、 $x^2 + x + 100$  などは、いずれも式(9.28)の解である。このように、一般に、

微分方程式は複数の解を持つ。その「複数の解」は、式(9.29)のように任意定数を含む式で一般的に書けることが多い。そのような解を 一般解 という。

式(9.28)は、あまりに簡単な例である。この程度の話なら、わざわざ微分方程式という概念を持ち出さなくても「積分」で十分である。しかし、実際にはもっと複雑な微分方程式が、たくさん使われる。例えば、式(9.26)という微分方程式は、

$$f(x) = \int af(x) dx \quad (9.30)$$

とできるはずだ。しかし、右辺の積分の中に、 $f(x)$  そのものが入ってしまっている。 $f(x)$  が欲しいのに、そのためには  $f(x)$  を積分しなければならない。これは困った(注: もちろん我々は既にこの微分方程式の解は式(9.27)であることを知っているのだが、ここではあえてそれを知らないという前提で話をしている)。

実は、式(9.26)は、以下のような工夫で解くことができる:

まず、微分の定義を思い出そう。すなわち、十分 0 に近い  $\Delta x$  について、

$$f(x + \Delta x) \doteq f(x) + f'(x)\Delta x \quad (9.31)$$

である。これは、 $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$  とおいて、

$$\Delta f \doteq f'(x)\Delta x \quad (9.32)$$

と書いても同じことである。ここで、式(9.26)を使って  $f'(x)$  を消去すると、

$$\Delta f \doteq af(x)\Delta x \quad (9.33)$$

となる。両辺を  $f(x)$  で割ると(以下、 $f(x)$  の“(x)”などは省略して書く)、

$$\frac{\Delta f}{f} \doteq a\Delta x \quad (9.34)$$

となる。ここで、 $x$  が  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  のときに、 $f$  はそれぞれ  $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$  であるとする。つまり、 $k$  を 0 から  $n$  までの整数として、 $f_k$  は  $f(x_k)$  のことである。各  $x_k$  と  $x_{k+1}$  の間隔は十分に小さいとする。

$$\Delta f_k = f_k - f_{k-1} \quad (9.35)$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad (9.36)$$

とすれば, 上の式 (9.34) より,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f_1}{f_0} & \doteq a\Delta x_1 \\ \frac{\Delta f_2}{f_1} & \doteq a\Delta x_2 \\ \frac{\Delta f_3}{f_2} & \doteq a\Delta x_3 \\ & \dots \\ \frac{\Delta f_n}{f_{n-1}} & \doteq a\Delta x_n\end{aligned}$$

となる。これを辺々、足しあわせれば,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Delta f_k}{f_{k-1}} \doteq \sum_{k=1}^n a\Delta x_k \quad (9.37)$$

となる。これは,  $\Delta f_k$  や  $\Delta x_k$  を十分に小さくとれば, 積分の定義式 (8.11) から<sup>\*2</sup>,

$$\int_{f(x_0)}^{f(x)} \frac{df}{f} = \int_{x_0}^x a dx \quad (9.38)$$

となる。ここで,  $x_n$  をあらためて  $x$  とおいた。また,  $\Delta$  が  $d$  に変わった瞬間に, 近似等号<sup>3</sup>  $\doteq$  は等号<sup>2</sup>  $=$  に変わった。

上の式の両辺の積分をそれぞれ実行すると次式になる:

$$\ln |f(x)| - \ln |f(x_0)| = a(x - x_0) \quad (9.39)$$

この式は, 以下のように変形できる:

$$\ln \left| \frac{f(x)}{f(x_0)} \right| = a(x - x_0) \quad (9.40)$$

$$\left| \frac{f(x)}{f(x_0)} \right| = \exp\{a(x - x_0)\} \quad (9.41)$$

$$\frac{f(x)}{f(x_0)} = \pm \exp\{a(x - x_0)\} \quad (9.42)$$

$$f(x) = \pm f(x_0) \exp\{a(x - x_0)\} \quad (9.43)$$

ここで  $x = x_0$  のとき両辺が一致するには, 右辺のマイナスはありえない。従って,

$$f(x) = f(x_0) \exp\{a(x - x_0)\} \quad (9.44)$$

これが, 上の微分方程式 (9.26) の解である。特に,  $x_0 = 0$  とすると, これは次式のようになる:

$$f(x) = f(0)e^{ax} \quad (9.45)$$

<sup>\*2</sup> ここで, 式 (9.37) 左辺の分母が  $f_k$  でなければ式 (8.11) を使えないのでは? と思う人もいるかもしれないが,  $\Delta x_k$  が十分に 0 に近ければ,  $f_k$  も  $f_{k-1}$  もほとんど同じなので, OK なのだ。

(無事に式 (9.27) が得られた!)

$f(0)$  の値が何であっても, 式 (9.45) は解なので, 解は無数にたくさんある。ところが,  $f(0)$  の値があらかじめ具体的に決まっていれば, 解はひとつに定まる。このように, 特定の  $x$  での  $f(x)$  の値が決まっていれば<sup>\*3</sup>, それが条件となって, その条件を満たす解は一つだけに絞られる。このような条件を 初期条件 (initial condition) という。

ところで, もし君が注意深い人ならば, 式 (9.34) で, 「 $f = 0$  のときは $0$ での割り算」は許されないのだから, この変形は許されないのでは? と思っただろう。その通りである。ある  $x$  において  $f(x) = 0$  ならば, 式 (9.26) に戻ると,  $f'(x) = 0$  である。従って, その  $x$  において, 微小量  $dx$  について,

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx = f(x) = 0 \quad (9.46)$$

となる。つまり  $x$  のすぐそば ( $x + dx$ ) でも  $f = 0$  である。これを延々と繰り返して考えると, 全ての  $x$  について,  $f(x) = 0$  となる。つまり  $f$  は恒等的に  $0$  に等しい, 定数関数となる。これは, 式 (9.45) で  $f(0) = 0$  とした場合になっている。結果的に, うまくつじつまが揃っているのだ。そうだからといって,  $f = 0$  の場合を無視して割り算をしてしまうのは, 論理的に正しくは無いのだが, ここは結果オーライということで, 特段  $f = 0$  の場合に言及することは不要としておこう。

上で述べた解法は, 説明のために, まわりくどく記述した。ところが,  $f'(x)$  を  $df/dx$  と書き換えれば, 式 (9.26) は

$$\frac{df}{dx} = af(x) \quad (9.47)$$

と書くことができる。すると, 式 (9.33) 以降の議論は, 形式的には  $df/dx$  を分解して,  $df$  と  $dx$  をそれぞれ独立した変数のように演算し, 積分に持ち込めるということがわかるだろう (わからない人は, とりあえずそういうものだと思ってほしい)。つまり, この微分方程式 (9.26) すなわち式 (9.47) は, 左辺に  $f$  と  $df$  が, 右辺に  $x$  と  $dx$  が, それぞれ集まるように整理して (係数  $a$  はどちらにあっても良い),

$$\frac{df}{f} = a dx \quad (9.48)$$

<sup>\*3</sup> 多くの場合,  $x = 0$  での値。

として、両辺に積分記号をくっつけて、

$$\int \frac{df}{f} = \int a dx \quad (9.49)$$

として、あとは両辺の積分を実行すればよい。

このように、 $df$  や  $dx$  などの微小量まで含めて、2つの変数(ここでは  $f$  と  $x$ ) を式の左辺と右辺に分離して寄せ集めること(ここでは  $f$  は左辺に、 $x$  は右辺に寄せ集めた)を 変数分離 と呼ぶ<sup>\*4</sup>。

変数分離したあとは、各辺を積分すればよいのだが、その積分区間をどう設定するかという問題が残る。しかし実際にはあまり気にせず、とにかく積分定数を残して不定積分してしまってもよい。そして最後に初期条件を代入することで、残った積分定数を決定すればよい。

そういう手順で上の微分方程式をもういちど解くと、以下ようになる(君が今後、このような微分方程式を解くときには、以下のように考えればよい)：

\*\* 微分方程式の変数分離解法 (例) \*\*

$$\frac{df}{dx} = af \quad (9.50)$$

これを変数分離して、

$$\frac{df}{f} = a dx \quad (9.51)$$

両辺を不定積分して、

$$\int \frac{df}{f} = \int a dx \quad (9.52)$$

この不定積分を実行して、

$$\ln|f| = ax + C \quad (9.53)$$

(ここで本来は両辺に積分定数が現れるが、それを右辺に  $C$  として集約した) 従って、

$$|f| = e^{ax+C} = e^C e^{ax} \quad (9.54)$$

$$f = \pm e^C e^{ax} \quad (9.55)$$

これに  $x = 0$  を代入すると(初期条件)、

$$f(0) = \pm e^C \quad (9.56)$$

となる。式(9.55)の右辺の  $\pm e^C$  を  $f(0)$  で置き換えて、

$$f(x) = f(0)e^{ax} \quad (9.57)$$

■

よくある間違い 44 式(9.56)を、「 $f(0) = e^C$  と  $f(0) = -e^C$  のどちらでもよい」と解釈してしまう... そういう人は、微分方程式の最終的な解を、式(9.57)のかわりに

$$f(x) = \pm f(0)e^{ax} \quad (9.58)$$

としますが、これは間違いです!。試みに  $x = 0$  をこの式に入れてみましょう。

$$f(0) = \pm f(0) \quad (9.59)$$

となります。明らかに、右辺にマイナスがつく必要はないし、むしろマイナスがついたら変です(マイナスがついたら、 $f(0) = -f(0)$  となってしまう、右辺を左辺に移項したら  $2f(0) = 0$ 、つまり  $f(0) = 0$ 、それを式(9.58)に入れると、 $f(x)$  は恒等的に0になってしまう)。そもそも、指数関数の性質上、 $C$  がどんな値であっても、 $e^C$  は常に正だけど、 $\pm e^C$  なら正の値も負の値もとれます。問題によっては  $f(0)$  の値は正だったり負だったりしても、この  $\pm$  が、そのつじつまをあわせてくれるのです。言い換えるとこういうこと： $\pm e^C$  は、「 $+e^C$  と  $-e^C$  のどちらもありえる」という意味ではあるけど、 $f(0)$  の値が与えられたら、そのどちらか片方に決まってしまう、もう片方の可能性は無くなるのです。もし  $f(0)$  が正なら、 $\pm e^C$  は  $+e^C$  に決まるし、もし  $f(0)$  が負なら、 $\pm e^C$  は  $-e^C$  に決まるのです。

問 209 以下の微分方程式を変数分離法で解け：

$$f'(x) = 3f(x) \quad (9.60)$$

初期条件:  $f(0) = -2$

問 210 以下の微分方程式を変数分離法で解け：

$$f'(x) - 3f(x)^2 = 0 \quad (9.61)$$

初期条件:  $f(0) = 1$

問 211 以下の微分方程式を変数分離法で解け：

$$f'(x) + 2xf(x) = 0 \quad (9.62)$$

初期条件:  $f(0) = 3$

## 9.5 ロジスティック方程式

ある空間に、ある種の生き物が生きているとしよう(孤島に棲むヤギとか)。その生き物の個体数  $N(t)$  を考

\*4 変数分離が可能な微分方程式のことを、「変数分離型微分方程式」と呼ぶ。変数分離ができない微分方程式もたくさん存在する。そういう微分方程式の場合は、別の解法を探さねばならない。

える。生き物は普通、一定割合の個体の子を作るので、個体数の増加は個体数  $N$  と時間  $dt$  に比例する。すなわち、適当な定数  $\alpha$  を使って、

$$\alpha N dt \tag{9.63}$$

と書ける。

ところが、個体数  $N$  があまりにも多くなると、資源（餌や住処）をめぐって争いが起きはじめる。争いは、2つの個体が出会ったときに発生し、争いに負けた個体は死亡する\*5。ある個体にとって、時間  $dt$  の間に、自分以外の個体（ $N-1$  匹の個体）に出会う確率は、 $dt$  と  $N-1$  に比例する。同様のことが、 $N$  匹の全ての個体に言えるので、 $dt$  の間にどれか2つの個体が出会う確率（頻度）は、 $N(N-1)dt$  に比例する。 $N$  が十分に大きければ、 $N(N-1)dt$  は、 $N^2dt$  と近似できる。従って、 $dt$  の間に、争いによって死亡する個体数は、 $N^2dt$  に比例する。この比例係数（定数）を  $\beta$  と書く（ $\beta \geq 0$ ）。すなわち、時間  $dt$  の間に競争によって減少する個体数は次式になる：

$$\beta N^2 dt \tag{9.64}$$

生き物の個体数の変化  $dN$  は、増えた分 - 減った分なので、式 (9.63)、式 (9.64) より、

$$dN = \alpha N dt - \beta N^2 dt \tag{9.65}$$

となる。両辺を  $dt$  で割ると、

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2 \tag{9.66}$$

となる。式 (9.66) を ロジスティック方程式 という。これは、生物学の「個体群動態」という分野（生態学の一部）の最も基本的な方程式である。

問 212 以上の議論を再現し、ロジスティック方程式を導け。

問 213 ロジスティック方程式 (9.66) を解いてみよう。ただし初期条件を  $N(0) = N_0$  とする。

- (1) この方程式を変数分離し、左辺に  $N$ 、右辺に  $t$  をまとめよ。
- (2) それを部分分数展開すると、以下のようになること

\*5 出会ったけど争わないとか、引き分けでどちらも死亡しないとか、相打ちで両者死亡とか、そういうことはとりあえず考えない。

を示せ：

$$\frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{1}{\beta N} + \frac{1}{\alpha - \beta N} \right) dN = dt \tag{9.67}$$

- (3) これを積分すると、以下のようになることを示せ ( $C$  は積分定数)：

$$\ln \left| \frac{N}{\alpha - \beta N} \right| = \alpha t + C \tag{9.68}$$

- (4) これを変形して次式を示せ：

$$\frac{N}{\alpha - \beta N} = \pm \exp(\alpha t + C) \tag{9.69}$$

- (5) 初期条件を用いて、次式を示せ：

$$\pm e^C = \frac{N_0}{\alpha - \beta N_0} \tag{9.70}$$

- (6) 以上より、以下を示せ：

$$N(t) = \frac{N_0 e^{\alpha t}}{1 + N_0 \beta (e^{\alpha t} - 1) / \alpha} \tag{9.71}$$

- (7) 式 (9.71) より、以下を示せ：

$$N(t) = \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha} + \left( \frac{1}{N_0} - \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{-\alpha t}} \tag{9.72}$$

- (8) 式 (9.72) は、P.94 の式 (6.60) と同じ形の関数である。式 (6.60) の  $a, b, c$  をどのように置けば式 (9.72) に一致するか？

- (9) 図 6.10 を参考にして、式 (9.71) をグラフに描け。結果は図 9.3 のようになるはず。

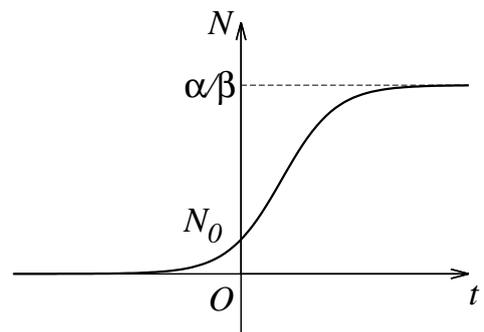


図 9.3 式 (9.72) のグラフ

これが、高校の生物学で習った「個体群の成長曲線」である。グラフを描いてわかったように、十分長く時間がたてば、 $N(t)$  は一定値に収束する。このようにほとんど一定値に至った状態を「定常状態」という。定常状態では、 $N$  はほとんど増えないから、 $dN/dt = 0$  とし

てよい。すると式 (9.66) が 0 になるということだから、 $\alpha N - \beta N^2 = 0$  となり、すなわち、 $N = \alpha/\beta$  となる。つまり、定常状態では個体数  $N$  は  $\alpha/\beta$  となる。これが、その空間に生物が未永く生息できる個体数の最大値である。生物学ではこの値を「環境収容力」と呼び、 $K$  と表す。また、生物学では、 $\alpha$  を「内的自然増加率」と呼び、 $r$  と表す。

問 214  $K$  と  $r$  を使うと、式 (9.66) は、

$$\frac{dN}{dt} = r \left( 1 - \frac{N}{K} \right) N \quad (9.73)$$

となることを示せ。

よくある質問 106  $dN/dt = \alpha N - \beta N^2$  について、 $\alpha N < \beta N^2$  となり、個体数が減るようなことはないのですか? ... それは個体数が定常状態を上回った時 (個体数が環境収容力を上回った時) ですね。実際の自然では、何かの拍子に  $N$  がたまたま大きくなったり、環境変動のせいで環境収容力が小さくなってしまったときでしょう。その場合は、 $dN/dt$  が負になるので  $N$  は減少し、やがて、 $\beta N^2 = \alpha N$  となって、 $dN/dt = 0$ 、つまり定常状態に復帰します。

問 215  $\beta = 0$  のときは、ロジスティック方程式の解はどうなるか? それを生物学的に説明せよ。

よくある質問 107 生物学で出てきたグラフが微分方程式から出てきてびっくりしました。微分や積分って生物学にも使われるんですね。... まだ序の口。数学は、生物学を含めて、あらゆる科学で活躍します。

よくある質問 108 高校ではそういう話を教えてくれませんでした。なぜでしょう? ... 数学の先生の多くが「数学の専門家」であり、数学の応用例にはあまり興味が無いからじゃないかな? 数学はそれ自体が美しく面白いから、応用例なんか無くても構わない、みたいに思われているのかもね。でも我々は生物資源学類だから、応用例を意識した数学をやっていきましょう。

よくある質問 109 垂れ下がった電線の形が  $e^x$  を含む関数で表せると聞いたのですが、なぜですか? ... 電線の重さを電線自身が張力で支えること (力の釣り合い) から得られる微分方程式を解くと、 $y = e^x + e^{-x}$  のような関数が出てきます。

## 演習問題

演習問題 26 理想気体の断熱変化において、 $PV^\gamma$  が変化の前後で不変であることを導け。ただし、 $P, V, n, R, T, C_v, U$  をそれぞれ、圧力、体積、モル数、気体定数、絶対温度、定積モル比熱、内部エネルギーとする。また、 $\gamma = (R + C_v)/C_v$  とする。定積モル比熱は温度によらない定数とする (厳密には違うのだが)。ヒント: 理想気体の内部エネルギーは  $U = nC_v T$  と書ける。体積の微小変化を  $dV$  とすると、気体が外界に対してなす仕事は  $PdV$  である。これらを熱力学第一法則で組み合わせ、理想気体の状態方程式  $PV = nRT$  を使って  $P$  を消去すると、 $V$  と  $T$  に関する微分方程式ができる。それを解き、最後に  $T$  を  $P$  と  $V$  で書き換えればよい。

演習問題 27 植物の成長の速さについて考えよう。ある微小時間  $dt$  の間に植物個体の乾燥重量  $w$  が  $dw$  だけ増加したとする。一概には言えないものの、大きな植物 (つまり  $w$  が大きい植物) は、光合成のための生産器官も多く持つので、たくさん光合成ができる。そのぶん、 $dw$  は大きくなるのが自然だろう。そう考えると、植物の成長量は、ざっくり言って、植物の大きさに比例すると考えてよからう。つまり、

$$dw = \alpha w dt \quad (9.74)$$

となる。 $\alpha$  は適当な定数である。右辺に  $dt$  があるのは、成長量が時間に比例する、という、至極当然のことを表す。この式を変形すると、

$$\alpha = \frac{1}{w} \frac{dw}{dt} \quad (9.75)$$

となる。この  $\alpha$  を「相対成長率」(relative growing rate) と呼び、RGR と書き表す。すなわち、

$$\text{RGR} := \frac{1}{w} \frac{dw}{dt} \quad (9.76)$$

である。もし  $t = t_1$  と  $t = t_2$  の間の RGR が一定であると仮定できるならば、

$$\text{RGR} = \frac{\ln w_2 - \ln w_1}{t_2 - t_1} \quad (9.77)$$

と表すことができることを、式 (9.76) から示せ。注: 本来は式 (9.76) が RGR の定義だが、植物学や生態学の教科書では、式 (9.77) を RGR の定義としているものも多い。それはおそらく、微分積分がわからない人のために書かれているのだろう。

## 問題の解答

答 203

- (1) 略 (式 (9.3) に問 200 の結果を適用)  
 (2)  $X$  は円の  $1/4$  だから,  $S = 4X = \pi R^2$

答 204 略。

答 205 略。

答 206 略。

答 207 式 (9.20) で  $t_0$  を  $t$ ,  $t_1$  を  $t + dt$  と置き換えれば,

$$x(t + dt) = x(t) + \int_t^{t+dt} v(t) dt \quad (9.78)$$

となる。  $dt$  が微小量ならば,  $t$  から  $t + dt$  までの間で  $v(t)$  はほとんど変化しないと考えられ,

$$\int_t^{t+dt} v(t) dt = v(t)\{(t + dt) - t\} = v(t) dt$$

となる。従って,  $x(t + dt) = x(t) + v(t) dt$  ■

答 208 式 (9.21) で  $t_0$  を  $t$ ,  $t_1$  を  $t + dt$  と置き換えれば,

$$v(t + dt) = v(t) + \int_t^{t+dt} a(t) dt \quad (9.79)$$

となる。  $dt$  が微小量ならば,  $t$  から  $t + dt$  までの間で  $a(t)$  はほとんど変化しないと考えられ,

$$\int_t^{t+dt} a(t) dt = a(t)\{(t + dt) - t\} = a(t) dt$$

となる。従って,  $v(t + dt) = v(t) + a(t) dt$  ■

答 209

$$\frac{df}{dx} = 3f \quad \text{を変数分離して,} \quad \frac{df}{f} = 3dx$$

この両辺を不定積分して (積分定数を  $C$  とする),

$$\int \frac{df}{f} = \int 3dx \quad \text{よって,} \quad \ln|f| = 3x + C$$

$$\text{よって,} \quad f = \pm e^{3x+C} = \pm e^C e^{3x} \quad (9.80)$$

これに  $x = 0$  を代入すると,

$$f(0) = \pm e^C = -2 \quad (9.81)$$

となる。従って,  $f(x) = -2e^{3x}$ 。 ■

よくある間違い 45 式 (9.80) や式 (9.81) の  $\pm$  をつけないで, 式 (9.81) のかわりに「 $e^C = -2$ 」と書いてしまう ... これ

は間違いです。  $C$  がどのような数であっても,  $e^C$  が負になることはありません。この場合は,  $\pm$  は  $-$  であり,  $e^C = 2$  であることによって, 初期条件が矛盾なく満たされるのです。このようなことが起こるから,  $\pm$  は省略できないのです。

答 210 式 (9.61) を変形すると,

$$\frac{df}{dx} = 3f^2 \quad (9.82)$$

$$\frac{df}{f^2} = 3dx \quad (9.83)$$

$$\int \frac{df}{f^2} = \int 3dx \quad (9.84)$$

$$-\frac{1}{f} = 3x + C \quad (9.85)$$

$$f = -\frac{1}{3x + C} \quad (9.86)$$

初期条件より,  $f(0) = -1/C = 1$ 。よって  $C = -1$ 。よって,

$$f(x) = -\frac{1}{3x - 1} \quad (9.87)$$

答 211 式 (9.62) を変形すると,

$$\frac{df}{dx} = -2xf \quad (9.88)$$

$$\frac{df}{f} = -2x dx \quad (9.89)$$

$$\int \frac{df}{f} = \int (-2x) dx \quad (9.90)$$

$$\ln|f| = -x^2 + C \quad (9.91)$$

$$f = \pm(\exp C) \exp(-x^2) \quad (9.92)$$

初期条件より,  $f(0) = \pm \exp C = 3$  だから,

$$f(x) = 3 \exp(-x^2) \quad (9.93)$$

答 212 略

答 213 略

答 214 略

答 215 略



## 第10章

# 微分積分の発展

### 10.1 テーラー展開

P.74 で学んだ線型近似は、関数を一次式（直線の式）で近似する考え方である。ところが、本来、一次式より二次式や三次式のほうが多様な関数を表現できるので、関数を二次式や三次式、いや、もっとたくさんの次数の多項式で近似するほうが、高い精度が得られるだろう。次数を無限大にすれば、もとの関数と近似式の間の誤差を限りなく 0 にすることもできるかも！ そうだったら素敵だ！ 多項式は四則演算（加減乗除）だけで計算でき、微分も積分も簡単だから、取り扱いが楽だし。そこで、以下のように関数  $f(x)$  を多項式で近似することを考えよう：

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \quad (10.1)$$

この左辺と右辺が一致するなら、それぞれを  $x = 0$  において何回か微分したもの（ $x = 0$  での微分係数）も等しいはずなので、

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \\ f'(0) &= a_1 \times 1 \\ f''(0) &= a_2 \times 1 \times 2 \\ f'''(0) &= a_3 \times 1 \times 2 \times 3 \\ &\dots \\ f^{(n)}(0) &= a_n \times 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n \end{aligned}$$

となるはずだ。ここで、 $f^{(n)}(x)$  は、 $f(x)$  の  $n$  階導関数である。 $(x^n)$  を  $n$  回微分すると  $1 \times 2 \times 3 \cdots \times n = n!$  となることに注意せよ。すると、

$$\begin{aligned} a_0 &= f(0) \\ a_1 &= f'(0)/1 \\ a_2 &= f''(0)/(1 \times 2) \\ a_3 &= f'''(0)/(1 \times 2 \times 3) \\ &\dots \\ a_n &= f^{(n)}(0)/n! \end{aligned}$$

となることがわかる。すなわち、式 (10.1) は、次式のようになる\*1:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned} \quad (10.2)$$

これを、関数  $f(x)$  の マクローリン展開 という。

問 216 式 (10.2) は P.74 の式 (5.77) で出てきた線型近似の式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

の拡張になっていることを説明せよ。

ここまでは  $x = 0$  での微分係数を考えたが、一般に、 $x = a$  での微分係数を考えると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \quad (10.3)$$

となる。これを関数  $f(x)$  の  $x = a$  のまわりでの テーラー展開 という\*2。

マクローリン展開は、テーラー展開の一種である。 $x = 0$  のまわりのテーラー展開がマクローリン展開である。しかし、世間的にはテーラー展開と言えば、マクローリン展開のことを意味することも多い。

ところで、導関数の定義式 (5.5)(P.66) において、 $x_0$  を  $a$  と書き換えれば、

$$f(a+dx) = f(a) + f'(a)dx \quad (10.4)$$

\*1  $0!$  は 1 とする。

\*2 ただし、テーラー展開できない関数もある。また、特定の定義域（ $x$  の取りうる値の範囲）でしかテーラー展開できない場合もある。どのような関数が、どのような定義域でテーラー展開できるのか、ということは、大学の数学の教科書を参照せよ。

となる。さらに、 $a + dx$  を改めて  $x$  と書き換えれば、 $dx = x - a$  となり、この式は、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (10.5)$$

となる。これは、線型近似の式であり、テーラー展開の式の最初の 2 項と一致する。ただしこの式は、 $x - a$ 、つまり  $dx$  が十分に 0 に近いときにしか成り立たない。従って、テーラー展開の式は、導関数の定義式（あるいは線型近似）を、 $dx$  が 0 に近くなっても成り立つように、拡張したものだ、とも言える。

問 217  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  をそれぞれマクローリン展開 ( $x = 0$  のまわりでテーラー展開) すると、以下の式になることを示せ：

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (10.6)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (10.7)$$

$$\cos x = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (10.8)$$

問 218  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  のそれぞれのマクローリン展開 ( $x = 0$  のまわりでのテーラー展開) の式を用いて、

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

を確認せよ。

問 219 式 (10.6) から、次式を導け：

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad (10.9)$$

これは、P.44 の例 3.27 でコンピュータが出した結果を理論的に裏付けるものである。

よくある質問 110 なぜ近似する必要があるのですか。2 次近似、3 次近似、... と、どんどん近づけたら元の関数にもものすごく近くなって近似する意味がよくわかんないんですけど...。... 多項式は計算が簡単なので (加減乗除だけでできる)、近似式として有用なのです。例えば  $\sin 23$  度のような値を求めるとき、計算機の内部では関数をテーラー展開した有限次数の近似式 (多項式) に、値を代入しているのです。

また、そもそも無限次の多項式で表すしか手が無いというような関数もたくさんあります。例えば、

$$1 - \frac{x^2}{(1!)^2} + \frac{x^4}{(2!)^2} - \frac{x^6}{(3!)^2} + \dots$$

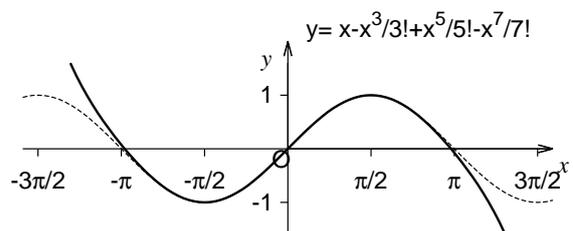
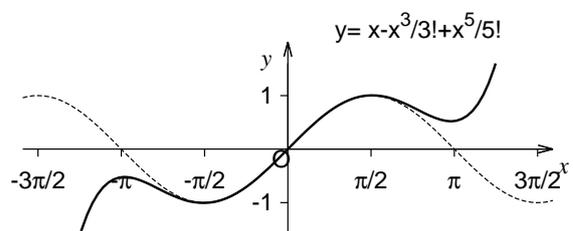
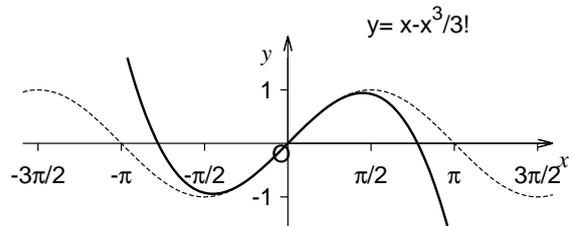
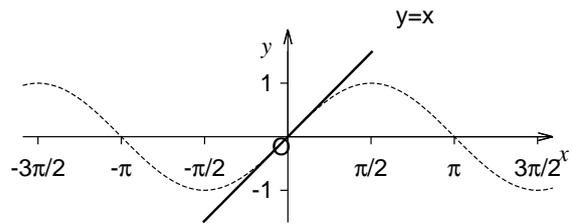


図 10.1 実線は  $y = \sin x$  のマクローリン展開 (1 次、3 次、5 次、7 次近似)。点線は  $y = \sin x$

という関数は、「ベッセル関数」と言って、円形膜の振動等の解析で重要な関数です。これらは三角関数や指数関数、対数関数等の、君がよく知っている関数で表すことはできません。

よくある質問 111 テーラー展開ってすごいですね！1 次式から多項式になって精密になった気がします。... テーラー展開は、凄い考え方です (マクローリン展開はテーラー展開の一種です)。テーラー展開による無限次の多項式は、もとの関数との誤差が限りなく 0 になるため、もはや近似ではなく、関数そのものと言えます。そしてそれは、もとの関数の定義よりずっと扱いやすいのです。例えば、実数で定義された関数でも、それをテーラー展開で多項式にすると、複素数や、後に学ぶ「行列」というものを「代入」できます。実数でしか考える

ことができなかった指数関数も、虚数や複素数を代入することができるのです。そうやって得られるのが、ちょっと先で学ぶ「オイラーの公式」です。

ここで注意。どんな複雑な関数でもテーラー展開できるというわけではない。というのも、式 (10.2) のような式を作るには、 $f(0)$  や  $f'(0)$  などの値が必要で、これらの値が存在しない関数は、テーラー展開できない。

例 10.1 関数  $f(x) = 1/x$  は、マクローリン展開 ( $x = 0$  のまわりでテーラー展開) できない。なぜなら、 $f(0)$  が存在しないから。(例おわり)

例 10.2 関数  $f(x) = \ln x$  も、マクローリン展開 ( $x = 0$  のまわりでテーラー展開) できない。なぜなら、 $f(0)$  が存在しないから。(例おわり)

ならば、 $f(0), f'(0), f''(0), \dots$  などが求められればテーラー展開できるのかということ、それもやや微妙。次の問を考えて欲しい:

問 220

- (1) テーラー展開を使って以下の式を証明せよ:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad (10.10)$$

- (2)  $x = 2$  のとき、式 (10.10) は成り立たないことを示せ。
- (3) 等比数列  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  の和を求めることで、式 (10.10) を証明し、これが成り立つ  $x$  の条件を述べよ。

前問で見たように、関数はテーラー展開できたとしても、 $x$  の限定的な範囲でしか成り立たないことがある。ここでは詳しくは述べないが、そのような限定的な範囲は、「収束半径」という概念で表現される。式 (10.10) の収束半径は 1 である ( $x = 0$  を中心に、距離 1 未満の数について成立する)。ここでは証明はしないが、式 (10.6) や式 (10.7)、式 (10.8) の収束半径は  $\infty$  である (どのような  $x$  の値についても成り立つ)。

テーラー展開された関数は、(収束半径の内側であれば) 他の式を代入したり、微分や積分をしたりしても OK である。

## 10.2 複素数

P.38 の式 (3.52) で、虚数を学んだ。ここではそれをもう少し深めよう。まず復習。 $i^2 = -1$  となるような数  $i$  を虚数単位と呼ぶのだった。そして、虚数単位  $i$  と任意の 2 つの実数  $a, b$  によって以下のようにあらわされる数:

$$z = a + bi \quad (10.11)$$

を複素数というのだった。

このとき、 $a$  を実数部または実部、 $b$  を虚数部または虚部という。例えば  $2 + 3i$  の実数部は 2、虚数部は 3 である。

虚数部は虚数単位を含まないことに注意せよ。例えば  $2 + 3i$  の虚数部は  $3i$  ではなく 3 である。虚数は英語で "imaginary number" と言う。直訳は「空想上の数」である。虚数単位の記号 " $i$ " はそこからとられた。「空想上」と言っても、実際は、虚数は数学や物理学の中で非常に重要な、確固たる存在である。虚数を考えないと説明できない物理現象もある (量子力学)。ちなみに実数は英語で "real number" という。直訳は「ホントの、現実的な数」である。

複素数は  $z$  という記号で表すことが多い。複素数  $z$  の実数部を  $\text{Re}(z)$  と書き、 $z$  の虚数部を  $\text{Im}(z)$  と書くこともある (Re は real, Im は imaginary からとっている)。例えば、 $\text{Re}(2 + 3i) = 2$ ,  $\text{Im}(2 + 3i) = 3$  である。

実数部と虚数部は、複素数をつくる、互いに独立した要素である。2 つの複素数について、それぞれの実数部と虚数部が互いに等しいとき、2 つの複素数は等しいという。つまり、複素数  $z = a + bi$  と複素数  $w = c + di$  について ( $a, b, c, d$  は実数)、 $a = c$  かつ  $b = d$  のときに限って、 $z = w$  とする (定義)。

複素数  $z = a + bi$  について ( $a, b$  は実数)、 $a - bi$  という複素数を、 $z$  の 複素共役 または 共役複素数 と呼び、 $\bar{z}$  と表す (定義)。

例 10.3  $z = 1 + 2i$  の共役複素数は、 $\bar{z} = 1 - 2i$  である。(例おわり)

問 221 任意の複素数  $z$  について、次式を示せ:

$$\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (10.12)$$

### 10.3 オイラーの公式

次式は、オイラーの公式と呼ばれる、有名で重要な公式である（必ず記憶せよ）： $x$  を任意の実数として、

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (10.13)$$

この公式は、複素数の世界では指数関数が三角関数と結びついてしまうことを示している。

問 222 オイラーの公式を導いてみよう。

- (1)  $e^z$  の  $z = 0$  のまわりでのテーラー展開について、 $z$  に虚数  $ix$  を代入し、実部と虚部をわけて整理せよ ( $i$  は虚数単位を表し、 $x$  は実数とする)。
- (2) 前問の結果、実部は  $\cos x$  に等しく、虚部は  $\sin x$  に等しいことを、 $\cos x$  と  $\sin x$  のテーラー展開を参考にして示せ。すなわち、オイラーの公式が導かれる。
- (3) オイラーの公式を使って、 $e^{i\pi} + 1 = 0$  を示せ。

よくある質問 112  $e^{ix}$  と三角関数がつながったの、感動した! オイラーさんすごすぎる! ... オイラーの公式の凄さは、こんなもんじゃないです。実用的な数学で、オイラーの公式は大活躍します。オイラーの公式が無かったら現代の文明も無かったのでは?

問 223 指数法則より、任意の数  $a, b$  について、

$$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad (10.14)$$

である。ここで、 $a = i\alpha$ ,  $b = i\beta$  とすれば、

$$e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} \quad (10.15)$$

となる ( $\alpha, \beta$  は実数)。この両辺をオイラーの公式で展開し、実部・虚部をそれぞれくらべることで、三角関数の加法定理 (次式) を示せ:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (10.16)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (10.17)$$

問 224  $x$  の関数  $e^{ix}$  を、そのまま指数関数として  $x$  で微分せよ。また、 $\cos x + i \sin x$  を  $x$  で微分せよ。両者が等しくなることを確認せよ。

問 225 次式を示せ:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (10.18)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (10.19)$$

問 226 式 (10.18), 式 (10.19) をそれぞれ指数関数の微分によって微分すると、通常の  $\sin x$  と  $\cos x$  のそれぞれの微分の規則を満たすことを確かめよ。

問 227 オイラーの公式を使って、三角関数の三倍角の公式を導いてみよう。

- (1) 式 (10.18) を 3 乗することで次式を示せ:

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad (10.20)$$

- (2) 式 (10.19) を 3 乗することで次式を示せ:

$$\sin 3x = -4 \sin^3 x + 3 \sin x \quad (10.21)$$

### 10.4 複素平面

ここでは、複素数を平面の上の点で表現することを学ぶ。先ほど学んだように、任意の複素数  $z$  は、適当な実数  $x, y$  によって、 $z = x + yi$  とあらわされる (複素数の定義)。そこで、平面上に座標軸をとり、 $z = x + yi$  の  $x$ , すなわち  $\operatorname{Re}(z)$  が横軸の座標で、 $y$ , すなわち  $\operatorname{Im}(z)$  が縦軸の座標となるような点を考える (図 10.2)。すると、任意の複素数は、この平面上のどこかの点に対応する。従って、この平面上の点で複素数を表現できる。この平面を 複素平面 や ガウス平面 と呼ぶ。実数が数直線上の 1 点で表されるように、複素数は複素平面上の 1 点で表される。そう考えると、複素平面は、実数における数直線という概念を複素数に拡張したものと見える。

複素平面の横軸を 実軸 または 実数軸 と呼び、 $\operatorname{Re}$  と表記する。縦軸を 虚軸 または 虚数軸 と呼び、 $\operatorname{Im}$  と表記する。

問 228  $z = 1 + 2i$  のとき以下を複素平面に図示せよ。

- |          |           |             |             |
|----------|-----------|-------------|-------------|
| (1) $z$  | (2) $-z$  | (3) $1 + z$ | (4) $z - i$ |
| (5) $iz$ | (6) $z^2$ | (7) $1/z$   |             |

ところで、実数は数直線の上の点として、連続的に 1 列に 1 方向に並べることができ、「右に行くほど値は大

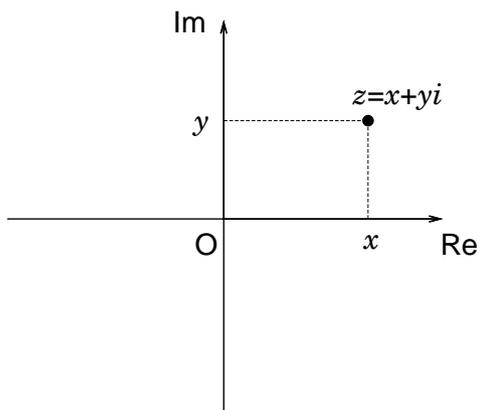


図 10.2 複素平面

きい」というふうに大小関係を定義できる。ところが複素数は、複素平面のように面的に並べられるものであり、実数のような大小関係は定義できない。従って、虚数どうしの間とか、実数と虚数の間には、 $<$  や  $>$  で表される大小関係は存在しない。例えば、 $1 - i$  と  $-1 + i$  はどちらが大きいか？ という問は無意味である。

よくある質問 113 複素平面って、実部と虚部をプロットしただけですよね？ 何が嬉しいのですか？ ... 本書のレベルを超える、解析関数、留数定理、解析接続などという、大学数学を理解すれば、複素平面の「凄さ」がわかります。興味ある人は検索してごらん！

## 10.5 複素数の絶対値

複素数

$$z = x + iy \quad (10.22)$$

について ( $x, y$  は実数)、 $z$  の 絶対値 と呼ばれる量  $|z|$  を次式のように定義する:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \quad (10.23)$$

例 10.4  $|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$  (例おわり)

よくある間違い 46 上の例で、 $1 + 2i = \sqrt{5}$  と書いてしまう ... 絶対値記号「 $| \quad |$ 」を忘れてるよ!

式 (10.22) で、 $y = 0$ 、つまり  $z$  が実数  $x$  である場合、式 (10.23) より、

$$|z| = \sqrt{x^2} \quad (10.24)$$

となる。これは実数の意味での絶対値  $|x|$  と等しい。つまり複素数の絶対値は、実数の絶対値を自然に拡張している。だから、実数の絶対値記号と複素数の絶対値記号が同じ  $| \quad |$  でかぶっていることに、何の問題もない。

例 10.5  $-4$  をあえて複素数とみなして、その絶対値を求めてみよう:

$$|-4| = |-4 + 0i| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$$

これは  $-4$  の、実数としての絶対値と同じ。(例おわり)

「ピタゴラスの定理」を使えば、 $|z|$  は複素平面において原点から  $z$  までの距離である。この観点でも、1.8 節で学んだ、「実数の絶対値は原点からその実数までの距離」という考え方の自然な拡張になっている。

## 10.6 極形式

さて、複素平面上の点

$$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (10.25)$$

について、 $r$  を原点からその点までの距離、すなわち

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (10.26)$$

とし ( $0 \leq r$ )、 $\theta$  を実軸からその点までの角度 ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) として、極座標の考え方 (式 (7.67)) を使えば、

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re}(z) = r \cos \theta \\ y = \operatorname{Im}(z) = r \sin \theta \end{cases} \quad (10.27)$$

と表すことができる。これを式 (10.25) に代入すれば、

$$\begin{aligned} z &= r \cos \theta + ir \sin \theta \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned} \quad (10.28)$$

となる。ここで  $( )$  の中はオイラーの公式 (式 (10.13)) より  $e^{i\theta}$  と書くことができるので、結局、

$$z = r e^{i\theta} \quad (10.29)$$

と表すことができる。このように、任意の複素数は、0 以上の実数  $r$  と 0 から  $2\pi$  までの実数  $\theta$  の組合せで表現することができる。この表現形式を 極形式 と呼ぶ。対照的に、これまで馴染み深かった、 $z = x + iy$  のように表す表現形式を、座標形式 と呼ぶ。同じ複素数を、座標形式と極形式という 2 通りの形式で表現できるのだ。

複素数の極形式  $r e^{i\theta}$  について、 $r$  を 動径、 $\theta$  を 偏角 とか 位相 と呼ぶこともある。

例 10.6 複素数  $z = 3 + \sqrt{3}i$  を、極形式で表してみよ

う。この複素数を複素平面にプロットすると、図 10.3 のようになる。この場合、式 (10.26) より、動径は、

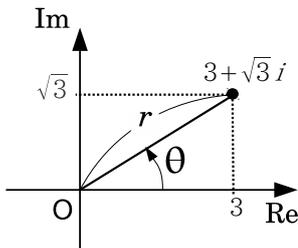


図 10.3  $z = 3 + \sqrt{3}i$  を複素平面にプロット。

$$r = |z| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad (10.30)$$

となる。また、式 (10.27) より、

$$\operatorname{Re}(z) = 3 = r \cos \theta = 2\sqrt{3} \cos \theta$$

$$\operatorname{Im}(z) = \sqrt{3} = r \sin \theta = 2\sqrt{3} \sin \theta$$

なので、

$$\cos \theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \quad (10.31)$$

となる。これを満たすのは  $\theta = \pi/6$  である。従って、

$$z = 2\sqrt{3} e^{i\pi/6} \quad (10.32)$$

となる。(例おわり)

極形式から座標形式に変換するには、式 (10.27) を使って  $x$  と  $y$  を求め、式 (10.25) でまとめればよい。

問 229 以下の複素数について、極形式は座標形式に、座標形式は極形式に変換せよ。

- (1)  $z = 1 + i$     (2)  $z = \sqrt{3} + i$     (3)  $z = -i$   
 (4)  $z = e^{i\pi/4}$     (5)  $z = 2e^{i\pi}$     (6)  $z = 2e^{i\pi/3}$

問 230 以下の計算を行い、結果を極形式で示せ。(指数法則を使ってよい)

- (1)  $e^{i\pi/4} \times e^{i\pi/3}$     (2)  $e^{i\pi/4}/e^{i\pi/3}$   
 (3)  $e^{i\pi/4} \times i$     (4)  $(e^{i\pi/4})^2$   
 (5)  $(2e^{i\pi/3})^3$

問 231 極形式を用いて次式を証明せよ。

$$|zw| = |z||w| \quad (10.33)$$

このように、極形式を使うと、座標形式に較べて、複素数の掛け算・割り算が非常にシンプルになる。すなわち、2つの複素数の掛け算は動径どうしの掛け算と偏角どうしの足し算だし、2つの複素数の割り算は動径どうしの割り算と偏角どうしの引き算である。そして、偏角の足し算や引き算は、原点を中心とする回転に相当する。

一方、複素数の足し算・引き算については、極形式は不便であり、座標形式のほうが簡単になる。問題の状況にあわせて、座標形式と極形式のどちらを使うか、適切に判断することが重要である。それができれば、複素数の扱いはとても楽になる。

問 232 複素数  $z$ 、実数  $r, \theta, \alpha$  について、

- (1)  $z$  に  $e^{i\alpha}$  を掛けると、複素平面上の  $z$  の位置が、原点を中心に  $\alpha$  だけ左向きに回転することを示せ。  
 (2)  $z = re^{i\theta}$  とすると、 $\bar{z} = re^{-i\theta}$  であることを示せ。

例 10.7  $e$  以外の数の虚数乗を考えてみよう。例えば  $4^i$  は何だろうか?  $4 = e^{\ln 4}$  なので、

$$4^i = (e^{\ln 4})^i = e^{(\ln 4)i} = \cos(\ln 4) + i \sin(\ln 4) \\ \doteq \cos(1.386) + i \sin(1.386) \doteq 0.1835 + 0.9830i$$

(例おわり)

問 233  $i^i$  を求めてみよう:

- (1)  $i = e^{\pi i/2}$  であることを示せ。  
 (2)  $i^i = e^{-\pi/2}$  であることを示せ。  
 (3) (2)の結果と電卓を使って、 $i^i \doteq 0.2079$  であることを示せ。

### 10.7 偏微分

多変数関数において、ある特定の変数についてのみ微分することを、偏微分(partial derivative)とか偏導関数と呼ぶ。そのとき、他の変数は定数とみなされる。

例 10.8  $f(x, y) = xy^2 + 3x$  を、 $x$  について偏微分すると、 $y$  を定数とみなして、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 3$$

となる。 $y$  について偏微分すると、 $x$  を定数とみなして、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

となる。(例おわり)

$\partial$  は偏微分を表現するための記号であり、「ラウンドディー」とか「ラウンド」などと呼ばれる。書く時は、数字の 6 を左右逆にすれば OK。

よくある間違い 47 偏微分記号  $\partial$  を正しく書けない。間違いでよくあるのが、 $\delta$  とか  $\sigma$  とか 6。

問 234 以下の関数を  $x, y$  のそれぞれで偏微分せよ：

$$(1) f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (2) f(x, y) = \exp xy$$

$$(3) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

偏微分を、何回も繰り返すことがある。それを高階の偏微分という。高階の偏微分は、複数の変数について行うことがある。

例 10.9  $f(x, y) = \exp(xy)$  について、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \exp(xy) \quad (10.34)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 \exp(xy) \quad (10.35)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = xy \exp(xy) + \exp(xy) \quad (10.36)$$

(例おわり)

ところで、興味深いことに、多くの関数について、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (10.37)$$

が成り立つ。

問 235  $f(x, y) = \exp(xy)$  について、式 (10.37) が成り立つことを確認せよ。

問 236  $f(x, y) = (e^y + e^{-y}) \cos x$  について、

$$(1) \partial^2 f / \partial x^2 \text{ を求めよ。}$$

$$(2) \partial^2 f / \partial y^2 \text{ を求めよ。}$$

(3) 以下の式が成り立つことを示せ\*3：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (10.38)$$

よくある質問 114 式 (10.37) が「多くの関数について成り立つ」とありますが、成り立たないのはどんな関数ですか？

... 例えば、 $f(x, y) = x + |y|$  は、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

となりますが、 $y = 0$  では  $\partial f / \partial y$  が存在しないので、 $\partial^2 f / \partial x \partial y$  も存在しません。従って、式 (10.37) は  $y = 0$  で成り立ちません。

## 10.8 全微分

1 変数関数の微分は、P.66 式 (5.5) で定義される。これを多変数関数に拡張しよう。

2 つの変数  $x, y$  の関数  $f(x, y)$  について、 $(x, y)$  と、それに非常に近い点  $(x + dx, y + dy)$  の間で、 $f$  はどのような関係にあるだろうか？

まず、 $f(x, y)$  を  $x$  だけの関数だとみなし、 $\partial f / \partial x$  を  $f_x$  とかけば、微分の定義から、

$$f(x + dx, y + dy) = f(x, y + dy) + f_x(x, y + dy)dx$$

となる。また、この右辺の  $f(x, y + dy)$  を  $y$  だけの関数とみなし、 $\partial f / \partial y$  を  $f_y$  とかけば、 $y$  による微分の定義から、

$$f(x, y + dy) = f(x, y) + f_y(x, y)dy$$

従って、

$$\begin{aligned} f(x + dx, y + dy) &= f(x, y) + f_x(x, y + dy)dx + f_y(x, y)dy \end{aligned}$$

となる。この右辺第 2 項について、 $y + dy$  は  $y$  とほとんど同じと考えれば、

$$f_x(x, y + dy)dx = f_x(x, y)dx$$

となり、従って、

$$f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

\*3 式 (10.38) は、2 次元ラプラス方程式という偏微分方程式である。応用上、重要な方程式である。

となる。すなわち、

$$f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (10.39)$$

と書ける。これを 全微分公式 もしくは簡単に 全微分 と呼ぶ。この式は、1 変数関数の微分係数の定義式、すなわち P.66 式 (5.5) を、形式的に素直に 2 変数関数に拡張した形になっていることがわかるだろう。

ここで、

$$df = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) \quad (10.40)$$

とすれば、式 (10.39) は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (10.41)$$

となる。この式は P.66 式 (5.12) を 2 変数関数に拡張した形をしている。

全微分公式は、もっとたくさん変数を持つ関数にも拡張される。すなわち、 $f(x, y, z, \dots)$  に対して、

$$df = f(x + dx, y + dy, z + dz, \dots) - f(x, y, z, \dots)$$

とすれば、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots \quad (10.42)$$

となる。こうなる理由は、上の 2 変数の場合から類推できるだろう。

全微分は、多変数関数を  $dx$  や  $dy$  の一次式で近似すること、すなわち「線型近似」の多変数バージョンである。全微分はとても実用的な公式だ。ある関数の変化や誤差が、各変数の変化や誤差にどのように依存するかを、教えてくれるのだ。

よくある質問 115  $\partial$  は偏微分の記号ですが、ならば全微分を表す記号は無いのですか? ... 全微分は言葉 (というか式) だけで、「全微分を表す記号」はありません。

問 237 理想気体の状態方程式:  $P = \rho RT$  を考える。 $\rho$  はモル密度 (単位体積あたりのモル数)、 $R$  は気体定数 ( $8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) である。摂氏 0 度 (273 K)、1000 hPa ( $1 \times 10^5 \text{ Pa}$ ) の状態から、温度を摂氏 1 度、圧力を 1001 hPa にすると、この気体のモル密度はどのくらい変わるか調べよう。

- (1) 最初の状態での  $\rho$  を、そのときの  $T, P$  から計算せよ (電卓!)
- (2) 次の状態での  $\rho$  を、そのときの  $T, P$  から計算せよ (電卓!)
- (3) それらの差を求めよ。
- (4) これを全微分でやってみよう。まず次式を示せ:

$$d\rho = \frac{1}{RT} dP - \frac{P}{RT^2} dT \quad (10.43)$$

- (5)  $T, P$  は最初の状態とし、

$$dT = 1 \text{ K}, \quad dP = 1 \text{ hPa} = 10^2 \text{ Pa} \quad (10.44)$$

として、上の式を計算して  $d\rho$  を求めよ。

よくある質問 116 1 変数の微分では直線の式が出てきて、2 変数の全微分では平面の式が出てくるということ? ... そうです。2 変数関数  $z = F(x, y)$  を全微分すると、

$$z = F(x + dx, y + dy) = F(x, y) + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

となりますが、ここで  $dx, dy, z$  を変数、残りを定数とみなせば、これは平面を表す方程式です (あとで「ベクトル」の章でやります)。

よくある質問 117 全微分と偏微分は微生物系に進む人にも必要ですか? ... 微生物研究でも必要な場合が多くありますし、理解していた方が結果の考察がやりやすい場面が多いです。具体的に言うと、微生物を使用して何かの物質を大量に作る (プラント) 場合 (発酵学や醸造学) など環境条件と微生物の増殖速度、得られる物質の収量などを解析する際 (一種のモデリングです) に、必要になります。またこれと同様の解析方法を要求されるのが、微生物を利用した廃水処理プラントです。さらに、湖や湖沼での物質収支モデル構築にも必要です。こういった研究を将来やりたいと考えているのであれば、全微分や偏微分の知識があると必ず役立ちます。また、近年盛んになってきている蛍光色素を利用した細胞検出や遺伝子検出などの際にも全微分や偏微分の知識があると役立ちます。微生物研究でも生態的な研究を行いたい場合には、環境に関する研究ですので、広範な知識と解析方法を持っていることが非常に有利に働きます。例えば、海洋での微生物研究を行う際には、海洋物理に相当する表層だけでない海流などの動きのシミュレートと栄養塩類濃度分布、微生物量などの関係を解析しますが、上記海洋物理の知識もある程度必要ですので、やはり全微分や偏微分の知識があると役立つと思います。実際に、私が昨年乗船した北極海調査では、数名の海洋物理学の研究者も乗船しており、船上に上がってくるリアルタイムのデータをすぐに解析して、海中環境 (物理的 & 化学的) の議論をすること多々でし

た。(内海真生先生)

### 10.9 面積分と体積分

ここで、ちょっと変わった積分を学ぼう。それは、微小量が面積や体積になるような積分である。どういふものなのか、以下の例を見て欲しい:

例 10.10 君は広くて平坦で長方形の農場を持っている。図 10.4 のように地面に  $xy$  座標系を設定し、

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq X \\ 0 \leq y \leq Y \end{aligned}$$

の範囲がこの農場であるとしよう。農場の面積  $S$  は、もちろん  $S = XY$  となる。

さて、この農場に雨が降る。広いので、雨の強さは均一でなく場所ごとに違う。すると、君の農場全体に、単位時間あたりに降る雨量(つまり雨水の体積/時間) $R$  をどうやって見積もればよいだろう? 図 10.4 のように農場を  $x$  方向に  $n$  列、 $y$  方向に  $m$  列ができるような格子状に分割すると、合計  $mn$  個の小さな長方形の農地ができる。 $x$  方向に  $i$  番め、 $y$  方向に  $j$  番めにある小農地に降る単位時間あたりの雨量を  $\Delta R(x_i, y_j)$  としよう。すると、全農場に降る単位時間あたりの雨量  $R$  は、各小農地に降る単位時間あたりの雨量の合計だから、

$$R = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta R(x_i, y_j) \tag{10.45}$$

となる(当たり前である)。

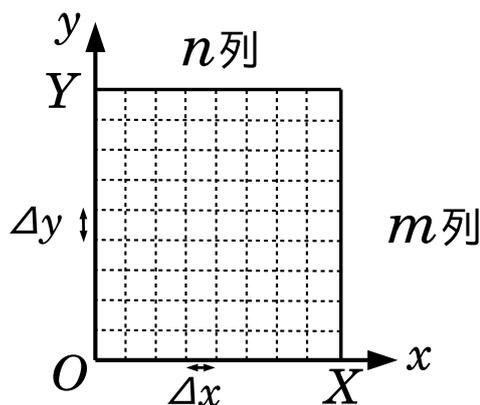


図 10.4 君の農場

さて、分割の数、つまり  $m$  や  $n$  をたくさんとれば、各小農地はいくらでも小さくできる。すると、それぞれの小農地の中では、雨の強さがほとんど均一とみなせるだろう。点  $(x, y)$  の付近で、単位面積あたりに降る雨量を

$F(x, y)$  とすると、 $F(x, y)$  は 2 つの独立変数  $(x, y)$  に関する関数である。すると、

$$\Delta R(x_i, y_j) \doteq F(x_i, y_j) \Delta S_{ij} \tag{10.46}$$

となる。ここで  $\Delta S_{ij}$  は、この小農地の面積とする。すると式 (10.45) は、

$$R \doteq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n F(x_i, y_j) \Delta S_{ij} \tag{10.47}$$

となる。ここで分割を限りなく細かくすると、 $n$  と  $m$  は  $\infty$  に行き、 $\sum$  は  $\int$  に変わり、 $\Delta S_{ij}$  は  $dS$  に変わり、 $\doteq$  は  $=$  に変わる:

$$R = \iint_{\text{農場}} F(x, y) dS \tag{10.48}$$

ここで積分記号の下に「農場」と書いたのは、農場全体で分割と和を行う、という意味である(積分区間を書く代わりに)。

これでもいいのだが、式 (10.46) に戻ってもう少し考えてみよう。小農地の  $x$  方向の長さを  $\Delta x$ 、 $y$  方向の長さを  $\Delta y$  とすると、もちろん

$$\Delta S_{ij} = \Delta x \Delta y \tag{10.49}$$

である\*4。すると、式 (10.47) は、

$$R \doteq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n F(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \tag{10.50}$$

となり、 $\Delta x$  と  $\Delta y$  を 0 に、 $n$  と  $m$  を無限大に持っていけば、

$$R = \int_0^Y \int_0^X F(x, y) dx dy \tag{10.51}$$

になる。(例おわり)

式 (10.48) や式 (10.51) のように、積分記号が 2 つ以上出てくるような積分のことを重積分とか多重積分とよぶ。特に、この例のように、平面図形を無数の小さな図形に分割し、それぞれの微小面積を関数にかけて足し合わせる場合は 2 重積分になり、そのことを特に面積分と呼ぶ。同様に、立体を無数の小さな立体に分割し、それぞれの微小体積を関数にかけて足し合わせる場合は 3 重積分になり、そのことを特に体積分と呼ぶ。

面積分や体積分は、積分範囲(上の例では、畑の形)が単純な長方形や直方体であり、なおかつ被積分関数が  $x$

\*4 もちろん、 $\Delta x = X/n$ 、 $\Delta y = Y/m$  である

と  $y$  (と  $z$ ) の簡単な関数で表される場合は、それぞれの変数で順番に計算していけばよい (そうでない場合は難しくなる)。

問 238 以下の面積分を計算せよ。ヒント: まず被積分関数を  $x$  だけの関数とみなして ( $y$  は定数とみなして)  $x$  で定積分し (その結果は  $x$  を含まない  $y$  だけの式になる), 次に  $y$  で定積分する。

$$\int_{-2}^2 \int_0^3 (x^2 + xy) dx dy \quad (10.52)$$

よくある質問 118 重積分って難しそうです。ただの積分も難しいのに、それがダブルで来たりしたらもう... .. そんなに難しく考えなくて OK! ふつうの積分は、関数に、線 (数直線) を分割した微小量をかけて足すことで、面積分は、面 (平面図形) を分割した微小量をかけて足すことです。概念的には大差ない。

よくある質問 119 でも、重積分の計算ってどうやるのですか? ... 面積分や体積分を実際に「計算せよ」ということは少なく、むしろ面積分や体積分は、現象を語る表現手段として現れることの方が多いです。その例が式 (10.51)。この式は、「畑に降った雨の総量」を表現しているけど、実際にその値をここでは求めてはいません。もちろん、具体的な  $F(x, y)$  がわかるなら、その積分を実行すれば雨量は求まりますが、それには普通、コンピュータを使います。しかし式 (10.51) は、それ自体が「ある概念を表す」という点で、十分に意味ある式なのです。

よくある質問 120 大学の数学は哲学みたいだと聞いていましたがその通りだと思いました。... そのあたりの気持ちの切り替えは必要ですね。問題が解けること以上に、論理と概念を理解することの方が重要になってきます。

問 239 ある直方体状のお菓子の砂糖の濃度は、部位によって異なる。場所  $(x, y, z)$  における砂糖の濃度 (単位体積あたりに含まれる砂糖の質量) を  $c(x, y, z)$  とする。このお菓子全体に含まれる砂糖の量  $S$  を表す式を述べよ。直方体は、 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$  の領域とする。

## 10.10 関数と無次元量

既に学んだように、 $\sin x$  は、以下のように無限次の多項式でマクローリン展開できる:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (10.53)$$

ここで、もし  $x$  に何らかの次元があれば、困ったことになる。実際、 $x$  がもし「長さ」という次元を持ち、 $m$  という単位で表されるなら、 $x^3$  は  $m^3$  という単位を持つ。ところが、 $m$  という単位を持つ量と  $m^3$  という単位を持つ量を足すことはできない (異なる次元の量は足せない)。従って、式 (10.53) の右辺が意味を持つのは、 $x$  が無次元量 (単位を持たない量) であるときに限る。従って、現実的には、 $\sin x$  のような関数の引数 (関数に入れる数、つまり独立変数) は、無次元量でなければ意味がないのである。そこで、現実的な問題を扱う科学では、このような関数の引数を無次元にするために、何らかの定数を掛けたり割ったりして、つじつまをあわせる必要がある。

例 10.11 P.110 では、単振動の式:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (10.54)$$

を学んだ ( $t$  は時刻、 $\omega$  は角速度、 $\delta$  は適当な定数)。既に学んだように、 $\cos \theta$  も  $\theta$  に関する無限次の多項式でマクローリン展開されるので、引数  $\theta$  は無次元量でなくてはならない。ところが  $t$  は「時間」という次元を持ち、「秒」などの単位で表される。そこで、それを無次元にする (単位を消す) ために、 $\omega$  という係数が必要なのだ。このことから、 $\omega$  が「1/時間」の次元を持ち、 $s^{-1}$  などの単位で表されるということがすぐわかる。同様に  $\delta$  も無次元量である (「初期位相」と呼ばれる)。 (例おわり)

もちろん、 $\omega$  は角速度という、立派な意味を持つ量であり、単なるつじつまあわせの為だけに存在するのではない。しかし、数学的な形式と、量の次元 (単位) の整合性だけに着目しても、このようにいろいろなことがわかるのである。

## 演習問題

演習問題 28 あるお菓子は半径  $R$  の球形をしており、中の方が甘い。お菓子の中の砂糖の濃度を  $c$  とすると、 $c$  は中心で最大値  $c_0$  をとり、表面で 0 である。中心から表面までは、 $c$  は中心からの距離  $r$  に関する一次関数で表されるとする。このお菓子に含まれる砂糖の全質量を表す式を導け。それは、このお菓子と同じ形・大きさで、

砂糖が濃度  $c_0$  で均一に存在するような別のお菓子に含まれる砂糖の全量の何倍に相当するか? ヒント: 中心から半径  $r$ , 厚さ  $dr$  の球殻に含まれる砂糖の質量は? それを足し合わせれば(すなわち積分すれば)よい。

演習問題 29 テーラー展開を直接せずに(式(10.10)などを使って), 次式を示せ:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots \quad (10.55)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (10.56)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots \quad (10.57)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots \quad (10.58)$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4} \quad (10.59)$$

ヒント: 式(10.55)は, 式(10.10)をちょっと工夫。式(10.56)は式(10.55)の両辺を不定積分して  $x=0$  でつじつまが合うようにすれば出てくる。式(10.55)の  $x$  に  $x^2$  を代入すると式(10.57)。式(10.57)の両辺を不定積分して  $x=0$  でつじつまが合うようにすれば式(10.58)。式(10.58)の両辺に  $x=1$  を代入すると, 式(10.59) ( $x=1$  は, もとの式(10.10)の収束半径のぎりぎり端っこであって, 内側ではないが, 式(10.58)の収束半径の内側には入っている)。

演習問題 30 テーラー展開を直接行なって, 式(10.55), 式(10.56), 式(10.57), 式(10.58)を示せ。

演習問題 31 以下の関数で,  $x$  が無次元量でなければ意味を持たないのを選び, その理由を述べよ。ヒント: 1は無次元量である。

- (1)  $x^2$             (2)  $1/x$             (3)  $1+x$   
 (4)  $1/(1-x)$     (5)  $\tan x$             (6)  $\exp x$   
 (7)  $\ln x$

### 問題の解答

答 216 式(10.2)で,  $x^2$  以降の項を無視すると, 線型近似の式に一致する。すなわち, 式(10.2)は, 線型近似の式に, さらに高次の項を付け加えたものと見ることができ。

答 217  $f(x) = e^x$  と置くと,  $f(0) = e^0 = 1, f'(0) =$

$e^0 = 1, f''(0) = e^0 = 1, \dots$  であるので, これらを式(10.3)に代入すると,

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \\ &= \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

$f(x) = \sin x$  と置くと,  $f(0) = \sin 0 = 0, f'(0) = \cos 0 = 1, f''(0) = -\sin 0 = 0, f'''(0) = -\cos 0 = -1, f''''(0) = \sin 0 = 0 \dots$  であるので, これらを式(10.3)に代入すると,

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \\ &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots \end{aligned}$$

$f(x) = \cos x$  と置くと,  $f(0) = \cos 0 = 1, f'(0) = -\sin 0 = 0, f''(0) = -\cos 0 = -1, f'''(0) = \sin 0 = 0, f''''(0) = \cos 0 = 1 \dots$  であるので, これらを式(10.3)に代入すると,

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{0!} + \frac{0}{1!}x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 \dots \\ &= \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

答 218 式(10.6)の両辺を  $x$  で微分すると,

$$\begin{aligned} (e^x)' &= 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots \\ (e^x)' &= \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots \\ (e^x)' &= e^x \end{aligned}$$

式(10.7)の両辺を  $x$  で微分すると,

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \frac{1}{1!} - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \dots \\ &= \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ &= \cos x \end{aligned}$$

式(10.8)の両辺を  $x$  で微分すると,

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= 0 - \frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \dots \\ &= -\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

答 219 式 (10.6) に  $x = 1$  を代入すれば与式を得る。

答 220  $f(x) = 1/(1-x)$  とする。

(1) 合成関数の微分によって、

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^{-1} \\ f'(x) &= (-1)(1-x)^{-1-1}(1-x)' = (1-x)^{-2} \\ f''(x) &= (-2)(1-x)^{-2-1}(1-x)' = 2(1-x)^{-3} \\ f^{(3)}(x) &= 2(-3)(1-x)^{-3-1}(1-x)' \\ &= 2 \times 3(1-x)^{-4} \\ f^{(4)}(x) &= 2 \times 3(-4)(1-x)^{-4-1}(1-x)' \\ &= 2 \times 3 \times 4(1-x)^{-5} \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= \dots = n!(1-x)^{-(n+1)} \end{aligned}$$

となる。これらに  $x = 0$  を代入して、 $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 2$ ,  $f^{(3)}(0) = 3!$ ,  $f^{(4)}(0) = 4!$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}(0) = n!$  となる。これを式 (10.2) に代入すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \frac{4!}{4!}x^4 + \dots + \frac{n!}{n!}x^n \dots \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots \end{aligned}$$

となる。 ■

(2)  $x = 2$  とすると、左辺  $= 1/(1-2) = -1$  だが、右辺は  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$  であり、無限大に発散する。従ってこの式は成り立たない。

(3) 式 (3.95) で  $r = x$  とすると、

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (10.60)$$

となる。ここで  $n$  が無限大に行くときを考える。右辺の分子の  $x^{n+1}$  は、 $|x| < 1$  のときであれば、0 に収束するので、右辺は  $1/(1-x)$  に収束する。 $|x| > 1$  であれば、 $x^{n+1}$  は発散する ( $1 < x$  なら正の無限大に発散するし、 $x < -1$  なら正負に振動しながら正か負の無限大に発散する) ので、右辺は収束しない。 $x = -1$  ならば、 $x^{n+1}$  は 1 と  $-1$  の間を振動するので、右辺は収束しない。 $x = 1$  なら右辺の分母が 0 になるので式 (10.60) は無意味になる。以上のことから、式 (10.60) の右辺が収束する (もしくは意味を持つ) のは  $|x| < 1$  のときだけである。

答 221  $z = a + bi$  とする ( $a, b$  は実数)。

$$z = a + bi \quad (10.61)$$

$$\bar{z} = a - bi \quad (10.62)$$

これらの辺々を足せば、

$$z + \bar{z} = 2a$$

従って、 $a = (z + \bar{z})/2$  となる。すなわち式 (10.12) の第 1 式が成り立つ。一方、式 (10.61) から式 (10.62) を辺々引けば、

$$z - \bar{z} = 2bi$$

従って、 $b = (z - \bar{z})/(2i)$  となる。すなわち式 (10.12) の第 2 式が成り立つ。

答 222 (1)(2) 略。

(3)  $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0i = -1$ 。

従って、 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 。

答 223

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} \times e^{i\beta} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) + i^2 \sin \alpha \sin \beta \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

一方、

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

実数部と虚数部をそれぞれ比べて、与式を得る。

答 224  $f(x) = e^{ix}$ ,  $g(x) = \cos x + i \sin x$  とする。

$$f'(x) = ie^{ix} = i(\cos x + i \sin x) = i \cos x - \sin x$$

$$g'(x) = -\sin x + i \cos x$$

従って、 $f'(x) = g'(x)$ 。

答 225

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (10.63)$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (10.64)$$

辺々を足せば、

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$$

従って、

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x \quad (10.65)$$

一方、式 (10.63)、式 (10.64) より、

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

従って,

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x \quad (10.66)$$

答 226

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)' = \frac{ie^{ix} + ie^{-ix}}{2i} \\ &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x \end{aligned}$$

cos の微分も同様 (略)。

答 227

(1)

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} \\ &= \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{8} + 3 \times \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{8} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ &= \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4} \end{aligned}$$

従って,  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ 。

(2) 略 (上と同様)。

答 228 図 10.5 のとおり。注: (2) は原点对称。(5) は 90 度だけ左回り。

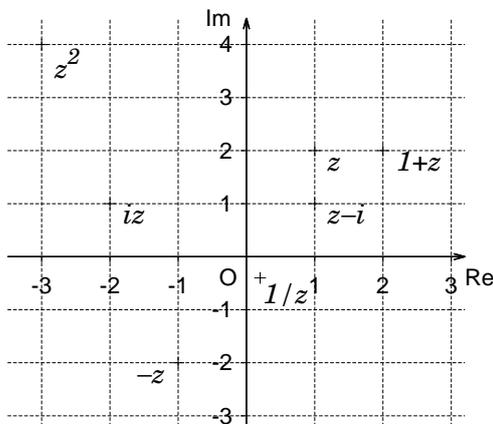


図 10.5 問 228 の答え。

答 229

(1) (2) (3)

$$\sqrt{2} \exp\left(\frac{\pi}{4} i\right) \quad 2 \exp\left(\frac{\pi}{6} i\right) \quad \exp\left(\frac{3\pi}{2} i\right)$$

(4) (5) (6)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \quad -2 \quad 1 + \sqrt{3}i$$

答 230

(1)  $e^{i7\pi/12}$  (2)  $e^{-i\pi/12}$  (3)  $e^{i3\pi/4}$

(4)  $e^{i\pi/2}$  (5)  $8e^{i\pi}$

答 231  $z = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $w = r_2 e^{i\theta_2}$  とする ( $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$  は実数。 $r_1$  と  $r_2$  は 0 以上)。式 (10.26) と式 (10.29) より、絶対値と動径は同じである。従って,  $|z| = r_1$ ,  $|w| = r_2$  である。

$$zw = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (10.67)$$

この最後の項を極形式とみれば, その動径は  $r_1 r_2$  である。絶対値と動径は同じなので,  $|zw| = r_1 r_2 = |z||w|$ , すなわち式 (10.33) が成り立つ。 ■

答 232 複素数  $z, w$  について,

(1)  $z = r e^{i\theta}$  とする。  $e^{i\alpha} z = r e^{i(\theta + \alpha)}$  となる。これはもとの  $z$  に対して, 偏角が  $\alpha$  だけ増えた式なので, 複素平面上では, 原点を中心に  $\alpha$  だけ左向きに回転することに対応する。

(2)  $z = r e^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta$  だから,

$$\begin{aligned} \bar{z} &= r \cos \theta - i r \sin \theta \\ &= r \{ \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \} = r e^{-i\theta} \end{aligned}$$

答 233

(1) 複素平面に  $i$  をプロットすると, 動径 1, 偏角  $\pi/2$  であることは明らかなので, 極形式で表現して  $i = e^{\pi i/2}$ 。

(2) 前問の結果の両辺を  $i$  乗すれば,  $i^i = (e^{\pi i/2})^i = e^{\pi i^2/2} = e^{-\pi/2}$ 。

(3)  $i^i = e^{-\pi/2} \doteq e^{-1.5708} \doteq 0.2079$ 。

答 234

$$(1) \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$(2) \frac{\partial f}{\partial x} = y \exp xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \exp xy$$

$$(3) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(4) \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

答 235  $\partial f/\partial x = y \exp(xy)$  より,

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \exp(xy) + xy \exp(xy)$$

また,  $\partial f/\partial y = x \exp(xy)$  より,

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \exp(xy) + xy \exp(xy)$$

よって,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \exp(xy) + xy \exp(xy)$$

答 236

$$(1) \partial^2 f/\partial x^2 = -(e^y + e^{-y}) \cos x$$

$$(2) \partial^2 f/\partial y^2 = (e^y + e^{-y}) \cos x$$

(3) (1)(2) より明らか。

答 237

(1)  $\rho = P/RT$  に値を代入し  $\rho = 44.08 \text{ mol m}^{-3}$ 。(2)  $\rho = 43.96 \text{ mol m}^{-3}$ 。(3) それらの差を  $d\rho$  と書くと,

$$d\rho = 43.96 \text{ mol m}^{-3} - 44.08 \text{ mol m}^{-3} = -0.12 \text{ mol m}^{-3}.$$

(4)

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{1}{RT}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial T} = -\frac{P}{RT^2}$$

従って, 全微分公式から,

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial P} dP + \frac{\partial \rho}{\partial T} dT = \frac{1}{RT} dP - \frac{P}{RT^2} dT$$

(5)  $dT=1 \text{ K}$ ,  $dP=1 \text{ hPa}=10^2 \text{ Pa}$  として上の式に代入すると,  $d\rho = -0.12 \text{ mol m}^{-3}$ 。

答 238

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \left( \int_0^3 (x^2 + xy) dx \right) dy &= \int_{-2}^2 \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} \right]_0^3 dy \\ &= \int_{-2}^2 \left( 9 + \frac{9y}{2} \right) dy = \left[ 9y + \frac{9y^2}{4} \right]_{-2}^2 = 36 \end{aligned}$$

答 239 位置  $(x, y, z)$  にある, 体積  $dx dy dz$  の直方体の中に含まれる砂糖の量  $dS$  は,  $c dx dy dz$ 。これを積分して,

$$S = \int_0^c \int_0^b \int_0^a c dx dy dz$$

## 第11章

# ベクトル

第 1.14 節 (P.10) で学んだように、平面や空間の中で、大きさと向きをもつ量をベクトルと呼ぶ。本章では、ベクトルについて、より深く学ぼう。

### 11.1 ベクトルを座標で表す

ベクトルは、矢印だったり、座標 (数値の組み合わせ) であることは既に学んだ。それらを記号で呼ぶときは、上に矢印のついた記号か、太字のアルファベットを使う約束だった。ここで、ベクトルを記号と座標で表す時の書き方を確認しておこう:

#### 例 11.1 ベクトルの記号と座標の書き方

$$\text{正しい: } \mathbf{a} = (2, -1) \quad (11.1)$$

$$\text{正しい: } \mathbf{b} = (x, y) \quad (11.2)$$

$$\text{間違い: } a = (2, -1) \quad (11.3)$$

$$\text{間違い: } \mathbf{a}(2, -1) \quad (11.4)$$

$$\text{間違い: } b = (x, y) \quad (11.5)$$

$$\text{間違い: } \mathbf{b} = (x, y) \quad (11.6)$$

$$\text{間違い: } b = (x, y) \quad (11.7)$$

式 (11.3) は細字の  $a$  がダメ。式 (11.4) は  $=$  が入っていないのがダメ。式 (11.5) は細字の  $b$  がダメ。式 (11.6) は成分まで太字で書いたところがダメ (ベクトルといえど何でもかんでも太字で書けばよい、というものではない)。式 (11.7) は全部ダメ。(例おわり)

平面上のベクトルを「平面ベクトル」と言う。平面は  $x$  座標と  $y$  座標という 2 つの座標軸で表されるから、平面ベクトルの座標は  $(2, -1)$  のように 2 つの成分 (座標を構成する数のこと) を持つ。空間内のベクトルを「空間ベクトル」と言う。空間は  $x$  座標,  $y$  座標,  $z$  座標という 3 つの座標軸で表されるから、空間ベクトルの座標は  $(2, -1, 4)$  のように 3 つの成分 (座標を構成する数のこと) を持つ。

ベクトルを座標で書き表す際、高校では  $(2, -1, 4)$  のように、数 (成分) を横に並べた。このように成分を横に

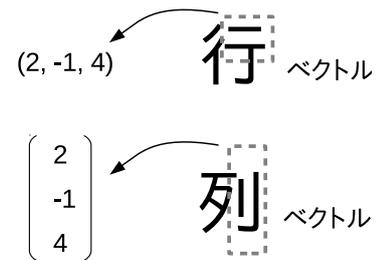


図 11.1 ベクトルの成分の並べ方

並べたベクトルを行ベクトル 行ベクトル と言う。一方、大学では、数を縦に並べて、

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

のようにも書く。このように、成分を縦に並べたベクトルを列ベクトル 列ベクトル と言う。ベクトルは行ベクトルで書いても列ベクトルで書いてもよいのだが、あるベクトルを、一旦、列ベクトルが行ベクトルのどちらかで書いたら、それ以降はなるべく同じ表記を使おう。というのも、両者の意味を区別することもあるからだ\*1。

あれ? 横に書くのが行ベクトルだけ? 列ベクトルだけ? と迷わないように、良い覚え方がある。「行」という漢字の右上には平行な 2 本の横線 (二の字) があるので、「行」は横。一方、「列」という漢字のつくりには平行な 2 本の縦線 (リの子) があるので、「列」は縦。図 11.1 を参照せよ。

本章では、特に理由の無い限り、行ベクトルで書く。

さて、座標を使うと、ベクトルの計算が楽にできる。まず、ベクトルのスカラー倍は、座標の各成分 (座標を構成する個々の数値) をスカラー倍すれば OK。例えば

\*1 大学の数学でテンソルというものを学ぶとわかる。

$\mathbf{a} = (2, -1, 3)$  とすれば,  $\mathbf{a}$  の 5 倍は,

$$\begin{aligned} 5\mathbf{a} &= 5(2, -1, 3) = (5 \times 2, 5 \times (-1), 5 \times 3) \\ &= (10, -5, 15) \end{aligned} \quad (11.9)$$

である。

ベクトルどうしの和 (足し算) は, 成分どうしの和で OK。例えば,  $\mathbf{a} = (2, -1, 4)$  と  $\mathbf{b} = (1, 6, 0.2)$  の和は,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (2, -1, 4) + (1, 6, 0.2) \\ &= (2+1, -1+6, 4+0.2) = (3, 5, 4.2) \end{aligned}$$

である。

問 240 2つのベクトル:  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 3)$  について, 以下の数ベクトルを求めよ。

- (1)  $2\mathbf{a}$                       (2)  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

問 241  $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, -1, -2)$  について,  $2\mathbf{a}$  と  $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$  をそれぞれ求めよ。

さて, P.11 で学んだように, 2つのベクトル  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  が, 0 でないスカラー  $\alpha$  によって,

$$\alpha\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (11.10)$$

と書けるとき,  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  は互いに平行である, という。例えば,  $(1, 2)$  と  $(2, 4)$  は,  $2(1, 2) = (2, 4)$  と書けるから, 互いに平行である。

問 242 2つのベクトル:  $\mathbf{a} = (1, 2, 6)$ ,  $\mathbf{b} = (x, y, -2)$  について,  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  が互いに平行なとき,  $x$  と  $y$  の値を求めよ。

## 11.2 ベクトルの大きさ

ベクトル  $\mathbf{a}$  の大きさを,  $|\mathbf{a}|$  と表す (縦棒で挟む)。

平面ベクトル  $(x, y)$  の大きさは,

$$|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (11.11)$$

である。これは三平方の定理から明らかだ。同様に, 空間ベクトル  $(x, y, z)$  の大きさは,

$$|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (11.12)$$

である。

問 243 以下のベクトルの大きさを求めよ:

- (1)  $(1, 1, 1)$       (2)  $(3, -4)$       (3)  $(0, 0)$

問 244 任意のベクトル  $\mathbf{a}$  とスカラー  $\alpha$  について, 次式を示せ:

$$|\alpha\mathbf{a}| = |\alpha||\mathbf{a}| \quad (11.13)$$

大きさが 0 のベクトルを零ベクトルと言って,  $\mathbf{0}$  と書く約束だった。もし平面ベクトル  $(x, y)$  が零ベクトルなら,  $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ , すなわち,  $x^2 + y^2 = 0$  である。これを満たすのは,  $x = y = 0$  しかない。つまり, 平面の零ベクトルは  $(0, 0)$  である。

同様に, 空間の零ベクトルは  $(0, 0, 0)$  である。

大きさが 1 のベクトルを 単位ベクトル と呼ぶ。

問 245 以下は全て単位ベクトルであることを示せ。ヒント: 式 (11.11) を使う。(5) では式 (11.13) を使う。

- (1)  $(1, 0)$   
 (2)  $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$   
 (3)  $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$   
 (4) 任意の実数  $\theta$  について,  $(\cos \theta, \sin \theta)$   
 (5) 零ベクトルでない任意のベクトル  $\mathbf{a}$  について,  $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$

## 11.3 内積

2つのベクトル  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  について, 成す角を  $\theta$  とするとき,

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \quad (11.14)$$

という量を,  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の 内積 と呼び,  $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$  と表す (定義)\*2。

この式から明らかなように, 内積の結果はスカラーである。(ちなみに後で「外積」という演算が出てくるが, 外積の結果はベクトルである。)

問 246 任意のベクトル  $\mathbf{a}$  について次式を示せ:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \quad (11.15)$$

問 247  $\mathbf{0}$  でないベクトル  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  について,

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0 \quad (11.16)$$

ならば  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  は直交することを示せ。

\*2 内積は「スカラー積」とも呼ばれる。

問 248  $\mathbf{0}$  でないベクトル  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  について, その成す角を  $\theta$  とするとき, 次式を示せ。

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (11.17)$$

さて, 内積の定義 (式 (11.14)) には, 座標のことが書かれていない。そこで, 座標で内積を計算するにはどうすればいいかを考えよう。まずとりあえず平面ベクトルに関して考えよう。

$\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  とする。 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  がどのように  $a_1, a_2, b_1, b_2$  で表されるかを知りたいのだ。そこで,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  をそれぞれ位置ベクトルとする点を  $A$ ,  $B$  とする。三角形  $OAB$  について, 余弦定理より,

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \theta \quad (11.18)$$

が成り立つ (ここで  $\theta$  は角  $AOB$ , すなわち  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  がなす角)。これを变形して,

$$OA \cdot OB \cos \theta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2} \quad (11.19)$$

となる。 $OA = |\mathbf{a}|$ ,  $OB = |\mathbf{b}|$  より, 上の式の左辺は  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  である。右辺を座標で求めるために, まず,

$$OA^2 = |\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 \quad (11.20)$$

$$OB^2 = |\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 \quad (11.21)$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 \\ &= |(b_1 - a_1, b_2 - a_2)|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) \end{aligned} \quad (11.22)$$

である。これらを式 (11.19) の右辺に代入すると,

$$= \frac{2(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{2} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (11.23)$$

となる。従って,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (11.24)$$

となる。なんと! 座標で内積を求めるには, 成分同士をかけて足すだけでいいのだ! これは空間ベクトル (座標成分が 3 つある場合) でも同様である。すなわち,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  について,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (11.25)$$

となる。

問 249 式 (11.25) を導け。ヒント: 式 (11.24) を導いたのとほぼ同じ手順。

ここでは証明しないが, 内積には以下のような性質がある ( $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  は任意のベクトルであり,  $\alpha$  は任意のスカラー):

内積の性質

- (1)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$
- (2)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$  となるのは  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  のときに限る。
- (3)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- (4)  $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- (5)  $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}$

(1), (2), (3), (4) は定義から自明だろう。(5) は, 式 (11.24) を利用して成分で考えれば簡単に証明できる。

問 250  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 3)$  について,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  を求めよ。

問 251  $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (3, -4, 5)$  について,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  を求めよ。

問 252  $\mathbf{a} = (1, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 3)$  について, 成す角  $\theta$  の余弦, つまり  $\cos \theta$  を求めよ。

問 253 三角形  $OAB$  を考える。 $O$  を始点,  $A$  を終点とするベクトルを  $\mathbf{a}$  とし,  $O$  を始点,  $B$  を終点とするベクトルを  $\mathbf{b}$  とする。いま,  $\mathbf{b}$  と同じ方向で, 長さ 1 であるベクトル (単位ベクトル) を  $\mathbf{e}_b$  とすると,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b \quad (11.26)$$

は,  $A$  から辺  $OB$  におろした垂線の足  $P$  と点  $O$  の距離 (ただし角  $AOB$  が鈍角の場合は負) であることを示せ。これを, 「 $\mathbf{a}$  から  $\mathbf{b}$  に落とした正射影の長さ」と呼ぶ。

問 254  $\mathbf{a} = (1, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 3)$  について,  $\mathbf{a}$  から  $\mathbf{b}$  に落とした正射影の長さを求めよ。

問 255 三角形  $OAB$  を考える。 $O$  を始点,  $A$  を終点とするベクトルを  $\mathbf{a}$  とし,  $O$  を始点,  $B$  を終点とするベクトルを  $\mathbf{b}$  とする。このような三角形を, 「 $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  が張る三角形」という。その面積を  $S$  とする。

(1) 次式を示せ:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2} \quad (11.27)$$

(2)  $\mathbf{a} = (a, b)$ ,  $\mathbf{b} = (c, d)$  とする。次式を示せ。

$$S = \frac{|ad - bc|}{2} \quad (11.28)$$

(3)  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (3, 4)$  のとき  $S$  を、式 (11.27) と式 (11.28) のそれぞれで求めよ。どちらが楽か?

問 255 で見たように、2 つのベクトルが張る三角形の面積を求める式は、式 (11.27) と式 (11.28) の 2 つがある\*<sup>3</sup>。高校数学では式 (11.27) が有名だが、それを変形して得られる式 (11.28) はほとんど出てこない。しかし、大学での数学では、式 (11.28) も大切なのだ。式 (11.28) 内の  $ad - bc$  は、後に学ぶ「2 次正方行列の行列式」というものに相当する。この「行列式」という概念はとても重要。それに慣れるためにも、ぜひ式 (11.28) に親しもう。それを抜きにしても、式 (11.28) の方が式 (11.27) よりもずっと計算が楽だ。

よくある質問 121 なぜ高校では式 (11.28) よりも式 (7.48) を使わせるのでしょうか? ... ホントに謎ですね。一つありえるのは、式 (7.48) は空間ベクトル (成分が 3 つの場合) にも使えるけど、式 (11.28) は平面ベクトル (成分が 2 つ) にしか使えない、という理由です。式 (11.28) を空間に拡張することはできるのですが (それが後で学ぶ「外積」というやつ)、高校では範囲外です。

よくある間違い 48 内積をあらわす「 $\bullet$ 」という記号を省略したり、 $\times$  という記号で代用してしまう ... 普通の数 (スカラー) の積であれば、そのようなことは許されるけど、内積では許されません。内積は普通の数 (スカラー) の積とは全く別の概念。例えば、普通の数  $a, b$  について、その積は、

$$ab \quad a \bullet b \quad a \times b$$

という 3 通りの書き方のいずれもが許され、これらは同じ意味です。しかし、ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  について、

$$ab \quad \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

という 3 つの式は、意味が互いに違います。すなわち、 $ab$  という式は意味がありません\*<sup>4</sup>。 $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$  は内積を表します。 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  は内積ではなく、後に学ぶ「外積」というものを表します。

よくある質問 122 ベクトルは割り算はできないのですか? ... ベクトルをスカラーで割ることはできます。しかし、スカ

ラーやベクトルをベクトルで割ることはできません (定義されない、すなわち意味がない)。例えば  $(1, 2), (3, 4)$  という 2 つのベクトルについて、 $(1, 2)/(3, 4)$  というような「割り算」は不可能です。

たとえば、 $(2, 4)/(1, 2) = 2$  とかはダメですか? ... 言いたいことはわかる! でも、そういうのもやらないのです。その式は  $(2, 4) = 2(1, 2)$  と書けるし、それで十分です。

## 11.4 平面の中の直線と法線ベクトル

すでに君は、方程式

$$ax + by + c = 0 \quad (a, b, c \text{ は実数の定数}) \quad (11.29)$$

は、 $xy$  平面上で直線を表すことを知っているだろう (わからなければ、これを  $y =$  の式に変形してみればよい)。さて、ここで面白い、そしてとても便利な事実がある。 $x$  と  $y$  の係数を並べてできるベクトル  $(a, b)$  は、この直線に直交するのだ!

なぜかを考えよう。まず直線上の任意の 2 点:  $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$  を考える。これらは次式を満たす:

$$ax_0 + by_0 + c = 0 \quad (11.30)$$

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \quad (11.31)$$

辺々引き算して、

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0 \quad (11.32)$$

となる。これは次式と同じことだ:

$$(a, b) \bullet (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0 \quad (11.33)$$

ここで、 $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$  は  $\overrightarrow{AB}$  である。従って、 $(a, b) \bullet \overrightarrow{AB} = 0$  となり、 $(a, b)$  は  $\overrightarrow{AB}$  と直交していることがわかる。 $\overrightarrow{AB}$  は直線に沿った (直線に平行の) ベクトルなので、結局、この直線はベクトル  $(a, b)$  と垂直である。■

一般に、線や面に垂直なベクトルのことを法線ベクトル (normal vector) という。 $(a, b)$  は、直線  $ax + by + c = 0$  の法線ベクトル (のひとつ) である。

問 256  $(1, 2)$  を通り、ベクトル  $(3, -1)$  に垂直な直線を表す式を示せ。(ヒント: 法線ベクトル (のひとつ) は  $(3, -1)$  とわかっているので、求める式は  $3x - y + c = 0$  のような形に書ける。あとは  $c$  を決めれば OK)

例 11.2  $(2, 1)$  を通り、ベクトル  $(3, -5)$  に平行な直線を表す式は? まず法線ベクトルを求めよう。それには  $(3, -5)$  に垂直なベクトル (内積したら 0 になるベ

\*<sup>3</sup> これ以外にも様々な式がある。有名なのはヘロンの公式という式であるが、ヘロンの公式はあまり実用的ではない。

\*<sup>4</sup> ただし、大学の数学ではテンソル積というものをこの式で表すこともある。

クトル) をテキストに決めればよい。(5, 3) がそうだ。これが直線の法線ベクトルだから、求める直線の式は  $5x + 3y + c = 0$  の形に書けるだろう ( $c$  は未知の定数)。これに (2, 1) を入れると、 $13 + c = 0$ 、よって  $c = -13$ 。よって、求める式は、 $5x + 3y - 13 = 0$  ■

問 257 (1, 2) を通り、ベクトル (1, -1) に平行な直線を表す式を示せ。(ヒント: 上の例を参考に!)

よくある質問 123 例 11.2 で、法線ベクトルを「テキストに」決めましたが、そんなんでいいのですか? 法線ベクトルは他にもありえますよね。... その通り。法線ベクトルは (3, -5) 以外にもたくさんあります。でも、どの法線ベクトルも互いに平行なので、(3, -5) の何倍か、つまり  $k(3, -5)$  という形で表されます ( $k$  は任意の実数)。それを使って、直線の式を  $5kx + 3ky + c' = 0$  と表し ( $c'$  は  $c$  とは別の未知数)、(2, 1) をこれに代入すれば、 $c' = -13k$  になり、直線の式は  $5kx + 3ky - 13k = 0$  となります。両辺を  $k$  で割れば、結局同じ式が出てきます。というわけで、法線ベクトルは、(零ベクトルでさえなければ) 本当にテキストに決めていいのです。どんなふうに決めても、結論は一緒です。

## 11.5 空間の中の平面と法線ベクトル

前節で考えた平面の中の直線の話は、空間の中の平面の話に拡張できる。まず、次式を考えよう:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (a, b, c, d \text{ は実数の定数}) \quad (11.34)$$

これは式 (11.29)、すなわち平面内の直線の式に似ている。実は式 (11.34) は、空間内の平面を表す式であり、 $(a, b, c)$  はその平面の法線ベクトルなのだ!

そのことを今から示そう。まず、式 (11.34) を満たす任意の 2 点:  $A(x_0, y_0, z_0)$ ,  $B(x_1, y_1, z_1)$  を考える。当然ながら次式が成り立つ:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \quad (11.35)$$

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \quad (11.36)$$

両辺引き算して、

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0 \quad (11.37)$$

これは次式と同じことである:

$$(a, b, c) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = 0 \quad (11.38)$$

ここで、明らかに  $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = \overrightarrow{AB}$  である。また、ベクトル  $(a, b, c)$  を  $\mathbf{n}$  と置く。すると式 (11.38) は、

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad (11.39)$$

となる。つまり、 $\mathbf{n}$  と  $\overrightarrow{AB}$  は互いに直交する。この意味するところは何だろうか? 今、点  $A$  を固定して考える。 $B$  はいろんな点を動かすることができるのだが、式 (11.39) によると、固定点  $A$  から点  $B$  へのベクトルが、ひとつのベクトル  $\mathbf{n}$  と必ず直交していなければならない。そのような点  $B$  の「動ける範囲」は、点  $A$  を通る平面で、なおかつ  $\mathbf{n}$  に垂直な平面である (直感的にわかるだろう)。つまり、式 (11.34) は、3 次元空間の中の平面を表す方程式であり、 $x$  と  $y$  と  $z$  の係数を並べてできるベクトル  $\mathbf{n} = (a, b, c)$  は、この平面の法線ベクトルである。

問 258 (0, 0, 1) を通り、ベクトル (1, 2, -1) に垂直な平面の方程式を求めよ。

ここまでは、前節でやった、平面内の直線の話と大きくは違わない。上の問も、問 256 と似たようなものだ。しかし、例 11.2 や問 257 のように、「なんちゃらに平行な直線を求めよ」の平面版はどうだろうか? 例えば、「(0, 0, 0) を通り、ベクトル (1, 0, 0) に平行な平面を求めよ」みたいな問題はどうか?

これは困る。解けないのだ。なぜかというところ、(0, 0, 0) を通り、ベクトル (1, 0, 0) に平行な平面」というのはたくさんあって、一つに決まらないのだ。これは要するに「原点を通り、 $x$  軸に平行な平面」ということだから、例えば「 $x$  軸と  $y$  軸を含む平面」や、「 $x$  軸と  $z$  軸を含む平面」や、その中間など、たくさんある。「ひとつのベクトルに平行」という条件だけでは、平面の向きは決まらないのだ。

しかし、「ふたつのベクトルのどちらにも平行」という条件なら平面の向きは決まる。例えば、「(0, 0, 0) を通り、2 つのベクトル (1, 0, 0) と (0, 1, 0) に平行な平面」と言われれば、「 $x$  軸と  $y$  軸を含む平面」に決まる (式で書けば  $z = 0$ )。

では、次の問題をやってみよう:

問 259 (0, 0, 1) を通り、2 つのベクトル  $\mathbf{a} = (1, 1, -3)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2, 1)$  の両方に平行な平面を求めよう。まず法線ベクトルを  $\mathbf{n} = (p, q, r)$  と置く。 $(p, q, r)$  は未知の定数)

- (1) 次式を示せ:  $p+q-3r=0$  (ヒント:  $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{a}$  が垂直)
- (2) 次式を示せ:  $p+2q+r=0$  (ヒント:  $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{b}$  が垂直)
- (3)  $p$  と  $q$  を  $r$  だけで表わせ。
- (4)  $(p, q, r) = r(7, -4, 1)$  であることを示せ。(これで法線ベクトルが求まった!)
- (5) 平面を表す式を求めよ。

難しくはないが、そこそこ面倒である。次の節で、もっと簡単にできる、魔法のような道具を紹介する。

## 11.6 外積

### 2 つの 3 次元の数ベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (11.40)$$

から、以下のように別の 3 次元の数ベクトルを導き出す操作を  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の 外積 または「ベクトル積」と呼び、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  と書く。すなわち、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \quad (11.41)$$

と定義する。例えば、 $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (4, 5, 6)$  の場合、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 6 - 3 \times 5 \\ 3 \times 4 - 1 \times 6 \\ 1 \times 5 - 2 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (11.42)$$

となる。

よくある質問 124 こんなものやこしくて覚えられません! ... 誰もが最初はそう思います。でも慣れれば大丈夫。まず式 (11.42) を何回か紙の上で再現して、外積の計算に慣れてください。

よくある間違い 49 式 (11.41) の右辺を、

$$\begin{bmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \end{bmatrix} \text{ とか, } \begin{bmatrix} a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \quad (11.43)$$

と間違える。... 成分の順番に注意してください。外積の結果の  $x$  成分 ( $a_2 b_3 - a_3 b_2$ ) は、もとのベクトルの  $y$  成分 ( $a_2$  や  $b_2$ ) と  $z$  成分 ( $a_3$  や  $b_3$ ) から求まります。同様に、 $y$  成分はもとのベクトルの  $z$  成分と  $x$  成分から、 $z$  成分はもとのベクトルの  $x$  成分と  $y$  成分からもとまるのです。また、同じ位置の成分どうしの掛け算 ( $a_2 b_2$  とか) は現れません。「求めたい成

分以外の成分で計算する。自分とは違う位置の成分と掛ける」と覚えておきましょう。

よくある間違い 50 外積と内積を混同してしまう。外積を求めよ、という問に内積を答えたり、その逆をしたり ... 外積と内積は全く別物! それぞれの定義を確認しよう。

よくある間違い 51 外積を表す“ $\times$ ”という記号を、省略したり“ $\bullet$ ”という記号で代用してしまう ... それはダメ。“ $\times$ ”と“ $\bullet$ ”の混用や省略が許されるのは、数どうしの積だけ。それ以外の「積」、すなわちベクトルの内積や外積、行列の積、集合の直積などは、数どうしの積とは根本的に違うものなので、それぞれに決まった書き方を守らねばなりません。

さて、この外積はなかなか強いヤツである。

問 260

- (1) 式 (11.41) において、次式を証明せよ:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{a} = 0 \quad (11.44)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{b} = 0 \quad (11.45)$$

- (2) それが実際に式 (11.42) において成り立っていることを確認せよ。

すなわち、次の定理が成り立つ:

外積の定理 1)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  は、 $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の両方に垂直である。

てことは、問 259 ではわざわざ方程式を解いて求めた法線ベクトルが、一発で求まるのだろうか? それをやってみよう:

問 261 問 259 の  $\mathbf{a} = (1, 1, -3)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2, 1)$  について、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  を計算せよ。

注: 「外積の定理 1」は外積の計算結果のチェックに便利である。例えば、式 (11.42) について、もとの 2 つのベクトルと内積をとって 0 になることを確かめるのだ:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = -12 + 30 - 18 = 0$$

首尾よく 0 になっていて、一安心である。0 になったからといって計算が正しいとまでは言えない、0 にならなければ、どこかで必ず計算ミスをしている。

というわけで、外積は便利だ。しかもこれは外積の強さのまだ一部だ。もっとすごいのは次の定理だ:

外積の定理 2)  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  は  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  が張る平行四辺形の面積に等しい\*5。

これは、式 (11.28) を拡張したものと言える。証明はちょっとめんどくさいので、章末の演習問題にまわす。この定理を使う問題を解いてみよう:

問 262 以下の各場合について、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  を求め、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の張る平行四辺形の面積を求めよ。

(1)  $\mathbf{a} = (1, 2, 0), \mathbf{b} = (1, 1, -1)$

(2)  $\mathbf{a} = (1, 0, 1), \mathbf{b} = (-1, 1, 2)$

他にも、こういう定理がある:

外積の定理 3) 外積の順序を変えると符号が反転する。すなわち、

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (11.46)$$

問 263 式 (11.46) を証明せよ。ヒント: 式 (11.41) の  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  をひっくり返して計算してみよう。

問 264 任意のベクトル  $\mathbf{a}$  について、次式が成り立つことを示せ:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (11.47)$$

ヒント: 式 (11.46) の  $\mathbf{b}$  を  $\mathbf{a}$  にすると...?

さて、ここでは証明はしないが、もうひとつ、以下のよな定理がある (図 11.2 も参照!):

外積の定理 4)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  は、 $\mathbf{a}$  から  $\mathbf{b}$  に右ネジをまわすときにネジが進む方を向く\*6。

よくある質問 125 右ネジって何ですか? ... ネジとかボルトはわかりますね。あれをドライバーで回すと、穴に入ったり穴から出てきたりするでしょ? 世の中のほとんどのネジは、ドライバーを右に (つまり時計回りに) まわすと、ネジは穴に入っていきます。それが右ネジです。ごく稀に、逆、つまり左にまわすと入っていくネジもあり、そういうのは左ネジ。

\*5 それは  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$  でもある ( $\theta$  は  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  のなす角)。

\*6 ただしこれは、 $x$  軸から  $y$  軸に向けて右ネジをまわすときにネジが進む方を  $z$  軸が向いている場合。

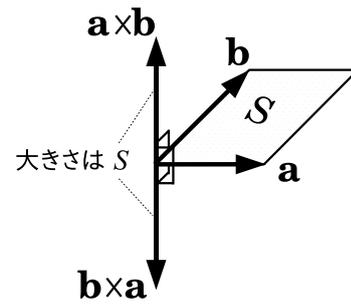


図 11.2 外積 (ベクトル積) の幾何学的な概念図。 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  と  $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  は、ともに  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が張る平行四辺形の面積  $S$  をその大きさとするベクトルで、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の両方に垂直。ただし、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  と  $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  は互いに逆方向。 $\mathbf{a}$  から  $\mathbf{b}$  に右ネジをまわすときにネジが進む側にあるのが  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 。

問 265  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  とすると、以下の式が成り立つことを示せ:

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \quad (11.48)$$

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \quad (11.49)$$

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \quad (11.50)$$

問 266 任意の空間ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  と任意の実数  $p$  に関して、以下の式が成り立つことを、外積の定義に戻って示せ:

$$(p\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (11.51)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (11.52)$$

よくある質問 126 外積と内積の違いがわかりません。

... 定義が全く違います。その他に端的な違いとして、

- 内積の結果はスカラーだが、外積の結果はベクトル。
- 内積は順序を入れ替えても結果は変わらないが、外積は順序を入れ替えると符号が反転する。
- 内積は平面ベクトルでも空間ベクトルでも存在するが、外積は空間ベクトルだけに存在する。
- 内積は  $ab \cos \theta$  だが、外積の大きさは  $ab \sin \theta$ 。

などが挙げられます (全て定義から導出可能)。

## 11.7 物理学とベクトル

さて、微積分と並んでベクトルは物理学で重要なツールだ。速度や加速度や力などはベクトルを使って表現する。例として円運動を考えてみよう。

問 267  $xy$  座標平面上で、原点を中心とする半径  $r$  の円周上を、左回りに回転運動する点  $P$  を考える。時刻

$t = 0$  のとき P の位置は  $(r, 0)$  であったとする。すると、時刻  $t$  のとき、点 P の位置は、以下の位置ベクトル  $\mathbf{r}(t)$  であらわされる ( $r, \omega$  は定数) :

$$\mathbf{r}(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t) \quad (11.53)$$

これは、原点からの距離  $r$  を保ったまま、 $x$  軸から左回りに角  $\omega t$  だけ回転した位置である (P.109 の極座標!)。このように、ある点 (ここでは原点) からの距離が一定で、ある方向 (ここでは  $x$  軸) からの角が時間に比例して変化するような回転運動を、「等速円運動」と言う。このとき  $\omega$  を 角速度 と呼ぶ。

- (1) P の速度  $\mathbf{v}(t)$  と、その大きさを求めよ。
- (2) P の加速度  $\mathbf{a}(t)$  と、その大きさを求めよ。
- (3) 位置ベクトルと速度は直交していることを示せ (ヒント: 内積)。
- (4) 速度ベクトルと加速度は直交していることを示せ。
- (5) 位置ベクトルと加速度は平行で逆向きであることを示せ。
- (6) 角速度が 2 倍になると、速度や加速度の大きさはそれぞれ何倍になるか?

こんなかんじで、ちょっとした運動を考えるだけでも、ベクトルとその微分がガンガン出てくる。

よくある質問 127 問 267(1) で、

$$\mathbf{v}(t) = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$$

と答えたら不正解でした。微分は間違っていないし、どこがダメなのですか? ... ベクトルは太字。  $v(t)$  でなくて  $\mathbf{v}(t)$  と書いて下さい。

よくある質問 128  $v(t)$  を  $\mathbf{v}(t)$  と書きなおしたけどまた不正解でした。... 答は合っているけど、導出過程が書かれていなければ正解にはできません。  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$  と書いて ( $\mathbf{r}$  は太字ですよ!), それに続けて上の式の右辺を書けばよいのです。

よくある質問 129 導出過程はどこまで詳しく書けばよいのでしょうか? ... 一概には言えませんが... 数学は定義から始めて、いくつも定理を重ねて結論を導出します。だから、どの問題にも、そこに至るまでいくつかのステップがあるはず。そのステップの最初の方はある程度省略して OK ですが、最後のほうのステップは省略してはいけません。上の質問の例では、速度を問われる問題なのだから、速度をどう導出したか、というステップ (位置ベクトルを微分すること) は省略できない。

でも、 $r \cos \omega t$  を微分したらなぜ  $-r\omega \sin \omega t$  になるか、というところまでは遡る必要はありません。

内積も物理で使う。それは「仕事」だ。P.27 で (というか中学校で) 学んだように、物体に力をかけて移動させるとき、力と、その力の方向に動いた距離との積を、「仕事」という。これは、実はベクトルの内積で表現すべきことなのだ。それを説明しよう。

移動前と移動後のそれぞれの位置ベクトルを  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$  とすると、 $\Delta \mathbf{r} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$  は「移動した方向と距離」を持つベクトルである。そういうのを「変位ベクトル」とか、単に「変位」という。また、かかる力を  $\mathbf{F}$  とする。  $\Delta \mathbf{r}$  と  $\mathbf{F}$  のなす角を  $\theta$  と呼ぼう。すると、「その力の方向に動いた距離」は、  $\Delta \mathbf{r}$  を  $\mathbf{F}$  に落とした正射影の長さであり、それは、  $|\Delta \mathbf{r}| \cos \theta$  である。従って、仕事は、  $|\mathbf{F}| |\Delta \mathbf{r}| \cos \theta$  となる... ちょっと待て! それって、結局、  $\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$  じゃないか! そうなのだ。仕事とは、要するに「力と変位の内積」なのだ。「仕事=力かける距離」とよく言うが、その「かける」は内積なのだ。

外積も物理で使う。以下のような物理量は、外積を使わないと表現できない:

- 力のモーメント (トルク):  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$
- 角運動量:  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$
- 磁力:  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

ここで、 $\mathbf{r}$  は質点の位置ベクトル、 $\mathbf{F}$  は質点にかかる力、 $\mathbf{p}$  は質点の運動量 (=質量と速度の積)、 $q$  は電荷量、 $\mathbf{B}$  は磁束密度という量である。

これらの量や式が意味するところは、いずれ「物理学」で学ぶだろう。その準備のためにも、今ここで、外積についてしっかり学んでおこう。

よくある質問 130 中 3 のとき「右ネジの法則」を習いましたが、外積と関係あるのですか? ... フレミングの法則ですね。そういうのは本来、全て外積で書くものです。それを理解すれば、親指が何で人差し指が何で... と覚える必要ありません。また、「てこの原理」も外積で書けます。

問 268 2 つのベクトル:

$$\mathbf{a}(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{bmatrix}$$

が、ともに変数  $t$  の関数であるとする。以下の式を証明

せよ:

$$(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}' \quad (11.54)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}' \quad (11.55)$$

ヒント:  $(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})$  や  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  を成分で表して、愚直に積の積の微分の公式を適用していけばよい。

## 11.8 ベクトルの応用

科学では「重心」という言葉をよく耳にする。重心は、感覚的には、物体を1点で支える時、その点で支えれば重力がバランスして、傾いたり転げ落ちたりしないような点のことである。実は、そういうのを含むようなきちんとした数学的な定義がある。それがこれだ:

物体を  $n$  個の質点 (質量はあるが形や大きさの無い点) が構成する時、

$$\mathbf{G} := \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + m_k \mathbf{r}_k + \cdots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k + \cdots + m_n} \quad (11.56)$$

を位置ベクトルにとるような点を重心という (定義)。ここで、 $m_k$  は  $k$  番目の質点の質量、 $\mathbf{r}_k$  は  $k$  番目の質点の位置ベクトルである。

このように定義された点で物体を支えると物体は転ばないことは、数学的に証明できる。

例 11.3 同じ質量  $m$  の4個の質点 (位置ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{r}_1 \sim \mathbf{r}_4$  とする) がつながってできている物体を考える。その重心の位置ベクトルは、

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &:= \frac{m\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2 + m\mathbf{r}_3 + m\mathbf{r}_4}{m + m + m + m} \\ &= \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{4} \end{aligned} \quad (11.57)$$

となる。

例 11.4 異なる質量を持つ2個の質点がつながってできている物体を考える。質点1の質量と位置ベクトルを  $m_1, \mathbf{r}_1$  とし、質点2の質量と位置ベクトルを  $m_2, \mathbf{r}_2$  とする。重心の位置ベクトルは、

$$\mathbf{G} := \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (11.58)$$

となる。これを式 (1.48) と比べると、この重心は、質点1と質点2を結ぶ線分を、 $m_2 : m_1$  の比に内分する点だとわかる。(例おわり)

さて、重心を利用して、化学で出てくる重要な問題を

解いてみよう。

正四面体は、有機物を作る骨格、つまり炭素原子の配位に関する最も単純な幾何学的モデルであり、タンパク質や糖類などの巨大分子の機能や性質は、その立体的な幾何学構造から理解される。ベクトルを使って、正四面体の中心から頂点に伸びる線分どうしのなす角の大きさ (正四面体角) を求めてみよう。

問 269 図 11.3 のような正四面体を考える。一つの頂点を原点  $O$  とし、残りの3つの頂点を点  $A$ , 点  $B$ , 点  $C$  とする。一辺の長さを  $L$  とする。すなわち、 $OA=OB=OC=AB=BC=CA=L$  である。この正四面体の各頂点に同じ質量の質点があると考え、その重心を点  $G$  とする。式 (11.57) から、

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{4} \quad (11.59)$$

である。

(1) 次式を示せ:

$$\vec{OA} \bullet \vec{OB} = \vec{OB} \bullet \vec{OC} = \vec{OC} \bullet \vec{OA} = \frac{L^2}{2} \quad (11.60)$$

(ヒント: 三角形  $OAB$  は一辺  $L$  の正三角形)

(2) 式 (11.59), 式 (11.60) を使って次式を示せ:

$$OG = \frac{\sqrt{6}}{4}L \quad (11.61)$$

(ヒント: まず式 (11.59) を使って  $\vec{OG} \bullet \vec{OG}$  を計算する。

(3) 正四面体角を  $\theta$  とする。式 (11.61) を使って次式を示せ:

$$\vec{GO} \bullet \vec{GA} = \frac{3}{8}L^2 \cos \theta \quad (11.62)$$

(ヒント: 内積の定義を素直に使う。GO=GA に注意せよ。)

(4) 次式を示せ:

$$\vec{GA} = \frac{3\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC}}{4} \quad (11.63)$$

(ヒント:  $\vec{GA} = \vec{OA} - \vec{OG}$ )

(5) 式 (11.59), 式 (11.63) を使って次式を示せ:

$$\vec{GO} \bullet \vec{GA} = -\frac{L^2}{8} \quad (11.64)$$

(ヒント:  $\vec{GO} = -\vec{OG}$ )

(6) 式 (11.62), 式 (11.64) を使って、 $\cos \theta$  の値を求め

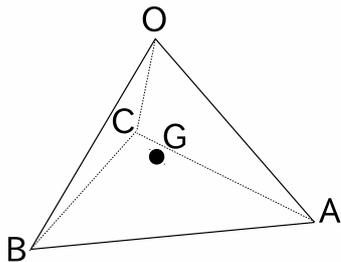


図 11.3 正四面体 OABC。問 269 参照。

よ。

- (7) 関数電卓を使って、 $\theta$  の値を、ラジアンと度分秒で表せ。

ベクトルの応用例をもうひとつ (しかも全く違う話題) やってみよう。

問 270 ある農地において、防風林 (風を遮るために農地近辺に作られる林) を造成するために、気象観測を行った。その結果、風向と風速に関する、以下の表のようなデータを得た。風は主にどちらの方向から吹いていたか? ヒント: 各時刻の風をベクトルとしてあらわし、その

表 11.1 ある日の風向風速観測結果

時刻	風向 (北からの角度)	風速 (m/s)
00:00	15	3.0
06:00	40	5.2
12:00	320	1.5
18:00	260	2.0

成分を平均する。電卓等を使うこと。なお、一般的に、「風向」とは、風が吹いて来る方向を表す。例えば「北よりの風」とは、北から吹いてくる風であり、北へ吹いていく風ではない。風向は「北より」を 0 度とし、北 東 南 西の時計回り順に増えたとする。例えば風向 45 度は北東よりの風、風向 90 度は東よりの風である。

### 11.9 本当のベクトルとは

本章もそろそろおしまいだだが、最後に衝撃的な話をひとつ。これまで、「大きさと向きをもつ量をベクトルと呼ぶ」と学んできた。実は、それは嘘である。というか、本当は、ベクトルはもっと広い概念であり、「大きさと向きをもつ量」はベクトルの一種に過ぎないのだ。

実は、「平面や空間の中で大きさや向きをもつ量」は、正しくは 幾何ベクトル と呼ぶ。また、その座標として

言及された  $(3, 2)$  とか  $(3, 2, 1)$  のように、複数個の数 (スカラー) を並べたものを、数ベクトル<sup>\*7</sup> と呼ぶ。

P.10 では、幾何ベクトルと数ベクトルは同じものとして扱ったが、本当は、両者はそもそも別の概念だ。というか、片方は矢印、もう片方は数字の羅列なのだから、それらが「同じ」という方が不自然である。

よくある質問 131 なんでもそんな嘘を教えたのですか? ... 大人にならなきゃわからないことってあるでしょ? サンタさんとかさ。あのときは、物理学や化学の授業でベクトルが出てくるときに、困らない程度の、最低限のことを教えたのです。

ならベクトルとは何? という疑問に対する答は後にして、ここでは数ベクトルについてもう少し学ぼう (幾何ベクトルについては既に学んだので)。数ベクトルは「数を並べたもの」なので、何個の数を並べてもよい。例えば  $(1, 3, 2, -6, 3, 5)$  も数ベクトルである。

数ベクトルを構成するひとつひとつの数を、成分という。例えば  $-1$  は  $(2, -1, 4, 3)$  の 2 番目の成分である。数ベクトルでは、成分の並び順も大切である。例えば  $(2, -1, 4, 3)$  と  $(2, 3, 4, -1)$  は違う数ベクトルである。

ひとつの数ベクトルが何個の成分で構成されるかを「次元」という。例えば  $(2, -1, 4, 3)$  は、「4 次元の数ベクトル」である。高校数学では 2 次元または 3 次元の数ベクトルしか考えないが、大学では経済学や統計学、物理学などで 4 次元以上の数ベクトルが出てくる。

よくある質問 132 4 次元の数ベクトルなんて、イメージできません ... なんで? 数を 4 つ並べただけじゃん。

それがどういう図形というか空間の中の存在になるのかわからないのです ... そんなの考える必要ありません。数ベクトルは「数を並べたもの」です。それだけ。図形とかをイメージしたくなるのは、数ベクトルと幾何ベクトルをまだごっちゃにして考えているからです。たまたま 2 次元や 3 次元のときは、幾何ベクトルと数ベクトルを区別せずに使うと便利だからそうしてただけです。4 次元以上では、幾何ベクトルのことは忘れて下さい。

同じ次元の数ベクトルどうしは、足すことができる (それぞれの成分どうしを足せばよい)。また、数ベクトルをスカラー倍することもできる (それぞれの成分をスカラー倍すればよい)。

さて、ここで幾何ベクトルに話を戻す。幾何ベクトルどうしも足すことができる (平行四辺形を描けばよい)

\*7 「すうべくとる」と読む。

し、幾何ベクトルをスカラー倍することもできる(矢印の長さを何倍かすればよい)。

このように、「足す」と「スカラー倍する」ことができる、というのが数ベクトルと幾何ベクトルに共通する性質である。もう少し丁寧にいうと、「2つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  と、任意のスカラー  $\alpha, \beta$  に対して、

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \quad (11.65)$$

のように、それぞれのベクトルをスカラー倍して足しあわせることができる(そしてその結果もベクトルになる)という性質を、数ベクトルも幾何ベクトルも持っている。このように、「スカラー倍して足す」ことができるような量のことを、ベクトル (vector) と呼ぶのだ! そして、式 (11.65) のように複数のベクトルをスカラー倍して足すことを 線型結合\*8 (linear combination) とか 一次結合 と呼ぶ。

問 271 線型結合とは何か?

よくある質問 133 線型結合ができるもの、といっても、幾何ベクトルと数ベクトルしか思いつきませんが、他に何かありますか? ... たくさんあります。例えば2次関数。2次関数のスカラー倍は2次関数だし、2次関数どうしの和も2次関数です。だから2次関数はベクトルだ、と言ってもOKなのです。

えっ...!? そんなムチャな。関数がベクトルなのですか? ... はい、そうです。大学数学では関数をベクトルとして扱います。それを知りたければ「基礎数学II」をとりましょう。やはりこの話はまだ早かったかな。。というわけで、今はとりあえずベクトルは平面ベクトルと空間ベクトルだけ考えておけばいいです。

## 演習問題

演習問題 32 直線  $ax + by + c = 0$  と、直線外の点  $P(x_0, y_0)$  があつたとする ( $a, b, c, x_0, y_0$  は任意の定数で、 $a$  と  $b$  のどちらかは0以外)。Pからこの直線への距離は、

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (11.66)$$

で与えられることを示せ。ヒント: 点Pから直線へ下ろした垂線の足を点  $Q(x_1, y_1)$  として、 $(x_1, y_1)$  を求める。そのためには、 $\overrightarrow{PQ}$  が直線の法線ベクトル  $(a, b)$  と平行であることと、Qが直線上にあることを使う。そうして

\*8 「線型」を「線形」と書くこともある。どちらでもよい。

求まったQの座標を使って、PQの距離を計算すればOK。

演習問題 33 外積の定理2を証明しよう。2つの空間ベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (11.67)$$

について、

- (1)  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$  が次式になることを示せ(愚直に計算!):

$$a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 - 2(a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3 a_1 b_3 b_1) \quad (11.68)$$

- (2) 式 (11.27) を使って、 $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  が張る平行四辺形の面積を計算せよ(愚直に計算!)。その結果を変形し、式 (11.68) に一致することを示せ。注: 式 (11.27) は「三角形」の面積。平行四辺形はその倍であることに注意せよ。

演習問題 34  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  を任意の3次元の数ベクトルとする。次式を示せ

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (11.69)$$

ヒント: 成分を地道に計算する。かなりの計算量になるが、必ずできると信じてがんばろう! なお、 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$  の  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$  はスカラーなので、その後の  $\mathbf{b}$  との積は、ただのスカラー倍である(だから  $\cdot$  や  $\times$  は書いていない)。

## 問題の解答

答 240

- (1)  $2\mathbf{a} = 2(1, 2) = (2, 4)$   
 (2)  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, 2) - (2, 3) = (-1, -1)$

答 241  $2\mathbf{a} = (2, 4, -2)$ 。  $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (-2, 8, 1)$ 。

答 242  $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$  と置く ( $k$  は未知の定数)。これを成分で書くと、 $(1, 2, 6) = k(x, y, -2)$ 。各成分では、 $1 = kx$ 、 $2 = ky$ 、 $6 = -2k$ 。最後の式から  $k = -3$ 。これを他の式に代入し、 $1 = -3x$ 、 $2 = -3y$ 。従って、 $x = -1/3$ 、 $y = -2/3$ 。

答 243 略解 (1)  $\sqrt{3}$  (2) 5 (3) 0

答 244  $\mathbf{a}$  を平面ベクトル  $(a_1, a_2)$  とすると,

$$\begin{aligned} |\alpha \mathbf{a}| &= |\alpha(a_1, a_2)| = |(\alpha a_1, \alpha a_2)| \\ &= \sqrt{(\alpha a_1)^2 + (\alpha a_2)^2} = \sqrt{\alpha^2(a_1^2 + a_2^2)} \\ &= \sqrt{\alpha^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\alpha| |\mathbf{a}| \end{aligned}$$

$\mathbf{a}$  が空間ベクトルのときも同様 (成分が 1 つ増えるだけで同じ手順)。

答 245

- (1)  $|(1, 0)| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$
- (2)  $|(0, 1)| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$
- (3)  $|(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})| = \sqrt{(-1/\sqrt{2})^2 + (-1/\sqrt{2})^2}$   
 $= \sqrt{1/2 + 1/2} = \sqrt{1} = 1$
- (4)  $|(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})| = (1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3})^2 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$
- (5)  $|(\cos \theta, \sin \theta)| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$
- (6)  $|\mathbf{a}/|\mathbf{a}|| = |\mathbf{a}|/|\mathbf{a}| = 1$

答 246  $\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| \cos 0^\circ = |\mathbf{a}|^2$

答 247  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  のなす角を  $\theta$  とする。  $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta = 0$ ,  $|\mathbf{a}| \neq 0$ ,  $|\mathbf{b}| \neq 0$  より,  $\cos \theta = 0$ 。よって,  $\theta = 90^\circ$

答 248  $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

答 249 略。

答 250  $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$

答 251  $(1, 2, -1) \bullet (3, -4, 5) = 3 - 8 - 5 = -10$

答 252 式 (11.17) を使って,  $\cos \theta = 1/\sqrt{5}$

答 253 角 AOB の大きさを  $\theta$  とする。  $OP = OA \cos \theta$  である。一方,  $\mathbf{a} \bullet \mathbf{e}_b = |\mathbf{a}||\mathbf{e}_b| \cos \theta$  である。

ところが,  $\mathbf{a}$  の長さは OA で,  $\mathbf{e}_b$  の長さは 1 だから,  $\mathbf{a} \bullet \mathbf{e}_b = OA \cos \theta$  となる。これは, OP に等しい。

答 254  $\mathbf{b}$  に平行で長さ 1 のベクトル  $\mathbf{e}_b$  は, 問 245 の (5) より,  $\mathbf{e}_b = \mathbf{b}/|\mathbf{b}| = (-1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$ 。従って,  $\mathbf{a} \bullet \mathbf{e}_b = 2/\sqrt{10} = \sqrt{10}/5$

答 255

- (1) 角 AOB を  $\theta$  とする。式 (7.48) において,  $a = |\mathbf{a}|$ ,  $b = |\mathbf{b}|$  とすれば,  $S = \frac{1}{2} |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$ 。ここで  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$  であり, 式 (11.17) より,

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left( \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \right)^2}$$

である。従って,

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sqrt{1 - \left( \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})^2}$$

- (2)  $|\mathbf{a}|^2 = a^2 + b^2$ ,  $|\mathbf{b}|^2 = c^2 + d^2$ ,  $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = ac + bd$  を前小問の結果に代入して,

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(ad)^2 - 2(ad)(bc) + (bc)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(ad - bc)^2}}{2} \\ &= \frac{|ad - bc|}{2} \end{aligned}$$

- (3) 前小問の結果から,

$$S = \frac{|1 \cdot 4 - 2 \cdot 3|}{2} = \frac{|4 - 6|}{2} = 1$$

答 256  $(3, -1)$  が法線ベクトルなので,  $3x - y + c = 0$  という形の方程式になる ( $c$  は定数)。ここで  $(1, 2)$  を代入すれば,  $3 - 2 + c = 0$  より,  $c = -1$ 。従って,  $3x - y - 1 = 0$ 。

答 257  $(1, 1)$  が法線ベクトルなので,  $x + y + c = 0$  という形の方程式になる ( $c$  は定数)。ここで  $(1, 2)$  を代入すれば,  $1 + 2 + c = 0$  より,  $c = -3$ 。従って,  $x + y - 3 = 0$ 。

答 258  $(1, 2, -1)$  が法線ベクトルなので,

$$x + 2y - z + d = 0$$

という形の方程式になる ( $d$  は定数)。ここで  $(0, 0, 1)$  を代入すれば,  $-1 + d = 0$  より,  $d = 1$ 。従って,

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

答 259

- (1)  $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{a}$  が垂直だから,  $\mathbf{n} \bullet \mathbf{a} = p + q - 3r = 0$
- (2)  $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{b}$  が垂直だから,  $\mathbf{n} \bullet \mathbf{b} = p + 2q + r = 0$
- (3) 上の 2 つの式から  $q$  を消すと,  $p = 7r$ 。上の 2 つの式から  $p$  を消すと,  $q = -4r$
- (4) 前小問より,  $(p, q, r) = (7r, -4r, r) = r(7, -4, 1)$ 。
- (5) 法線ベクトルを  $(7, -4, 1)$  として, 平面を表す式は  $7x - 4y + z + d = 0$  と書ける ( $d$  は未知の定数)。これに  $(0, 0, 1)$  を入れると,  $1 + d = 0$ 。よって  $d = -1$ 。従って, 求める式は  $7x - 4y + z - 1 = 0$

答 260

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\
 &= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 \\
 &= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}$  については解答略。

答 261 結果だけ示す:  $(7, -4, 1)$  レポートには計算過程も書くこと。

答 262 略解を示す。レポートには計算過程も書くこと。

- (1)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-2, 1, -1)$   
 平行四辺形の面積は,  $|(-2, 1, -1)| = \sqrt{6}$ 。  
 (2)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-1, -3, 1)$   
 平行四辺形の面積は,  $|(-1, -3, 1)| = \sqrt{11}$ 。

答 263

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} \times \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2a_3 - b_3a_2 \\ b_3a_1 - b_1a_3 \\ b_1a_2 - b_2a_1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_3b_2 - a_2b_3 \\ a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_2b_1 - a_1b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2b_3 + a_3b_2 \\ -a_3b_1 + a_1b_3 \\ -a_1b_2 + a_2b_1 \end{bmatrix} \\
 &= - \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}
 \end{aligned}$$

答 264 式 (11.46) で  $\mathbf{b}$  に  $\mathbf{a}$  を入れると,  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{a}$ 。右辺を左辺に移項して,  $2\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ 。両辺を 2 で割って与式を得る。

答 265 略 (成分に基づいて計算するだけ)。

答 266

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

とする。

$$\begin{aligned}
 (p\mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} pa_1 \\ pa_2 \\ pa_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pa_2b_3 - pa_3b_2 \\ pa_3b_1 - pa_1b_3 \\ pa_1b_2 - pa_2b_1 \end{bmatrix} \\
 &= p\mathbf{a} \times \mathbf{b}
 \end{aligned}$$

従って式 (11.51) が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_2 + b_2)c_3 - (a_3 + b_3)c_2 \\ (a_3 + b_3)c_1 - (a_1 + b_1)c_3 \\ (a_1 + b_1)c_2 - (a_2 + b_2)c_1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_2c_3 - a_3c_2 \\ a_3c_1 - a_1c_3 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{bmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}
 \end{aligned}$$

従って式 (11.52) が成り立つ。

答 267

(1)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) &= ((r \cos \omega t)', (r \sin \omega t)') \\
 &= (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t) \\
 |\mathbf{v}(t)| &= |(-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)| \\
 &= r\omega |(-\sin \omega t, \cos \omega t)| = r\omega
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) &= ((-r\omega \sin \omega t)', (r\omega \cos \omega t)') \\
 &= (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t) \\
 |\mathbf{a}(t)| &= |(-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t)| \\
 &= r\omega^2 |(-\cos \omega t, -\sin \omega t)| = r\omega^2
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) &= (r \cos \omega t, r \sin \omega t) \cdot (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t) \\
 &= -r^2\omega \cos \omega t \sin \omega t + r^2\omega \sin \omega t \cos \omega t = 0
 \end{aligned}$$

内積が 0 なのでこれらのベクトルは互いに直交。

(4)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) &= (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t) \cdot (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t) \\
 &= r^2\omega^3 \sin \omega t \cos \omega t - r^2\omega^3 \cos \omega t \sin \omega t = 0
 \end{aligned}$$

内積が 0 なのでこれらのベクトルは互いに直交。

(5)  $\mathbf{a}(t) = -\omega^2(r \cos \omega t, r \sin \omega t) = -\omega^2\mathbf{r}(t)$ 。従って,  $\mathbf{a}(t)$  と  $\mathbf{r}(t)$  は平行。ここで  $\omega^2$  は常に正なので,  $-\omega^2$  は負。従って,  $\mathbf{a}(t)$  と  $\mathbf{r}(t)$  は, 向きが逆。

(6) (1) より, 速度の大きさ  $|\mathbf{v}|$  は角速度  $\omega$  に比例する。従って,  $\omega$  が 2 倍になると,  $|\mathbf{v}|$  は 2 倍になる。(2) より, 加速度の大きさ  $|\mathbf{a}|$  は  $\omega^2$  に比例する。従って,  $\omega$  が 2 倍になると,  $|\mathbf{a}|$  は 4 倍になる。

答 268

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})' &= (a_1(t)b_1(t) + a_2(t)b_2(t) + a_3(t)b_3(t))' \\
 &= (a_1(t)b_1(t))' + (a_2(t)b_2(t))' + (a_3(t)b_3(t))' \\
 &= a_1'(t)b_1(t) + a_1(t)b_1'(t) + a_2'(t)b_2(t) + a_2(t)b_2'(t) \\
 &\quad + a_3'(t)b_3(t) + a_3(t)b_3'(t) \\
 &= (a_1'(t)b_1(t) + a_2'(t)b_2(t) + a_3'(t)b_3(t)) \\
 &\quad + (a_1(t)b_1'(t) + a_2(t)b_2'(t) + a_3(t)b_3'(t)) \\
 &= (a_1'(t), a_2'(t), a_3'(t)) \cdot (b_1(t), b_2(t), b_3(t)) \\
 &\quad + (a_1(t), a_2(t), a_3(t)) \cdot (b_1'(t), b_2'(t), b_3'(t)) \\
 &= \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' \\
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b})' &= \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right\}' \\
 &= \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_2'b_3 + a_2b_3' - a_3'b_2 - a_3b_2' \\ a_3'b_1 + a_3b_1' - a_1'b_3 - a_1b_3' \\ a_1'b_2 + a_1b_2' - a_2'b_1 - a_2b_1' \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_2'b_3 - a_3'b_2 \\ a_3'b_1 - a_1'b_3 \\ a_1'b_2 - a_2'b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2b_3' - a_3b_2' \\ a_3b_1' - a_1b_3' \\ a_1b_2' - a_2b_1' \end{bmatrix} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}'
 \end{aligned}$$

答 269

(1) 三角形 OAB は正三角形なので、角 AOB=π/3 である。従って、 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}||\vec{OB}| \cos(\pi/3) = L^2/2$ 。他も同様。

(2) 式 (11.59) より、

$$\begin{aligned}
 OG^2 &= \vec{OG} \cdot \vec{OG} \\
 &= \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{4} \cdot \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{4} \\
 &= \frac{1}{16}(OA^2 + OB^2 + OC^2 \\
 &\quad + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 2\vec{OB} \cdot \vec{OC} + 2\vec{OC} \cdot \vec{OA}) \\
 &= \frac{1}{16}\left(L^2 + L^2 + L^2 + 2 \cdot \frac{L^2}{2} + 2 \cdot \frac{L^2}{2} + 2 \cdot \frac{L^2}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{16} \cdot 6L^2 \quad \therefore OG = \sqrt{\frac{1}{16} \cdot 6L^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}L
 \end{aligned}$$

(3) G は重心なので、G から各頂点への距離は等しい。従って、GO=GA=OG。また、角 AGO は正四面体角 θ。従って、

$$\vec{GO} \cdot \vec{GA} = |\vec{GO}||\vec{GA}| \cos \theta = OG^2 \cos \theta$$

この右辺の OG に式 (11.61) を代入すれば、

$$= \frac{6}{16}L^2 \cos \theta = \frac{3}{8}L^2 \cos \theta$$

(4)

$$\begin{aligned}
 \vec{GA} &= \vec{OA} - \vec{OG} = \vec{OA} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{4} \\
 &= \frac{3\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC}}{4}
 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
 \vec{GO} \cdot \vec{GA} &= -\vec{OG} \cdot \vec{GA} \\
 &= -\frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{4} \cdot \frac{3\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC}}{4} \\
 &= -\frac{1}{16}(3OA^2 - OB^2 - OC^2 \\
 &\quad + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} - 2\vec{OB} \cdot \vec{OC} + 2\vec{OC} \cdot \vec{OA}) \\
 &= -\frac{1}{16}\left(3L^2 - L^2 - L^2 + 2 \cdot \frac{L^2}{2} - 2 \cdot \frac{L^2}{2} + 2 \cdot \frac{L^2}{2}\right) \\
 &= -\frac{2L^2}{16} = -\frac{L^2}{8}
 \end{aligned}$$

(6) 式 (11.62), 式 (11.64) より、 $\frac{3}{8}L \cos \theta = -\frac{L^2}{8}$ 。従って、 $\cos \theta = -1/3$

(7) 電卓を使って、 $\arccos(-1/3) \approx 1.9106$  ラジアン  $\approx 109.4712$  度  $\approx 109$  度 28 分 16 秒。

答 270 北向きを  $x$  軸、東向きを  $y$  軸とするような座標系で、各時刻の風速を  $(U_x, U_y)$  とすると、以下の表のようになる\*9。ベクトルとして平均された風速は、北より 1.92 m/s、東より 0.3 m/s であり、北からの角度を  $\theta$  とすると、 $\tan \theta = 0.3/1.92 = 0.156 \dots$  となる。従って、 $\theta = \arctan 0.15 = 0.156 \dots$  ラジアン  $\approx 8.9$  度。すなわち、北から 8.9 度だけ東に向いた方向が、平均的な風向である。

表 11.2 ある日の風向風速観測結果

時刻	風向 (度)	風速 (m/s)	$U_x$ (m/s)	$U_y$ (m/s)
00:00	15	3.0	-2.90	-0.78
06:00	40	5.2	-3.98	-3.34
12:00	320	1.5	-1.15	0.96
18:00	260	2.0	0.35	1.97
平均			-1.92	-0.3

\*9 例えば「風速 2 m/s の北よりの風」をベクトルで表すと、 $(-2, 0)$  m/s となる。マイナスがつくのは、「北よりの風」は北から南に向かう風であり、 $x$  軸の正の方向から負の方向に向かうベクトルだからである。

## 第12章

# 行列

### 12.1 行列とは

行列 (matrix) とは、数を格子状に並べたものである。

例 12.1 以下の  $A, B$  はともに行列である。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (12.1)$$

(例おわり)

よくある質問 134 行列の括弧は  $[\ ]$  ですか?  $(\ )$  という括弧で書いている本もあるようですが、... どちらでも構いません。

行列の中の、横の並びを 行 (row) という。例えば、式 (12.1) の行列  $A$  で、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

は、1 番目の行であり、「第 1 行」と呼ばれる。行列の中の、縦の並びを 列 (column) という。例えば、式 (12.1) の行列  $A$  で、

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

は、2 番目の列であり、「第 2 列」と呼ばれる。

この「行」だの「列」だのという言葉は、実は君は既に「ベクトル」の章で出会っている。数を横に並べた数ベクトルが行ベクトル、縦に並べた数ベクトルが列ベクトル、というやつだ。あの考え方を使って、行列を、「行ベクトルを並べたもの」とみなしてもよい。例えば、式 (12.1) の  $A$  は、 $(1, 2, 3)$  と  $(-1, 1, 0)$  という 2 つの行ベクトルを縦に並べたもの、とみなすことができる。同様に、行列は、「列ベクトルを横に並べたもの」とみなしてもよい。例えば、式 (12.1) の  $A$  は、

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.4)$$

という、3 つの列ベクトルを順に左から並べたもの、とみなすことができる。このように行列をさまざまな観点で

見ることは、行列を扱う際に重要である。

行の数を  $m$ 、列の数を  $n$  とするような行列は、 $m \times n$  行列と呼ばれる。式 (12.1) の行列  $A$  は  $2 \times 3$  行列である。また、式 (12.3) は  $2 \times 1$  行列、式 (12.2) は  $1 \times 3$  行列とみなせる。

特に、 $m = n$  の場合、つまり正方形に数が並んでいる場合、その行列は  $n$  次正方行列 という。このときの  $n$  の値、つまり正方行列が縦横それぞれ何個の数で構成されているかを、その正方行列の次数という。式 (12.1) の行列  $B$  は 2 次正方行列である。

行列を構成するひとつひとつの数のことを、その行列の 成分 (component) という。特に、行列の中の、第  $i$  行と第  $j$  列が交差するところの成分を、 $(i, j)$  成分と呼び、 $a_{ij}$  のように 2 つの添字のついた文字で表現する。行列そのものを、 $(a_{ij})$  のように表記することもある。例えば式 (12.1) の行列  $A$  について、 $A = (a_{ij})$  とするとき、 $A$  の  $(1, 2)$  成分は  $a_{12} = 2$  であり、 $A$  の  $(2, 3)$  成分は  $a_{23} = 0$  である\*1。

2 つの行列が等しいということは、各行列のすべての  $(i, j)$  成分が互いに等しいということである (定義)。成分が 1 箇所でも違っていたり、そもそも行数や列数が違うような行列どうしは、等しくはない。

### 12.2 行列の計算

行列を定数倍 (スカラー倍) するということは、各成分にその定数 (スカラー) をかけて新しい行列を作ることである。

例 12.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (12.5)$$

\*1  $a_{12}$  の添字は、1 と 2 が並列されているのであり、「じゅうに」ではないことに注意。

とすると、 $A$  の3倍は、

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 2 \\ 3 \times (-1) & 3 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \quad (12.6)$$

である。(例おわり)

行列どうしの加算(足し算)や減算(引き算)は、形が同じ(行数が互いに同じで、列数も互いに同じ)であるような行列どうしだけに定義される(形が違う行列どうしでは加算や減算はできない)。具体的には、各  $(i, j)$  成分どうしの足し算もしくは引き算である(定義)。

例 12.3 式(12.1)の2つの行列  $A, B$  は、互いに形が違うから、加算や減算はできない。(例おわり)

例 12.4 式(12.5)の2つの行列  $A, B$  は、互いに形が同じだから、以下のように加算できる:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+1 \\ -1+3 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (12.7)$$

である。(例おわり)

次に、行列同士の積を定義しよう。まず、2つの行列  $A, B$  について、 $A$  を「行ベクトルを並べたもの」、 $B$  を「列ベクトルを並べたもの」とみなす。そして、 $A$  と  $B$  の積、すなわち  $AB$  とは、「 $A$  の第  $i$  行(ベクトル)」と「 $B$  の第  $j$  列(ベクトル)」の内積を  $(i, j)$  成分とするような行列のことである、と約束(定義)するのだ!

例 12.5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad (12.8)$$

とすると、 $AB$  の  $(1,1)$  成分は、 $(1, 2, 3)$  という行ベクトルと

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

という列ベクトルの内積だから、

$$1 \times 0 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 18$$

となる。同様に、 $AB$  の  $(2,1)$  成分は、

$$-1 \times 0 + 1 \times 3 + 0 \times 4 = 3$$

になる。同様に他の成分も計算すると、

$$AB = \begin{bmatrix} 18 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

である。(例おわり)

この例でわかるように、行列同士の積ができるのは、最初の行列を作る行ベクトルと、次の行列を作る列ベクトルが、互いに同じ次元であるときだけである(でなければそれらどうしの内積が計算できない)。逆に言えば、そのような条件さえ満たされていれば、互いに形がちがう行列どうしであっても、積は可能である。同じ形の行列どうしにしか定義できなかった加算や減算とはずいぶん違うではないか!

よくある間違い 52 行列の積を表すのに  $\times$  や  $\bullet$  という記号を使ってしまう ... これはダメ。例えば2つの行列  $A, B$  の積を書き表すとき、 $AB$  はOK、 $A \times B$  はダメ、 $A \bullet B$  もダメです。

問 272 次の行列  $A, B, C$  について考える。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (12.10)$$

- (1)  $2A$  と  $A - B$  をそれぞれ求めよ。
- (2)  $AB$  と  $BA$  をそれぞれ計算し、 $AB \neq BA$  となっていることを確認せよ。
- (3)  $(AB)C = A(BC)$  を確認せよ。
- (4)  $A(B + C) = AB + AC$  を確認せよ。

問 273 式(12.5)の行列  $A, B$  について、 $BA$  を計算せよ。結果は3次正方行列になるはず!

一般に、行列  $A, B, C$  について、

$$\text{和の交換法則: } A + B = B + A$$

$$\text{和の結合法則: } (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$\text{積の結合法則: } (AB)C = A(BC)$$

$$\text{分配法則: } A(B + C) = AB + AC$$

$$\text{分配法則: } (A + B)C = AC + BC$$

は成り立つが(その証明は省略)、問 272(2) や問 273 で見たように、

$$\text{積の交換法則: } AB = BA$$

は必ずしも成り立たない(成り立つケースもあるが、成り立たないケースの方が圧倒的に多い)。

### 12.3 零行列

全ての成分が0であるような行列を 零行列 と呼ぶ。例えば、以下の行列は、ともに零行列である。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.11)$$

零行列は慣習的に  $O$  と表記する。

特に、零行列  $O$  が正方行列である場合は、同じ次数の任意の正方行列  $A$  について、

$$AO = OA = O \quad (12.12)$$

が成り立つ。証明はここでは行わないが、自明だろう。

零行列は、普通の数の演算における“0”と似たような立場の行列である。ただし、普通の数ならば、2乗して0になる数は0しかないが、行列だと、例えば

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるように、 $O$  でない行列どうしの積や累乗が  $O$  になることがある。

## 12.4 単位行列

行列について、行番号と列番号が等しいような成分を 対角成分 という。例えば式 (12.10) の行列  $B$  において、対角成分は (1,1) 成分である 2 と、(2,2) 成分である 1 の、2 つである。行列において、対角成分でない成分、つまり、行番号と列番号が違うような成分を、非対角成分 という。例えば式 (12.10) の行列  $B$  において、非対角成分は (2,1) 成分である 1 と、(1,2) 成分である 0 の、2 つである。

全ての対角成分が 1 で、かつ、全ての非対角成分が 0 であるような正方行列を、単位行列 (unit matrix) という。例えば、

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.13)$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.14)$$

等はいずれも単位行列である。このように、単位行列は様々な次数のものがある。 $n$  次正方行列であるような単位行列を  $n$  次単位行列と呼ぶ。式 (12.13) は 2 次単位行列であり、式 (12.14) は 3 次単位行列である。単位行列は、その次数を  $n$  とし、 $E_n$  と表すのが慣習である。ただし、添字  $n$  を省略して、単に  $E$  と書くことも多い\*2。

単位行列  $E$  は、同じ次数の\*3任意の正方行列  $A$  につ

いて次式を満たす：

$$AE = EA = A \quad (12.15)$$

証明はここではしないが、極めて簡単である。式 (12.15) は、普通の数 (実数や複素数) において、1 という数が、任意の数  $x$  について

$$x \times 1 = 1 \times x = x \quad (12.16)$$

となることによく似ている。つまり、単位行列は、普通の数の演算における“1”と似たような立場の行列である。

問 274 式 (12.10) の  $A$  について、式 (12.15) を確認せよ。

よくある質問 135  $n$  次単位行列  $E$  の定義を問われて、「 $n$  次正方行列  $A$  について  $AE = EA = A$  を満たすような  $n$  次正方行列  $E$ 」と答えたら不正解とされました。なぜ? ...  $n$  次正方行列  $A$  がもし、零行列なら、 $E$  はどんな  $n$  次正方行列であっても  $AE = EA = A$  は成り立ちますからね。

よくある質問 136 ならば、「零行列でないような  $n$  次正方行列  $A$  について  $AE = EA = A$  を満たすような  $n$  次正方行列  $E$ 」とすれば OK ですか? ... まだダメです。もしも、

$$A = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であれば、 $AE = EA = A$  が成り立ちますが、この  $E$  は単位行列ではありませんよね。

よくある質問 137 ではどうすればいいのですか? ... 「全ての  $n$  次正方行列  $A$  について  $AE = EA = A$  を満たすような  $n$  次正方行列  $E$ 」というふうに、「全ての」とか「任意の」をつければいいのです。あるいは、「対角要素が全て 1 で、非対角要素が全て 0 であるような  $n$  次正方行列」でも OK です。このように、どうってことのない概念も、例外や曖昧さを含まないように、慎重に考え抜かれて定義されているのです。

よくある質問 138 「対角要素が全て 1 で、非対角要素が全て 0 であるような行列を単位行列と呼ぶ」と答えなのに不正解にされました。なぜですか? ... 例えば

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

は君の定義を満たすけど単位行列ではありません。

## 12.5 2 次の行列式

正方行列については、その成分に関する、行列式 (determinant) という多項式が定義される。特に 2 次正方

\*2 単位行列を  $I_n$  とか  $I$  と表すことも多い。

\*3 次数が同じでなければそもそも  $AE$  とか  $EA$  という積ができない!

行列:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (12.17)$$

については、行列式「 $\det A$ 」を次式で定義する\*4:

$$\det A := ad - bc \quad (12.18)$$

よくある間違い 53 行列式を「行列を含む数式」と思い込む... それは間違い。行列式は、ひとつの正方行列の成分に関する、式(12.18)のような多項式のことである。ひとつの正方行列にひとつの行列式がある。

式(12.18)が意味を持つのは2次の正方行列だけである。3次以上の正方行列には、また違う定義がある。

注1: 正方行列でない行列には、行列式は定義されない。

注2:  $\det A$  は、 $\det(A)$  とか、 $|A|$  と書いてもよい。

注3: ただし  $\det A$  を  $|A|$  と書く場合は注意が必要。この記号は絶対値と同じに見えるが、意味的には絶対値と無関係である。実際、行列式  $|A|$  の値はマイナスになることもある。紛らわしいので、初心者はこの書き方は避ける方がよいだろう。

問 275 式(12.10)の行列  $A, B$  について、 $\det A$  と  $\det B$  をそれぞれ求めよ。

問 276 単位行列つまり式(12.13)の行列式を求めよ。

問 277 行列と行列式の違いを述べよ。

さて、行列式の幾何学的な意味を考察しよう。実は、

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (12.19)$$

の行列式  $\det A$  の絶対値は、

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \quad (12.20)$$

という2つの列ベクトルで張られる平行四辺形の面積  $S$  に等しい。すなわち、

$$S = |ad - bc| = |\det A| \quad (12.21)$$

である(注: この式の中の  $||$  は行列式ではなくスカラーの絶対値を表す)。その理由は P.160 式(11.28)から明らかである(式(11.28)では、この平行四辺形の半分の三角形の面積を  $S$  と書いたことに注意せよ)。しかし、念のため、ここでは別の観点でも確かめておこう。いま、

ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}$  をそれぞれ位置ベクトルとするような2次元平面上の点を  $A, B, C$  としよう。四角形  $OACB$  が、ここでいう「2つのベクトルで張られる平行四辺形」である。各点の座標は、以下の通りとする:

$O: (0, 0), A: (a, c), B: (b, d), C: (a + b, c + d)$

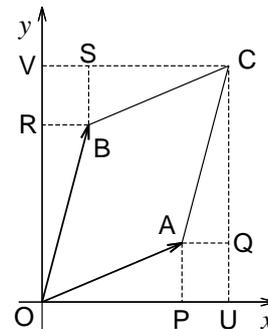


図 12.1 行列式の幾何学的意味の説明図

さて、点  $A, B, C$  は図 12.1 のように位置するとしよう。点  $C$  から  $x$  軸、 $y$  軸にそれぞれおろした垂線の足を点  $U$ 、点  $V$  とし、点  $A$  から  $x$  軸、点  $B$  から  $y$  軸にそれぞれおろした垂線の足を点  $P$ 、点  $R$  とする。点  $A$  から直線  $CU$ 、点  $B$  から直線  $CV$  にそれぞれおろした垂線の足を点  $Q$ 、点  $S$  とする。明らかに、三角形  $OAP$  と三角形  $CBS$  は合同であり、いずれも面積は  $ac/2$  である。明らかに、三角形  $OBR$  と三角形  $CAQ$  は合同であり、いずれも面積は  $bd/2$  である。明らかに、長方形  $PAQU$  と長方形  $SBRV$  は合同であり、いずれも面積は  $bc$  である。平行四辺形  $OACB$  は、長方形  $OUCV$  からこれらの図形を取り去ったものだから、その面積は、

$$\begin{aligned} S &= (a+b)(c+d) - 2(ac/2) - 2(bd/2) - 2bc \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

である。

上の結果は点  $A, B, C$  の位置に若干の制限をつけて導いたが、この制限を取り払うと、 $ad - bc$  の値がマイナスになることもある\*5。ただしそういう場合でも、 $|ad - bc|$  が  $S$  に等しいということは変わらずに正しい\*6。

問 278  $\mathbf{a} = (21, 8), \mathbf{b} = (19, 9)$  を2辺とする三角形の面積を求めよ。注: これを、高校数学でよく使う、

\*5 例えば点  $A$  と点  $B$  の位置を入れ替えてみると、同じ議論で  $S = bc - ad$  になる。

\*6  $ad - bc$  がマイナスになるのは、 $\mathbf{a}$  から  $\mathbf{b}$  に右ネジをまわすときに、ネジの進む方向が平面から下向き(君から遠ざかる方向)の場合である。

\*4 以前は高校数学でも行列式を扱っており、そのときは行列式は  $\Delta$  と書いた。しかし行列式を  $\Delta$  と書くのは大学では稀である。

$\sqrt{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2}$  という公式で解こうとすると大変な計算になる。

よくある質問 139  $S = |ad - bc|$  を高校で教えないのはなぜでしょう? ... 一部の高校や予備校では教えているようですが。

問 279 2 次正方行列  $A$  の, 第 1 行と第 2 行を入れ替えてできる行列を  $A'$  とする。次式を示せ\*7。

$$\det A' = -\det A \quad (12.22)$$

問 280 行列  $A, B$  を,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \quad (12.23)$$

とする。 $\det A, \det B, \det AB$  をそれぞれ計算して, 次式が成り立つことを確認せよ:

$$\det AB = (\det A)(\det B) \quad (12.24)$$

このように, 一般的に, 行列の積の行列式は, 各行列の行列式の積に等しい (これは 3 次以上の行列式についても成り立つことが証明できる)。

歴史的には, 行列式は, 行列そのものよりも早く発明 (発見) された。また, 行列式は英語で determinant というが, その中には行列 (matrix) という語は入っていない。そのことからわかるように, 行列と行列式は (互いによく関連しているものの), それぞれ独立した数学的な対象だと考えるほうが適切かもしれない。

なお, 行列式概念に世界で最初に到達したのは, 日本の和算家\*8である関孝和だと言われている。

## 12.6 逆行列

さて, 行列の足し算や引き算, 掛け算はわかった。では割り算はどうだろう? 行列では, 「割り算」を考えたかわりに, 「逆行列」というものを考える。

正方行列  $A$  について, ある行列  $B$  によって,

$$AB = BA = E \quad (12.25)$$

とできるとき,  $B$  を  $A$  の逆行列 (inverse matrix) と言って,  $A^{-1}$  とあらわす (定義)\*9。

問 281  $\det A$  が 0 でないような 2 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (12.26)$$

について, 以下の行列は逆行列であることを確認せよ\*10。

$$\frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (12.27)$$

この式 (12.27) は,  $\det A$  が 0 ならば分母が 0 になってしまうので, 計算できない。従って,  $\det A = 0$  ならば逆行列は存在しないのだ。逆行列は, いわば, 普通の数における逆数のような立場の行列である。しかし, 普通の数ならば, 0 でない数ならどんな数でも逆数を持つが, 行列の場合は, たとえ 0 でなくても逆行列を持たない行列がある。例えば, 以下の行列には, どんな行列を掛けても  $E$  にすることはできない (従って逆行列を持たない)。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.28)$$

$\det A \neq 0$  であるような正方行列, すなわち逆行列が存在するような行列を, 正則行列 (regular matrix) という。

注: 式 (12.27) を逆行列の定義であると思っている人がいるが, それはよくない。式 (12.27) は正方行列が 2 次のときにしか成り立たない。本来の式 (12.25) を使う定義の方が, ずっとシンプルで一般性が高い。定義はシンプルで一般的でなければならないのだ。

よくある質問 140 逆行列の定義を問われて「 $AB = BA = E$  となるような行列」と答えたら不正解にされました。なぜですか? ... 省略しすぎですね。数学では, 出てくる変数や文字をきちんと定義しなければなりません。

よくある質問 141 でも, 「正方行列  $A, B$ , 単位行列  $E$  について,  $AB = BA = E$  となるような行列」と答えたらまた不正解にされました。なぜですか? ... 君の答えでは  $A, B, E, AB, BA$  という 5 つの行列が出てきますが, そのうちのどれが「逆行列」なのかはっきりしないからです。

よくある質問 142 でも, 「正方行列  $A, B$ , 単位行列  $E$  について,  $AB = BA = E$  となるような  $B$ 」と答えたらまた不正解にされました。なぜですか? ... 逆行列は, 単体で成り立つ概念ではなく, 別の行列との関係で成り立つ概念です。君の答

\*7 同様に, 列を入れ替えた行列の行列式も  $-\det A$  となる。

\*8 日本の伝統的な数学を和算 (わさん) という。

\*9 逆行列の定義式 (12.25) は,  $AB = E$  と  $BA = E$  という 2 つの条件を含んでいるが, 実は, このうち片方が成り立てば, もう片方は自動的に成り立つことが知られている。その証明は大学の数学に譲る。

\*10 3 次以上の正方行列についても, これと同様の式が「余因子行列」というもので構成できる。

案では、「となるような  $B$  を  $A$  の逆行列という」とまで答えれば正解です。

よくある質問 143 なんか揚げ足取られている気がします。  
... 論理というのは緻密なものなのです。

問 282 次の行列について、逆行列をそれぞれ求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

問 283  $A, B$  を任意の正則行列とする。

- (1)  $AB$  は正則行列であることを示せ。
- (2) 次式を示せ:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (12.29)$$

問 284 2 次の正則行列  $A$  について、次式が成り立つことを示せ:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad (12.30)$$

## 12.7 連立一次方程式

例として、二元連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad (12.31)$$

を考えよう。これは、以下のように書くこともできる:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (12.32)$$

この左辺の行列を  $A$  と書くと、式 (12.27) より、

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \times 1 - 1 \times 1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

である。さて、

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (12.33)$$

なので、この両辺に左から  $A^{-1}$  を掛けると、

$$A^{-1}A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (12.34)$$

となるが、 $A^{-1}A = E$  なので、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.35)$$

となる (連立方程式が解けた!)

一般に、二元連立一次方程式は、実数  $a, b, c, d, p, q$  を使って以下のように書ける:

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad (12.36)$$

これは、

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (12.37)$$

とすると、以下のように書くことができる:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (12.38)$$

もし  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  が存在すれば、それを左から掛けて、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (12.39)$$

と、解くことができる。このように、連立一次方程式は、行列とベクトルの掛け算で書き表して、その係数で構成される行列 (係数行列という。ここでは  $A$ ) の逆行列を求め、それを左から掛けることで、解くことができる<sup>\*11</sup>。

ところが、先に見たように、 $A$  の行列式  $\det A$  が 0 の場合は、逆行列  $A^{-1}$  は存在しない。そのような場合はどうなるのだろうか? 例として以下の方程式を考えよう:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \quad (12.40)$$

これは次式と同じである:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (12.41)$$

ところが、この係数行列  $A$  について、

$$\det A = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$$

だから、 $A^{-1}$  は定義できない。仕方ないからもとの方程式 (12.40) に戻って考えると、第一式 ( $x + 2y = 1$ ) を 2 倍したものが、第二式 ( $2x + 4y = 2$ ) と同じであること

<sup>\*11</sup> 無論、そんなことをしないで、普通に変数をひとつずつ消していっても解けるのだが、数学にはいろんなアプローチがあって、それぞれ長所や短所があるのだ。

がわかる。つまり、この連立方程式は、本質的には1つの式：

$$x + 2y = 1 \quad (12.42)$$

に過ぎない。変数が2つあって、式は1つだけなのだから、この方程式は一意的には解けない。解は、例えば  $(x, y) = (1, 0)$  とか  $(0, 1/2)$  とか、無数にたくさんある。こういうケースを、不定 という。

では、次のような場合はどうだろうか？

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \quad (12.43)$$

これも、係数行列の行列式は0になる。この場合は、「第一式  $\times 2$  - 第二式」を考えると、

$$0 = -1 \quad (12.44)$$

となってしまう。これは絶対に成り立たない。 $x, y$  がどのような値をとろうが、成立させることができない方程式である。つまり、解は存在しない。このようなケースを、不能 という。

## 12.8 固有値と固有ベクトル

正方行列  $A$  に対して、ある実数  $\lambda$  と、ある (0 でない) ベクトル  $\mathbf{x}$  によって、

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (12.45)$$

となるとき、 $\mathbf{x}$  を  $A$  の 固有ベクトル (eigenvector) といい、 $\lambda$  を  $A$  の 固有値 (eigenvalue) という (定義)。これは、行列の応用において、非常に重要な概念である。

注：なぜか式 (12.45) を  $\mathbf{x}A = \mathbf{x}\lambda$  のように書く人がいる。特殊な状況設定をすればこのように書くことも無いではないのだが (それを今の段階で説明すると君は絶対に混乱する)、そんなややこしいことをしないで、素直に式 (12.45) の形で覚えて欲しい。数と数の積ならどちらを先に書いてもかまわないのだが、行列やベクトルがからむ「積」は、書き方や順序を不用意に変えてはならないのだ。

よくある質問 144 固有ベクトルの定義で、なぜ  $\mathbf{x}$  が 0 でないという条件がついているのですか？ ... もし  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  だと、 $A$  がどんな正方行列であろうが、また、 $\lambda$  がどんなスカラーであろうが、 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  が成り立ちちゃうからです。そういう「当たり前」の場合を、固有ベクトルとはみなさない約束なのです。

例 12.6 以下の行列の固有値と固有ベクトルを求めて

みよう：

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.46)$$

固有値を  $\lambda$ 、固有ベクトルを  $\mathbf{x}$  とすると、定義から、 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  が成り立つ。つまり、

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (12.47)$$

である。ここで、 $\lambda\mathbf{x} = \lambda E\mathbf{x}$  と考えれば、上の式は、

$$A\mathbf{x} - \lambda E\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (12.48)$$

すなわち、

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (12.49)$$

となる。すなわち、

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 4 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.50)$$

となる。さて、もしこの係数行列  $A - \lambda E$  に逆行列が存在すると仮定すれば、上の式の両辺に左から  $(A - \lambda E)^{-1}$  をかけて、

$$\mathbf{x} = (A - \lambda E)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.51)$$

となる。 $(A - \lambda E)^{-1}$  がどんな行列であれ、この右辺は零ベクトルになるしかない。すなわち、

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (12.52)$$

となってしまう。これは、固有ベクトルの定義に反している。従って、係数行列  $A - \lambda E$  に逆行列が存在してはならない\*12。従って、その行列式は0にならねばならない。すなわち、

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (12.53)$$

である。式 (12.53) を行列  $A$  の 特性方程式 という (固有方程式ともいう)。これを解くと、

$$\begin{aligned} (5 - \lambda)(1 - \lambda) - 3 \times 4 \\ = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = (\lambda + 1)(\lambda - 7) = 0 \end{aligned}$$

となり、 $\lambda = -1$  と、 $\lambda = 7$  となる。これで固有値が求まった。

では固有ベクトルを求めよう。まず、 $\lambda = -1$  のとき、上の連立一次方程式 (12.50) は、

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.54)$$

\*12 この論理は背理法である。

となる。明らかに、この方程式は不定であり、これを満たす解は無数にあるが、代表的に、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (12.55)$$

としよう。これが、固有ベクトルのひとつである。

次に、 $\lambda = 7$  のとき、連立一次方程式 (12.49) は、

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.56)$$

となる。この方程式も不定であり、これを満たす解は無数にあるが、代表的に、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (12.57)$$

としよう。これも、固有ベクトルのひとつである。以上より、行列  $A$  について、

$$\begin{cases} \text{固有値が } -1 \text{ のとき, 固有ベクトル } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \text{固有値が } 7 \text{ のとき, 固有ベクトル } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

である。(例おわり)

このように、固有値と固有ベクトルは、互いに対になっている。一般に、固有値・固有ベクトルの対は、高々、その行列の次数の数だけ存在する (中にはそれに足りない行列もあるが)。

問 285 以下の行列について、固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (12.58)$$

## 12.9 対角化

先の例 12.6(P.177) で、

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.59)$$

という行列  $A$  について、

$$\begin{cases} \text{固有値が } -1 \text{ のとき, 固有ベクトル } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \text{固有値が } 7 \text{ のとき, 固有ベクトル } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

であることが示された。すなわち、

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -1 \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 7 \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (12.60)$$

である。これらをひとまとめにすると、

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

とできる\*13。すると、

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad (12.61)$$

となることがわかる。ここで、2つの固有ベクトルを列ベクトルとして並べてできる行列を  $P$  とする。つまり、

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (12.62)$$

とすると、式 (12.61) は、

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad (12.63)$$

である。このように、与えられた行列 (ここでは  $A$ ) に対して、ある行列  $P$  によって、 $P^{-1}AP$  とすることで、非対角成分が 0 の行列 (そのような行列を対角行列という) にすることを、**対角化** という。上の説明でわかるように、ある行列  $A$  を対角化するには、次のような手順をとる：

- $A$  の特性方程式を立てる。
- それを解いて、 $A$  の固有値を求める。
- 各固有値に対応する固有ベクトルを求める。
- $A$  の固有ベクトルを列ベクトルとして並べてできる行列を  $P$  とおく (慣習的には、固有値の大きい順に)。
- すると、 $P^{-1}AP$  は対角行列になる。その対角行列の対角成分 (行番号と列番号が同じ成分) には、 $A$  の固有値が並ぶ。

\*13 固有ベクトルの並べ順を左右入れ替えて、

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

としてもよい。その場合、式 (12.63) に相当する式は、

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ として, } Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

問 286 以下の行列を対角化せよ:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \quad (12.64)$$

さて, ある 2 次正方行列  $A$  が, 行列  $P$  によって対角化されるとき,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (12.65)$$

となる ( $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  は  $A$  の固有値である)。両辺に, 左から  $P$  を, 右から  $P^{-1}$  をそれぞれ掛けると,

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^{-1} \quad (12.66)$$

となる。従って,  $A$  の行列式は,

$$\begin{aligned} \det A &= \det \left( P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^{-1} \right) = \det P \det \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \det P^{-1} \\ &= \det P \det P^{-1} \det \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned} \quad (12.67)$$

となる (ここで式 (12.24), 式 (12.30) を使った)。つまり, 行列式は, 固有値の積に等しい (定理)。

## 12.10 行列の応用: マルコフ過程

ある国の森林 100 km<sup>2</sup> が山火事で荒廃して裸地・森林のモザイク状になった。その後を 1 年間調査した結果, 次のようなことがわかった: 1) 調査した裸地のうち, 8 割は裸地のままで, 2 割は植生が繁って森林になった (1 年間でそんなに早く森林が回復するわけがない! というツツコミは勘弁してほしい)。2) 調査した森林のうち, 1 割が再び山火事によって裸地になり, 9 割は森林のままだった。このような変化がずっと続くと仮定しよう。  $n$  年後の裸地 (bare)・森林 (forest) のそれぞれの面積を  $b_n$  km<sup>2</sup>,  $f_n$  km<sup>2</sup> とすると,

$$\begin{bmatrix} b_{n+1} \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ f_n \end{bmatrix} \quad (12.68)$$

と書ける。 ${}^t(b_n, f_n)$  を  $\mathbf{c}_n$  とおき, 上の式の右辺の係数行列を  $A$  とすれば, 式 (12.68) は次式のように書ける:

$$\mathbf{c}_{n+1} = A \mathbf{c}_n \quad (12.69)$$

問 287

- (1) この行列  $A$  を対角化せよ。
- (2)  $\mathbf{c}_n = A^n \mathbf{c}_0$  となることを示せ ( $\mathbf{c}_0$  は現在の状態)。

- (3) 対角化の結果を用いて,  $A^n$  を計算せよ。(ヒント:  $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ )
- (4) 現状で裸地が 80 km<sup>2</sup>, 森林が 20 km<sup>2</sup> とする。3 年後のそれぞれの面積を予想せよ。
- (5) 長い将来 ( $n \rightarrow \infty$ ), 森林と裸地はそれぞれどのくらいの面積になると予想されるか?

このように, 時間的に変化する現象を, 複数の状態 (上では森林と裸地) の混在として表現し, さらにその比率が, その瞬間の比率に依存して変化していくとみなす考え方を, 「マルコフ過程」という。上の話に草原と農地を含めて拡張したければ, ベクトル  $\mathbf{c}_n$  を 4 次元の数ベクトルとし, 係数行列  $A$  (マルコフ過程の遷移行列と呼ばれる) を 4 次の正方行列にすればよい。

よくある質問 145 行列って何の役に立つのですか? ... むっちゃ役立ちます。例えば問 287 のマルコフ過程は, 生態学, 市場予測 (経済学), 気象予測, 作物収穫予測などで使われます。2 次正方行列よりももっと大きな行列にも同様の理論が成り立ち, それは, 多くの変数が関与する統計学 (多変量解析学) や, 電子や原子の状態を解析する量子力学・量子化学, ものの強度や変形を解析する材料力学・構造力学等, 多分野で中心的な役割をする理論です (特に対称行列と直交行列)。

## 問題の解答

答 272

$$(1) 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

従って,  $AB \neq BA$ 。

$$(3) (AB)C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

従って,  $(AB)C = A(BC)$

$$(4) A(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

従って,  $A(B+C) = AB + AC$

答 273 略。

答 274 略 (各自計算せよ)。

答 275

$$\det A = 1 \times 1 - 2 \times (-1) = 3$$

$$\det B = 2 \times 1 - 0 \times 1 = 2$$

答 276  $\det E = 1$

答 277 両者は全く違う。行列は、数を格子状に並べたもの。行列を構成する個々の数を行列の成分という。行列式は行列の成分に関する、ある種の多項式。

答 278 a と b で張られる平行四辺形の面積は、

$$\det \begin{bmatrix} 21 & 19 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = 21 \times 9 - 19 \times 8 = 37$$

この平行四辺形の半分が a と b を 2 辺とする三角形だから、この三角形の面積は、 $37/2$

答 279 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

とすると、 $\det A = ad - bc$ 。一方、A の第 1 行と第 2 行を入れ替えた行列  $A'$  は次のようになる、

$$A' = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

この行列式は、 $\det A' = cb - da = -(ad - bc)$  となる。これは  $-\det A$  に等しい。

答 280

$$\det AB = \det \begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix}$$

$$= (ap + br)(cq + ds) - (aq + bs)(cp + dr)$$

$$= acpq + adps + bcqr + bdrs$$

$$- (acpq + adqr + bcps + bdrs)$$

$$= adps + bcqr - adqr - bcps$$

$$(\det A)(\det B) = (ad - bc)(ps - qr)$$

$$= adps + bcqr - adqr - bcps$$

従って、 $\det AB = (\det A)(\det B)$

答 281 式 (12.27) の行列を B と置く。

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ab \\ cd - cd & ad - bc \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

( $BA = E$  となることはここでは省略。各自、確かめよ) 従って、定義より、行列 B は A の逆行列である。

答 282

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

答 283

- (1) 式 (12.24) より、 $\det AB = (\det A)(\det B)$ 。ここで、A, B はともに正則行列なので、 $\det A \neq 0$  かつ  $\det B \neq 0$  である。従って、 $(\det A)(\det B) \neq 0$ 。従って、 $\det AB \neq 0$ 。従って、AB は正則行列。
- (2)  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$ 。従って、 $B^{-1}A^{-1}$  は AB の逆行列である。

答 284  $AA^{-1} = E$  だから、 $\det AA^{-1} = \det E = 1$  である。一方、 $\det AA^{-1} = (\det A)(\det A^{-1})$ 。これらの 2 つの式を組み合わせると、 $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ 。この両辺を  $\det A$  で割ると、 $\det A^{-1} = 1/\det A$ 。

答 285 この行列を A とすると、その特性方程式は、式 (12.53) より、

$$\det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 \times 2$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

となる。これを満たすのは、 $\lambda = 1$  と、 $\lambda = 4$  である。これが固有値である。では固有ベクトルを求めよう。まず、 $\lambda = 1$  のとき、

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.70)$$

となる。これを満たす解は無数にあるが、代表的に、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (12.71)$$

としよう。これが、固有ベクトルのひとつである。

次に,  $\lambda = 4$  のとき,

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.72)$$

となる。これを満たす解も無数にあるが、代表的に,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (12.73)$$

としよう。これも、固有ベクトルのひとつである。以上より、行列  $A$  について、

$$\begin{cases} \text{固有値が 1 のとき, 固有ベクトル} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \text{固有値が 4 のとき, 固有ベクトル} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

である\*14。

答 286 (略解: 本来は固有値と固有ベクトルを求める過程も書くこと。)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (12.74)$$

または、以下のようにしてもよい:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (12.75)$$

答 287

(1) (略解)  $\lambda$  を固有値とすると,  $A$  の特性方程式は

$$\lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.7) = 0$$

となり,  $\lambda = 1, 0.7$ 。それぞれに対応する固有ベクトルは、代表的に,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

である。これを並べた行列を  $P$  とすると,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (12.76)$$

これによって,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix} \quad (12.77)$$

(2) 略。

(3)

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)^n &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP \\ &= P^{-1}AA\cdots AP \\ &= P^{-1}A^nP \end{aligned}$$

となる。一方、前小問より、

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7^n \end{bmatrix} \quad (12.78)$$

従って、

$$P^{-1}A^nP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7^n \end{bmatrix} \quad (12.79)$$

従って、

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7^n \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \cdots = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + 2 \times 0.7^n & 1 - 0.7^n \\ 2 - 2 \times 0.7^n & 2 + 0.7^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(4)  $n = 3$  とすると、

$$\begin{bmatrix} b_3 \\ f_3 \end{bmatrix} = A^3 \begin{bmatrix} b_0 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.562 & 0.219 \\ 0.438 & 0.781 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49.34 \\ 50.66 \end{bmatrix}$$

である。従って、裸地と森林がほぼ同面積 (50 km<sup>2</sup> 程度) になると予想される。

(5) (3) の答えで  $n \rightarrow \infty$  とすると,  $A^n$  は

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad (12.80)$$

に収束する。従って、

$$\begin{bmatrix} b_n \\ f_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100/3 \\ 200/3 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 33 \\ 67 \end{bmatrix}$$

従って、裸地 33 km<sup>2</sup>、森林 67 km<sup>2</sup> と予想される。

\*14 ただし、固有ベクトルはこれらを何倍かしたもの (0 倍以外) でもかまわない。



## 第13章

# 論理・集合・記号

ここで学ぶ内容の多くは、ある意味、直感的に「当たり前」のことである。しかし、当たり前のことが、数学では、注意深く選ばれ、注意深く定義されていることに注意してほしい。これらの「当たり前」のことを土台にして数学が構築され、それを土台にして、現代科学が構築されているのだ。

### 13.1 条件と命題

例えば以下のようなものを、条件 (condition) と呼ぶ：

- 整数  $n$  は 4 の倍数である。
- 整数  $n$  は偶数である。
- ある人は筑波大生である。<sup>\*1</sup>

条件は、正しいとか正しくないとかの議論、つまり真偽の議論の対象にはならない。ある人は筑波大生である、と言われても、「ふーん、それで?」と思うだけだ。ところが、条件を適当に組み合わせれば、真偽が問われる発言になる。それを 命題 (proposition) という。

「命題」は、多くの場合、2つの条件  $p, q$  について、「 $p$  ならば  $q$  である」という形で表現できる。

例 13.1 • 整数  $n$  が 4 の倍数ならば  $n$  は偶数である。  
という命題は、

条件  $p$ : 「整数  $n$  は 4 の倍数である」

条件  $q$ : 「整数  $n$  は偶数である」

の 2 つの条件について、「 $p$  ならば  $q$  である」という形の主張になっている。ちなみに、この命題は真である。(例おわり)

命題は、一見すると「 $p$  ならば  $q$  である」という形にはなっていないものも多い。そのような場合は、適宜、言葉も補って読み替える必要がある。

例 13.2 • 4 の倍数は偶数である。

という命題は、一見すると「 $p$  ならば  $q$  である」という形にはなっていないが、実は上の例 13.1 で考えた、

- 整数  $n$  が 4 の倍数ならば  $n$  は偶数である。

と同じことである。(例おわり)

例 13.3 • 筑波大の学生は優秀である。

という命題は、

- ある人が筑波大の学生ならば、その人は優秀である。

と同じことである。ちなみに、この命題が真か偽かは、判定が難しい。そもそも「優秀」とは何かという議論や、それ以上に、君の努力にかかっているのだろう！(例おわり)

さて、数学では、命題の「ならば～～である」を二重線の矢印“ $\implies$ ”で表現することになっている。

例 13.4 上の例 13.1, 例 13.3 の命題は、それぞれ以下のように表現される：

- 整数  $n$  が 4 の倍数  $\implies n$  は偶数
- ある人が筑波大の学生  $\implies$  その人は優秀

(例おわり)

### 13.2 条件の否定

次に、条件の「否定」というものを考える。ある条件の否定とは、「その条件が成り立たないこと」という条件である。例えば、条件「整数  $n$  は偶数」の否定は、「整数  $n$  は偶数でない」もしくは「整数  $n$  は奇数」である。一般に、条件  $p$  の否定を  $\bar{p}$  と書く。

例 13.5 「実数  $x$  は正である」という条件の否定は「実数  $x$  は 0 以下である」となる。(例おわり)

<sup>\*1</sup> ここで言う「ある人」とは、特定の人をさしているのではない。誰でもいいから筑波大生のひとりを想定するのだ。

例 13.6 「ある人が筑波大生である」という条件の否定は「ある人が筑波大生ではない」となる。(例おわり)

ある条件と、その否定は、その組み合わせで論理的にすべての場合を含まねばならない。つまり、その条件とその否定のどちらにもあてはまらない、という場合があってはならない。

例 13.7 「ある人が筑波大生である」という条件について、「ある人が高校生である」というのは否定にならない。確かに高校生は同時に筑波大生にはなれないから、「高校生である」と言った時点でその人が筑波大生でないことは確定する。従って、「ある人が高校生である」というのは「ある人が筑波大生である」の否定に含まれる。しかし、それで全ての場合を言い尽くしているわけではない。高校生でなくてしかも筑波大生でもないという人は世の中にたくさんいるからだ。(例おわり)

このことから、ある条件の否定の否定は、もとの条件に戻るということが、直感的にわかるだろう。

### 13.3 「かつ」と「または」

複数の条件を、「かつ」とか「または」という語でつなぐと、新しいひとつの条件ができる。

例 13.8 つくば市が、市の予算を使って、市の子供たちのために素晴らしいイベントを企画するでしょう。その参加者の条件は、例えば、「つくば市民で、かつ、13 歳未満である」というようなものになるだろう。これは「つくば市民である」と「13 歳未満である」という 2 つの条件を「かつ」でつないだものである。

この条件にクレームがつき、「税金の大部分は大人が払っているんだから、つくば市の大人が参加してもいいじゃないか」という意見と、「けち臭いこと言わないで、つくば市以外の子供にも来て貰ってもいいじゃないか」という意見が大勢を占めると、参加者の条件は「つくば市民または、13 歳未満である」というようなものになるかもしれない。ここで注意。「つくば市民かつ 13 歳未満」である人も、この条件を満たすのだ。そもそも「または」は、いくつかの条件のうち一部を満たせば OK ということであり、全部を満たすのでももちろん OK なのだ。(例おわり)

複数の条件が「かつ」でつながれたような条件の否定は、それぞれの条件の否定を「または」でつないだもの

になる。すなわち、条件  $p$ 、条件  $q$  について、

$$\overline{p \text{ かつ } q} = \bar{p} \text{ または } \bar{q} \quad (13.1)$$

である。

例 13.9 「つくば市民で、かつ、13 歳未満である」の否定は、「つくば市民でない、または 13 歳以上である」という条件になる。(例おわり)

複数の条件が「または」でつながれたような条件の否定は、それぞれの条件の否定を「かつ」でつないだものになる。すなわち、条件  $p$ 、条件  $q$  について、

$$\overline{p \text{ または } q} = \bar{p} \text{ かつ } \bar{q} \quad (13.2)$$

である。

例 13.10 「つくば市民または、13 歳未満である」の否定は、「つくば市民でない、かつ、13 歳以上である」という条件になる。(例おわり)

例 13.11 「整数  $n, m$  はともに偶数である」という条件は、「整数  $n$  は偶数であり、かつ、整数  $m$  は偶数である」という条件と同じである。したがって、その否定は、「整数  $n$  は奇数であるか、または、整数  $m$  は奇数である」、すなわち、「整数  $n, m$  のうち少なくともどちらかは奇数である」となる。(例おわり)

問 288 以下の条件の否定を述べよ：

- (1) 実数  $x$  は負である。
- (2) 実数  $x, y$  のうち、すくなくとも一方は正である。
- (3) 実数  $x, y$  は、両方とも正である。

### 13.4 逆・裏・対偶

命題  $p \implies q$  について、以下のように 逆、裏、対偶 という命題を考えることができる：

$q \implies p$  を「逆」

$\bar{p} \implies \bar{q}$  を「裏」

$\bar{q} \implies \bar{p}$  を「対偶」

と呼ぶ。

例 13.12 ● 整数  $n$  が 4 の倍数  $\implies n$  は偶数  
について、逆、裏、対偶は、以下ようになる：

- 逆： 整数  $n$  が偶数であれば、整数  $n$  は 4 の倍数である。
- 裏： 整数  $n$  が 4 の倍数でなければ、整数  $n$  は偶数

でない。

- 対偶：整数  $n$  が偶数でなければ、整数  $n$  は 4 の倍数でない。

(例おわり)

この例では、命題とその対偶は真だが、逆と裏は偽である。実際、 $n = 2$  は偶数だが 4 の倍数ではない。従って「逆」は偽である(反例)。 $n = 2$  は 4 の倍数ではないが、偶数である。従って「裏」も偽である(反例)。このように、一般に、ある命題の真偽と、その逆や裏の真偽は、必ずしも一致しない。

しかし、命題とその対偶は必ず真偽が一致する。従って、「対偶」は、命題をそのまま言い換えたものとも言える。

例 13.13 ● 筑波大の学生は優秀である。

という命題について、逆、裏、対偶は、以下のようになる：

- 逆：優秀であれば筑波大の学生である。
- 裏：筑波大の学生でなければ優秀でない。
- 対偶：優秀でなければ筑波大の学生でない。

(例おわり)

問 289 以下の命題の逆、裏、対偶をそれぞれ述べよ(真偽は問わない)。

- (1)  $x = 0$  ならば  $x^2 = 0$  である。
- (2)  $x > 0$  ならば  $x^2 > 0$  である。
- (3) 強いものは勝つ。

問 290 以下のことわざ・名言の対偶をそれぞれ述べよ(真偽は問わない。なお、(3) は映画監督の宮崎駿の言葉)。

- (1) 良薬は口に苦し。
- (2) 能ある鷹は爪を隠す。
- (3) 大事な事はめんどくさいものである。

## 13.5 命題の否定

ある命題が偽であることを示す、つまり命題を否定するにはどうすればいいだろうか？ 一般に、命題「 $p$  ならば  $q$  である」の否定は、「 $p$  であるにもかかわらず  $q$  でない場合が(必ず)存在する」である。

例 13.14 ● 筑波大の学生は優秀である。  
という命題の否定はなんだろう？

- 筑波大には優秀でない学生もいる。
- 筑波大生の少なくとも 1 人は優秀でない。

などである。(例おわり)

簡単なようだが、これを間違える人が、とても多い。誤答の例を挙げよう：

- (誤答 A) 筑波大の学生は優秀でない。
- (誤答 B) 筑波大には優秀な学生はいない
- (誤答 C) 筑波大の学生は優秀であるとは限らない。

命題の否定の否定は、もとの命題に戻らなければならないのだ。誤答 A と誤答 B(これらはともに同じ命題)をもういちど否定すると、

- 筑波大には優秀な学生がいる。

となってしまうが、これは当初の「筑波大の学生は優秀である」よりもずいぶん弱い命題になっている。つまり、誤答 A と誤答 B は、あまりに否定しすぎたのだ。優秀でない人がひとりでもいれば、「筑波大の学生は優秀である」という命題は否定されるのであり、すべての筑波大生について「優秀でない」という烙印を押す必要は無かったのだ。

誤答 C は、実際にも筑波大の学生全員が優秀であっても成り立つ命題である。「筑波大の学生は優秀である」という命題について「そうではないかもしれない」と言っているだけで、「そうではない」と言いきって(否定して)はいない。「どっちとも言い切れないように思う」「判断材料が足りない」「ちゃんと調べるべきだ」などのニュアンスを含むが、結局は何も言っていない、玉虫色の命題だ。なので、科学の世界では「～とは限らない」は禁句!

「すべての... は... である」とか、「どんな... も... である」という命題の否定は、「... でないような... も存在する」である。

例 13.15 「すべての鳥は飛べる」とか「どんな鳥も飛べる」の否定は、「飛べない鳥も存在する」である。(例おわり)

一方、「 $\sim\sim$ であるような...が存在する」の否定は、「どんな...も $\sim\sim$ でない」となる。

例 13.16 「白雪姫」での鏡の発言：

- 王妃よりも美しい人が存在する。

の否定は、以下のようになる。

- どんな人も、王妃より美しくはない。

(例おわり)

結論が否定形になるような命題は、気をつけないと曖昧になる。

例 13.17 ● すべての関西人は納豆好きではない。  
という命題は、

- 『すべての関西人は納豆好き』ではない。
- 『すべての関西人』は『納豆好きではない』。

というふうに、2通りに解釈できる。前者は、納豆好きの関西人がいる可能性も残す「部分否定」だが、後者は、関西人に納豆好きはいないという「全否定」である。このような、2通りに解釈ができる表現は誤解やトラブルの元なのでダメ！「すべての...は $\sim\sim$ ではない」という表現は危険なので、数学だけでなく、どんな場所でも使わないようにしよう。(例おわり)

例 13.18 ● 偶数ならば4の倍数でない。  
という命題は、

- 偶数なら『4の倍数でない』。
- 『偶数ならば4の倍数』でない。

というふうに、2通りに解釈できる。前者は、偶数であるというだけで無条件で「4の倍数でない」と言える、という意味であり、これは偽だ。例えば8は偶数だが4の倍数でもある。後者は、「偶数ならば4の倍数」という命題は偽である、すなわち、偶数であっても4の倍数でないことがある、という意味であり、これは真である。(例おわり)

問 291 以下の「」内で示された命題の、否定を述べよ。真偽は問わない。「 $\sim\sim$ わけではない」「 $\sim\sim$ とは限らない」という答えはダメ。

- (1) 春になると、雪が融ける。

- (2) 筑波大に入れば、素晴らしい将来が約束される。
- (3) どんな数も、2乗したら0以上になる。
- (4) 2乗したら負になるような数は存在しない。

問 292 命題「筑波大生は、みな、サッカーがうまい。」の否定は次のうちどれか？正解は1つとは限らない。

- (1) 筑波大生は、みな、サッカーが下手。
- (2) 筑波大以外の学生は、サッカーが下手。
- (3) 筑波大以外の学生は、サッカーがうまい。
- (4) 筑波大以外にもサッカーがうまい学生はいる。
- (5) 筑波大生の何人かはサッカーがうまい。
- (6) 筑波大にはサッカーの下手な学生がいる。
- (7) 筑波大にはサッカーのうまい学生がいる。
- (8) 筑波大生のほとんどはサッカーが下手。
- (9) 筑波大生は、みな、サッカーがうまいとは限らない。

ある命題が偽であることを証明する場合、反例を挙げれば済むことが多い。

例 13.19 「すべての鳥は飛べる」の否定は「飛べない鳥もいる」なので、反例として、実際に飛べない鳥の具体例を挙げればよい。どんな鳥だって生まれたばかりのヒナは飛べないし、ニュージーランドのキウィは成鳥でも飛べない。そういう例をひとつでも挙げることができれば、「すべての鳥は飛べる」という主張は粉砕されるのだ。(例おわり)

しかし、反例を挙げるという作戦が通用しない命題もある。

例 13.20 「宇宙人は存在する」というような命題が偽であると証明するのは難しい。これは反例で示すことはできない。宇宙人が存在することを示すには、どこから一人の宇宙人を連れてくればいいのか、存在しないことを示すには、広大な宇宙のどこにも宇宙人が存在しないことを示さねばならない。(例おわり)

問 293 命題「どんな実数も、2乗すれば正(0より大)になる」が偽であることを、反例で証明せよ。

## 13.6 必要条件・十分条件

さて、いま、命題

$$p \implies q \quad (13.3)$$

が成り立つ(真である)としよう。このとき、条件  $q$  が成り立つにはとりえず条件  $p$  が成り立てば十分なので、条件  $p$  は条件  $q$  の 十分条件 と言う。

一方、条件  $p$  が成り立つなら条件  $q$  は必ず成り立つ。この対偶は、「 $q$  が成り立たなければ  $p$  は成り立たない」となる(ここでは  $p$  が原因で  $q$  が結果、みたいな因果関係は忘れて考えている)。つまり、 $q$  が成り立つということは、 $p$  が成り立つためには必ずクリアしなければならない条件である。そこで、条件  $q$  は条件  $p$  の 必要条件 という。

簡単に言うと、二重線矢印“ $\implies$ ”の根元に来るのが十分条件で、先に来るのが必要条件である。

「 $p$  ならば  $q$ 」と、その逆、すなわち「 $q$  ならば  $p$ 」が、ともに成り立つ場合、 $p$  は  $q$  の十分条件でもあり、必要条件でもある。このような場合、 $p$  は  $q$  の 必要十分条件 である、といい、以下のように表現する：

$$p \iff q \quad (13.4)$$

$p$  が  $q$  の必要十分条件であれば  $q$  は  $p$  の必要十分条件になるので、 $p$  と  $q$  は実質的に同じ条件である。そこで、 $p$  と  $q$  は 同値 である、ともいう。

問 294 以下の条件  $p, q$  について、 $p$  は  $q$  の必要条件か、十分条件か、必要十分条件か、そのいずれでもないか、述べよ。

$p$ : 実数  $x$  について、 $x^2 = 1$  である。

$q$ : 実数  $x$  は 1 に等しい。

問 295 以下の条件  $p, q$  について、 $p$  は  $q$  の必要条件か、十分条件か、必要十分条件か、そのいずれでもないか、述べよ。

$p$ : 実数  $x$  について、 $x^2 = 1$  である。

$q$ : 実数  $x$  は  $-2$  より大きい。

ところで、日本語の表現として、「 $A$  は  $B$  である」と言うときと、「 $A$  とは  $B$  である」と言うときの違いを考えよう。

例 13.21 「人間は動物である」と「人間とは動物であ

る」は意味が違う。前者は正しく、後者は誤り。前者は「(人間以外の動物もいるかもしれないがともかく)人間は動物の一種である」という意味だが、後者は「人間と動物は同じである」という意味である。(例おわり)

このように、「 $A$  は  $B$  である」は、多くの場合、「 $A$  ならば  $B$  である」と同じ意味である。すなわち  $B$  は  $A$  の必要条件である。一方、「 $A$  とは  $B$  である」と言うときは  $A$  と  $B$  が同値(互いに必要十分条件)である。

日常的・直感的な話ならば、これらの違いはあまり問題にならないが、話が込み入ってくると、この違いが曖昧になり、論理が崩れることがある。また、文学的・修辭的・比喩的な強調表現として例えば「人生とは旅である」「教育とは愛である」のようなものは、論理操作に耐えるような命題ではないので、気をつける必要がある。

授業や試験でよく出てくる「 $\sim$ とは何か?」という問は、断片的な必要条件や、文学的・比喩的な表現を問うのではなく、「 $\sim$ 」を過不足なく説明するもの、つまり「 $\sim$ 」の必要十分条件で、なおかつ「 $\sim$ 」よりもわかりやすいものを問う。それは多くの場合、「 $\sim$ 」の定義である。

例 13.22 人生とは何か? 人が生まれてから死ぬまでの間のこと。(例おわり)

例 13.23 ヘリウムとは何か? 「元素の一種である」というのは良い答えではない。「元素の一種である」ような存在は、ヘリウム以外にもたくさんある。(例おわり)

定義の中で使われる言葉や概念は、自明なものか、もしくは既に定義されたものでなければならない。よくある間違いは、「 $\sim$ 」の定義に「 $\sim$ 」自体を使ってしまうことである(循環論法)。

例 13.24 無理数とは何か? 「有理数でない実数」というのは良い答えではない。こう言うためには、無理数を含めた「実数」を定義する必要があるからである。(例おわり)

例 13.25 微分係数とは何か? 「接線の傾き」というのは良い答えではない。こう言うためには、「接線」を定義する必要があるが、それには(視覚的な直感に訴えない限り)微分係数の概念が必要だからである。(例おわり)

こういうことを言い始めたら、きりが無いように思え

る。そう、学問はそのようなものなのだ。「～とは何か?」という問を、どこまでも厳しく問い詰めていく、きりの無い作業なのだ。

問 296 人間と動物はどう違うか?

### 13.7 背理法

命題の証明の仕方のひとつに 背理法 がある。これは、命題の結論を仮に否定してみると、どこかに矛盾が生じてしまう、という論法である。

例 13.26 命題「筑波大生は優秀である」を背理法で証明(?)してみよう:

ある筑波大生が優秀でないと仮定しよう。筑波大の入試は優秀でなければ合格できない。ところが、その人が筑波大生であるということは、優秀でない人が入試に合格したということになる。これは矛盾である。従って、筑波大生は優秀である。(証明?終わり)

むろん、この「証明?」は、別の意味で不完全であり、ほんとうの証明にはなっていない。先に述べたように「優秀」とはどういうことかという定義があいまいだし(だからこそいるんな入試があるのだ)、何よりも、人は時間によってかわるものであり、人生のある時期に「優秀」だからといって、その後もそうであり続ける保証はない。(例おわり)

もうひとつの例をやってみよう。こんどは厳密な証明である。

例 13.27 自然数  $n$  について、もし  $n^2$  が偶数ならば、 $n$  は偶数である。これを背理法で証明しよう。

$n^2$  が偶数でありながら、 $n$  が偶数でない、つまり  $n$  は奇数であると仮定する。すると、 $n$  は 2 を約数に持たないので、 $n^2$  も 2 を約数に持たない。従って、 $n^2$  は奇数になる。これは矛盾である。従って、 $n$  は偶数である。■  
(例おわり)

問 297 自然数  $n$  について、もし  $n^2$  が奇数ならば、 $n$  は奇数である。これを背理法で証明せよ。

問 298 2つの自然数  $n, m$  について、もしそれらの

積  $nm$  が奇数ならば、 $n, m$  はともに奇数である。これを背理法で証明せよ。

よくある間違い 54 この問題の解答を、「自然数  $n, m$  がともに偶数であると仮定する」というふうに始めてしまう... そういう人は、P.183 から真剣に読み返すべきです。

よくある間違い 55 この問題の解答を、「自然数  $n, m$  について、もしそれらの積  $nm$  が奇数ならば、 $n, m$  のどちらかは偶数であると仮定する」というふうに始めてしまう... これ、多くの資源生がやらかします。こう書くな、正しいのは、「自然数  $n, m$  について、もしそれらの積  $nm$  が奇数でありながら、 $n, m$  のどちらかは偶数であるような場合があると仮定する」です。違いはわかりますか?

背理法の論理は、いずれ統計学で「仮説検定」「帰無仮説」という考え方で使うことになるので、しっかり理解しよう。

### 13.8 集合

ものの集まりを、集合(set) という(定義)。ここでいう「もの」とは、具体的な物体でもよいし、抽象的な概念(頭の中でしか想像できないもの)でもよい。

例 13.28

$$S = \{ \text{赤木剛憲, 三井寿, 宮城リョータ, 流川楓, 桜木花道} \}$$

(13.5)

で定義される集合  $S$  は、漫画「スラムダンク」\*2の湘北高校バスケットボール部のスターティングメンバーの集まり(スターティングファイブ)である。(例おわり)

集合を構成する個々の「もの」を、その集合の要素\*3(element) という(定義)。例えば例 13.28 では、赤木剛憲\*4は  $S$  の要素である。ある集合を定義するときは、式(13.5)のように、その要素を  $\{ \}$  で囲って列挙すればよい。

要素をすべて列挙するのが面倒な場合は、 $\{ \}$  の中を | で区切って、その右に条件を書いたりする。

例 13.29 正の偶数からなる集合  $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

\*2 作者は井上雄彦。少年ジャンプに1990年から1996年に連載。

\*3 元(げん)ともいう。

\*4 湘北高校バスケ部の主将。代表的な発言は、「基本がどれほど大事かわからんのか!! ダンクができようが何だろうが、基本を知らん奴は試合になったら、何もできやしねーんだ!!」

は,

$$B = \{2n \mid n \text{ は } 1 \text{ 以上の整数} \} \quad (13.6)$$

と表すことができる\*5。(例おわり)

問 299 集合とは何か? 要素とは何か? それらの定義を述べよ。

あるもの  $x$  が, ある集合  $X$  の要素であるということ, 以下のように表記する:

$$x \in X \quad (13.7)$$

又は以下のように書いてもよい(式 (13.7) と同じ意味):

$$X \ni x \quad (13.8)$$

例えば例 13.28 では, 赤木剛憲  $\in S$  などとなる。

あるもの  $x$  が, ある集合  $X$  の要素でないときは, 以下のように書く:

$$x \notin X \quad (13.9)$$

例えば例 13.28 では, 赤木晴子  $\notin S$  となる\*6。

よくある間違い 56 点 (.) とコンマ (,) をきちんと書き分けできない。例えば, 1.2 と 2.3 という 2 つの数からなる集合  $\{1.2, 2.3\}$  を,  $\{1.2.2.3\}$  というふうに書いてしまう。

注意: 「もの」と「ものの集まり」の違いをしっかりと区別しよう。例えば, 1 と  $\{1\}$  は違う。前者は 1 という数のことだが, 後者は, 「1 という数だけからなる集合」である。

$$0 \notin \{1\} \quad (13.10)$$

という式は意味があるが(あるもの(数)がある集合の要素かどうか),

$$0 \notin 1 \quad (13.11)$$

という式は意味がない(もの(数)がもの(数)の要素かどうかという概念は存在しない)。

$$0 < 1 \quad (13.12)$$

という式は意味があるが(数どうしの間には大小関係がある),

$$0 < \{1\} \quad (13.13)$$

という式は意味がない(数と集合の間に大小関係は無い)。

ある集合  $X$  の全ての要素が, 別の集合  $Y$  の要素でもあるときは, 「集合  $X$  は集合  $Y$  に含まれる」とか, 「 $X$  は  $Y$  の部分集合(subset)である」と言い, 以下のように書く(定義):

$$X \subset Y \quad (13.14)$$

又は以下のように書いてもよい(式 (13.14) と同じ意味):

$$Y \supset X \quad (13.15)$$

例 13.30  $S$  を筑波大学生物資源学類生全員の集合とし,  $S_1$  を筑波大学生物資源学類の 1 年生全員の集合とする。 $S_1$  の全ての要素は,  $S$  の要素でもある。従って  $S_1 \subset S$  である。(例おわり)

問 300 集合  $X$  が集合  $Y$  に含まれる(集合  $X$  が集合  $Y$  の部分集合である)とはどういうことが, 定義を述べよ。

よくある間違い 57  $\in$  と  $\subset$  を混同してしまう... これらは違う意味を持つ記号です。

部分集合の定義から明らかなように, どのような集合も, 自分自身の部分集合である。つまり任意の集合  $X$  について,

$$X \subset X \quad (13.16)$$

である。

集合  $X$  と集合  $Y$  が,  $X \subset Y$  かつ  $X \supset Y$  であるとき, すなわち,  $X$  が  $Y$  に含まれ,  $Y$  が  $X$  に含まれるとき,  $X$  と  $Y$  は一致すると言い, 以下のように書く:

$$X = Y \quad (13.17)$$

問 301 以下の式について, 間違っているものを, 理

\*5 ここで  $n$  は便宜上 1 以上の整数を表すものであり, それを記号  $n$  で表したことには何の必然性もない。 $B = \{2m \mid m \text{ は } 1 \text{ 以上の整数} \}$  と書いても, 全く同じことである。もちろん, 「1 以上の整数」のかわりに「自然数」と書いても OK。

\*6 赤木剛憲の妹。主人公桜木花道をバスケット部にリクルートし, 桜木の精神的支柱となる。代表的な発言は, 「地道な努力はいつか必ず報われるって, お兄ちゃんがいったわ。」

由とともに指摘せよ:

- (1)  $1 \in \{1, 2, 3\}$             (2)  $1 \subset \{1, 2, 3\}$   
 (3)  $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$         (4)  $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$   
 (5)  $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3\}$       (6)  $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$   
 (7)  $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$

2つの集合  $X, Y$  に共通する要素だけを抜き出してできる集合を、積集合 とか 共通部分 とか 交わり といい、以下のようにあらわす:

$$X \cap Y \quad (13.18)$$

例 13.31

$$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\} \quad (13.19)$$

(例おわり)

2つの集合  $X, Y$  の少なくとも一方に属する要素でできる集合を、和集合 とか 結び といい、以下のようにあらわす:

$$X \cup Y \quad (13.20)$$

例 13.32

$$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \quad (13.21)$$

(例おわり)

要素が一つもない集合を 空集合 といい、 $\emptyset$  であらわす。

例 13.33

$$\{1, 2, 3\} \cap \{4, 5, 6\} = \emptyset \quad (13.22)$$

(例おわり)

数学では、慣習的に、よく使う集合に特別な記号がつけられている。例えば、

- $\mathbb{N}$  「自然数全体の集合<sup>\*7</sup>」
- $\mathbb{Z}$  「整数全体の集合」
- $\mathbb{Q}$  「有理数全体の集合」
- $\mathbb{R}$  「実数全体の集合」
- $\mathbb{C}$  「複素数全体の集合」

である。当然、

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad (13.23)$$

<sup>\*7</sup> 自然数は、正の整数である。0 は含まない。

である<sup>\*8</sup>。

これらを使うと、数学の記述が簡潔になって、楽である。例えば、

$$x \in \mathbb{R}$$

は「 $x$  は実数全体の集合の要素である」ということなのだ、それは要するに「 $x$  は実数である」ということだ。従って、「 $x$  は実数である」という記述を  $x \in \mathbb{R}$  と記述してしまってもかまわない。

問 302 以下の集合を、要素を列挙する形で表せ。

- (1)  $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$   
 (2)  $\{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$   
 (3)  $\{-1, 0, 1, 2, 3\} \cap \mathbb{N}$   
 (4)  $\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\} \cap \{x \mid -5 < x < 5, x \in \mathbb{R}\}$

さて、ある大きな集合を前提として、その中に含まれる部分集合についていろいろ考えることがある。

例 13.34 あるサッカークラブが試合に臨むときは、そのクラブに属する選手の中の 11 人がスターティングメンバー（スタメン）としてピッチに立ち、さらに 7 人ほどが交代要員としてベンチ入りする（それ以外の選手はスタンドで観戦する）。スタメン決定は、そのクラブの選手全員からなる集合（上述した「大きな集合」）の中でどのように「スタメン」と「交代要員」という 2 つの部分集合を作るかという話に他ならない<sup>\*9</sup>。（例おわり）

そのような「大きな集合」を 全体集合 とか 普遍集合 と呼び、慣習的に  $U$  という記号<sup>\*10</sup>で表すことが多い。

全体集合  $U$  の部分集合  $A$  について、 $A$  には含まれないような  $U$  の要素の集合を  $A$  の 補集合 と呼び、 $\bar{A}$  と表す<sup>\*11</sup>。つまり、

$$\bar{A} := \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \notin A\} \quad (13.24)$$

である（定義）。

例 13.35  $U$  を筑波大学生物資源学類生全員の集合とす

<sup>\*8</sup> 複素数は、2 つの実数  $x, y$  によって  $x + iy$  と書ける数である。従って、 $y = 0$  のとき、すなわち、任意の実数  $x$  も、複素数である。むしろ、 $x = y = 0$  のとき、つまり 0 も、複素数である

<sup>\*9</sup> ただし、誰をどのポジションに配置するかは考えない。

<sup>\*10</sup> universe の頭文字。

<sup>\*11</sup>  $cA$  と表すこともある。c は complementary の頭文字。

る。A を、筑波大学生物資源学類の女子学生全員の集合とすると、 $A \subset U$  であるのは当然である。また、 $\bar{A}$  は、同学類の男子学生全員の集合である。(例おわり)

例 13.36  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  とする。ここで、 $A = \{2, 3, 4\}$  とする。A の要素は全て U の要素なので、 $A \subset U$  である。また、 $\bar{A} = \{1, 5, 6\}$  である。(例おわり)

例 13.37  $U = \mathbb{N}$  とする。ここで、A を 2 以上の偶数の集合とすると、A の要素は全て U の要素なので、 $A \subset U$  である。また、 $\bar{A}$  は 1 以上の奇数の集合である。(例おわり)

このような集合の包含関係は、図 13.1 のようなベン図と呼ばれる図で概念的に表すことが多い。

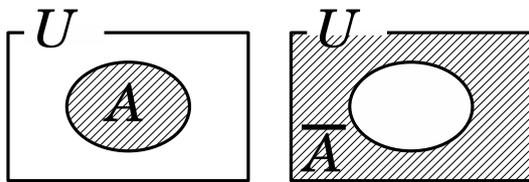


図 13.1 ベン図。左は  $A \subset U$ 、右 (の斜線部) は A の補集合 (つまり  $\bar{A}$ ) をあらわす。

全体集合 U と、その部分集合 A, B について、ド・モルガンの法則と呼ばれる以下の定理が成り立つ:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \tag{13.25}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \tag{13.26}$$

式 (13.25) は、図 13.2 のようなベン図を使えば、直感的にわかるだろう。

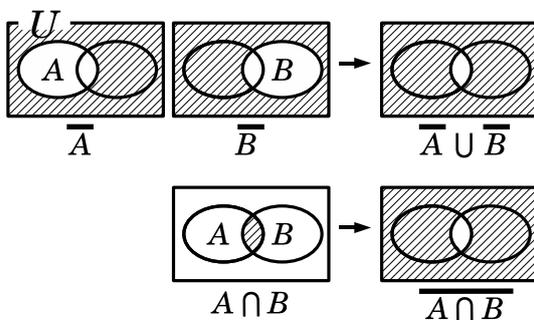


図 13.2 式 (13.25) を説明するベン図。

問 303 ベン図を描いて、式 (13.26) を説明せよ。

### 13.9 集合の直積

2 つの集合 X, Y について、それぞれからひとつずつ要素をとりだしてペアを作ることを考える。このペア全体の集合を、X と Y の直積と言って、 $X \times Y$  と書く。すなわち、

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} \tag{13.27}$$

である。

例 13.38  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{5, 6, 7\}$  なら、

$$\begin{aligned} A \times B &= \{1, 2\} \times \{5, 6, 7\} \\ &= \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7)\} \end{aligned} \tag{13.28}$$

である。(例おわり)

問 304 直積の定義を述べよ。

注意

直積は、要素どうしの掛け算ではない。

初学者は、「積」という言葉の語感から、「直積」といえば何か「掛け算」をするものだと感じるかもしれないが、そんなことはない。直積の式に  $\times$  という記号があるが、これは数の掛け算の記号と同じ形をしていても意味は全く別物である。単に、可能なペアを全て集めてできる集合が直積である。なぜそうなのか? 理由は無い。直積とはそういうものだとして約束 (定義) するのだ。

なので、次の例のように、別に数の集合でなくても、直積を考えることができる:

例 13.39

$$M = \{ \text{ピザ, スパゲティ} \} \tag{13.29}$$

$$D = \{ \text{コーヒー, 紅茶} \} \tag{13.30}$$

であれば、

$$\begin{aligned} M \times D &= \{ (\text{ピザ, コーヒー}), (\text{ピザ, 紅茶}), \\ &\quad (\text{スパゲティ, コーヒー}), (\text{スパゲティ, 紅茶}) \} \end{aligned} \tag{13.31}$$

となる。これは、どこかの喫茶店の「ドリンクつきランチセット」の選択肢だろう。(例おわり)

よくある間違い 58 直積を「要素どうしを掛け算すること」

だと誤解する。例 13.38 を、

$$A \times B = \{5, 6, 7, 10, 12, 14\}$$

としてしまう。... これは間違い!

直積の概念は単純明快なのに、そのような誤り(というか勝手な解釈)をしてしまう人は、ものごとの「定義」の重要性と、そこから始まる学問の論理性を軽視していませんか? 人間の言葉には限りがあるので、明解な概念であっても、それにぴったりくる言葉が無いことはよくあります。そういう場合は、その概念になんとなく近い言葉を借りて代用したり合成するしかないのです。従って、言葉のイメージを早合点して勝手に解釈するのは、極めて危険です。

例えば「花吹雪」という言葉がありますが、「吹雪」という言葉のイメージに引きずられて、「花の形をした雪が吹きつけること」だ、と勝手に解釈すると、「花吹雪」の本当の意味(たくさんの花びらが風でいっせいに落ち、吹き流されて、まるで吹雪のように見えること)とは違ってしまいます。「直積」を「要素どうしの掛け算」と解釈する人は、そのような間違いを犯しています。

繰り返すが、直積は要素どうしの積(掛け算)ではない。ではなぜ直「積」と呼ぶかということ、もとの集合の要素数(要素が何個あるか) どうしの積(掛け算)が、直積の要素数になるからである。実際、例 13.38 では、 $A$  の要素数は 2、 $B$  の要素数は 3 で、 $A \times B$  の要素数は 6 になっている。

さて、直積は「2つの集合」が同じ集合であってもかまわない。

例 13.40  $A = \{1, 2\}$  なら、

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \quad (13.32)$$

である。(1, 2) と (2, 1) を区別することに注意しよう。また、(1, 2) を  $\{1, 2\}$  と書くのも誤りである。(1, 2) と  $\{1, 2\}$  は意味が違うことに注意しよう。すなわち、(1, 2) は 1 と 2 という数をこの順序で組み合わせたペアである(集合ではない)が、 $\{1, 2\}$  は 1 と 2 という 2 つの数からなる集合である\*<sup>12</sup>。(例おわり)

直積は、3 つ以上の集合に関しても定義される。

例 13.41 3 つの集合  $X, Y, Z$  について、

$$X \times Y \times Z := \{(x, y, z) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\}$$

である。(例おわり)

直積に関して、数学や物理学で特によく使うのは、 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  や、 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  などである。前者は、実数を 2 つ組み合わせたものの集合、つまり、

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \quad (13.33)$$

である。これは何か? 言うまでもなく、2 次元の数ベクトルの集合である(これは 2 次元の幾何ベクトルをあらわす座標の集合でもある)。同様に、

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \quad (13.34)$$

は、3 次元の数ベクトルの集合である。 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  や、 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  と書くのはめんどくさいので、かわりに  $\mathbb{R}^2$  や  $\mathbb{R}^3$  などと書く。この 2 とか 3 といった指数は、 $2^3 = 8$  などというときの掛け算の回数ではなくて、直積される集合の数である。

問 305 次の集合の要素を書き出せ

$$\{1, 2, 3\} \times \{2, 3, 4\} \quad (13.35)$$

よくある間違い 59 直積と積集合を混同する ... 語感は似ているけど、これらは全く別物です。

問 306 次の式 (13.36) と式 (13.37) は互いにどう違うか、説明せよ。

$$(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) \quad (13.36)$$

$$\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\} \quad (13.37)$$

## 13.10 数学記号

数学やその応用分野(物理学・化学・生物学・経済学など)ではいろんな記号を使う。さしあたって、以下の記号を覚えておこう。この中には、高校数学では学ばないものも含まれるが、「基礎数学」などの授業ですぐに必要なになるだろう。

論理と二項関係

- $\forall$  「すべての」「任意の」... for All の 'A' を逆転。
- $\exists$  「ある」「存在する」... exist の 'E' を逆転。
- $\exists!$  「ただひとつ存在する」
- $\implies$  「ならば」
- $\iff$  「必要十分条件」「同値」
- $\geq$  「以上」( $\geq$  は、大学ではあまり使われない)
- $\leq$  「以下」( $\leq$  は、大学ではあまり使われない)

\*<sup>12</sup> なので、 $\{1, 2\} = \{2, 1\}$  だが、 $(1, 2) \neq (2, 1)$  である。

- = 「等しい」
- $\neq$  「等しくない」
- $\approx, \simeq$  「ほぼ等しい」
- $\sim$  「だいたい等しい (桁が合う程度)」「比例する」
- $\gg$  「はるかに大きい」
- $\ll$  「はるかに小さい」
- $\propto$  「比例する」
- $\equiv$  「定義する」又は「恒等的に等しい」
- $:=$  「定義する」

## 集合

- $\in$  (左は右の)「要素」
- $\ni$  (右は左の)「要素」
- $\notin$  「要素ではない」
- $\subset$  (左は右の)「部分集合」
- $\supset$  (右は左の)「部分集合」
- $\emptyset$  「空集合」
- $\cap$  「共通部分」
- $\cup$  「和集合」
- $\mathbb{N}$  「自然数全体の集合」
- $\mathbb{Z}$  「整数全体の集合」
- $\mathbb{Q}$  「有理数全体の集合」
- $\mathbb{R}$  「実数全体の集合」
- $\mathbb{C}$  「複素数全体の集合」
- $(a, b)$   
2つの実数  $a, b$  で挟まれる区間。ただし,  $a, b$  は含まない。すなわち,  $\{x | a < x < b\}$  のこと。
- $[a, b]$   
2つの実数  $a, b$  で挟まれる区間。ただし,  $a, b$  を含む。すなわち,  $\{x | a \leq x \leq b\}$  のこと。

## 演算

- $\cdot$  「掛け算」「ベクトルの内積」
- $\bullet$  「掛け算」「ベクトルの内積」
- $\times$  「掛け算」「ベクトルの外積」
- $||$  「長さ」「絶対値」「行列式」
- $\dot{x}$  「 $x(t)$  を  $t$  で微分したもの」
- $\bar{z}$  「 $z$  の複素共役」または、「 $z$  の標本平均」
- $z^*$  「 $z$  の複素共役」
- $\nabla$  「ナブラ演算子<sup>\*13</sup>」

## 写像

- $f: A \rightarrow B$   
「写像  $f$  は, 集合  $A$  の要素を集合  $B$  の要素に移す」

(集合どうしの関係)

- $f: a \mapsto b$   
「写像  $f$  は, 要素  $a$  を要素  $b$  に移す」(要素どうしの具体的な対応)
- $g \circ f$   
「 $g$  と  $f$  の合成写像」つまり,  $g \circ f: x \mapsto g(f(x))$

## 言葉の省略

- i.e. 「すなわち」
- e.g. 「例えば」
- s.t. "such that" 「～～であるような」
- cf. "compare" 「～～と比較せよ」

よくある質問 146 ファイ  $\phi$  って空集合の記号  $\emptyset$  に似ていますね。... 手書きのときは同じになります。

以上の記号を使うと, 数学の論理を簡潔に表すことができる。

## 例 13.42

- 「全ての实数  $x$  について,  $x^2$  は 0 以上である」

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \quad (13.38)$$

- 「集合  $A$  は, 0 以上の全ての整数からなる」

$$A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x\} \quad (13.39)$$

- 「自然数の集合は整数の集合に含まれる」

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \quad (13.40)$$

- 「 $x$  は 2 以上 3 以下である」

$$x \in [2, 3] \quad (13.41)$$

(例おわり)

問 307 以下の命題を, 上の記号を使わないで書き表せ<sup>\*14</sup>。

- (1)  $x, y \in \mathbb{R}, x \propto y \implies \exists a \in \mathbb{R}, y = ax$
- (2)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } x < n$
- (3)  $\exists n \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R}, x < n$

問 308 以下の命題を, 上の記号を使って書き表せ:

- (1) 複素数  $z$  について,  $z$  と  $z$  の複素共役との和は, 実

<sup>\*13</sup> 定義は,  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ 。その意味は, 大学の数学や物理学で習う。

<sup>\*14</sup> (2) と (3) は似ているが, 実は全く異なる命題である。(2) は正しいが, (3) は正しくない。

数である。

- (2) 実数  $x$  について、もし  $x^2 = 1$  ならば、 $x$  は 1 または  $-1$  である。

以下は数学記号ではなく、英語の記号だが、呼び方を知らない人が多いので述べておく：

- . ドット
- , コンマ
- ' シングルクォート, またはアポストロフィー
- " ダブルクォート
- : コロン
- ; セミコロン

特に、コロンとセミコロンを混同する人が多い。

### 演習問題

演習問題 35  $2 < 3$  という式は正しいが、 $2 = 3$  という式は正しくない。では、 $2 \leq 3$  という式は正しいか？ 正しくないか？ 理由をつけて答えよ。

演習問題 36 無理数と、0 でない有理数の積は、無理数である。それを証明せよ。

### 問題の解答

答 288

- (1) 実数  $x$  は 0 以上である。
- (2) 実数  $x, y$  は、どちらも 0 以下である。
- (3) 実数  $x, y$  の少なくともひとつは 0 以下である。

答 289

- (1) 逆:  $x^2 = 0$  ならば、 $x = 0$  である。  
裏:  $x \neq 0$  ならば、 $x^2 \neq 0$  である。  
対偶:  $x^2 \neq 0$  ならば、 $x \neq 0$  である。
- (2) 逆:  $x^2 > 0$  ならば、 $x > 0$  である。  
裏:  $x \leq 0$  ならば、 $x^2 \leq 0$  である。  
対偶:  $x^2 \leq 0$  ならば、 $x \leq 0$  である。
- (3) 逆: 勝つものは、強い。  
裏: 弱いものは、負ける。<sup>\*15</sup>

<sup>\*15</sup> この解答では、「勝つ」の否定は「負ける」、「強い」の否定は「弱い」とする。現実には「引き分け」などもありうるが、便宜上、考えない。

対偶: 負けるものは、弱い。

答 290

- (1) 苦くない薬は良薬でない(甘い薬は効かぬ)。
- (2) 爪を隠さないのは能ある鷹ではない(爪を見せる鷹は能無し)。
- (3) めんどくさくないものは大事ではない。

答 291

- (1) 春になっても雪が溶けないこともある(高山の万年雪など)。
- (2) 筑波大に入っても、素晴らしい将来になることもある。
- (3) 2 乗したら負になる数が存在する。
- (4) 2 乗したら負になる数が存在する。

答 292 正解は 6 だけ。「筑波大の学生はみなサッカーがうまい」の否定は、筑波大生に 1 人でもサッカーがうまくない人がいれば良い。1, 8 は言い過ぎ。2, 3, 4 は他の大学の学生のこと、つまり関係のない話をしている。5, 7, 9 は、筑波大生全員がサッカー上手でも成り立つ。注: 問題文で「正解は 1 つとは限らない」と書いてあったのに、正解は 1 つだった。君は「だまされた」と言って怒るだろうか？

答 293 0 は実数だが、2 乗したら正ではない(0 になる)。

答 294 必要条件。(  $x = -1$  という反例があるから、 $p \implies q$  は成り立たない。しかし、 $q \implies p$  は成り立つ。) )

答 295 十分条件。(  $p$  ならば  $x = 1$  または  $x = -1$  なので  $q$  が成り立つ。しかし  $x = 3$  という反例があるから、 $q \implies p$  は成り立たない。) )

答 296 人間は動物の一種だが、人間ではない動物もいる。注: 日常の議論では「人間以外の動物」を単に「動物」と呼ぶこともある。その場合、この設問への解答は「人間は火や道具や言葉を使うが、動物はそれらを使わない」等のように、人間と、人間以外の動物との差異を述べることになる。このように、問題に現れる言葉の定義を正しく共有しないと話がかみあわない。真剣な議論では、くどいな、と思うくらい、言葉の定義にこだわらねばならないのだ。

答 297  $n$  が奇数でない、つまり  $n$  は偶数であると仮定する。すると、 $n$  は 2 を約数に持つので、 $n^2$  も 2 を約数に持つ。従って、 $n^2$  は偶数になる。これは矛盾である。従って、 $n$  は奇数である。 ■

答 298 自然数  $n, m$  のうち少なくとも片方が偶数であることがあると仮定する。今、 $n$  が偶数なら、 $n = 2k$  と書ける ( $k$  は適当な自然数)。すると  $nm = 2km$  となる。 $km$  は自然数だから、 $2km$  すなわち  $nm$  は偶数である。同様に、 $m$  が偶数のときも  $nm$  は偶数である。いずれにしても、 $nm$  は偶数になり、矛盾する。従って、 $n, m$  はともに奇数。 ■

答 299 略 (本文に書いてある)。

答 300 略 (本文に書いてある)。

答 301 間違っているのは、以下の通り:

- (2): 1 は集合ではないので集合の包含関係 ( $\subset$ ) は成り立たない。
- (3):  $\{1\}$  は  $\{1, 2, 3\}$  の部分集合であり、要素ではない。
- (5):  $\{1, 2\}$  は  $\{1, 2, 3\}$  の部分集合であり、要素ではない。

答 302

- (1)  $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$                       (2)  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- (3)  $\{1, 2, 3\}$                               (4)  $\{0, 1, 4\}$

答 303 図 13.3 参照。

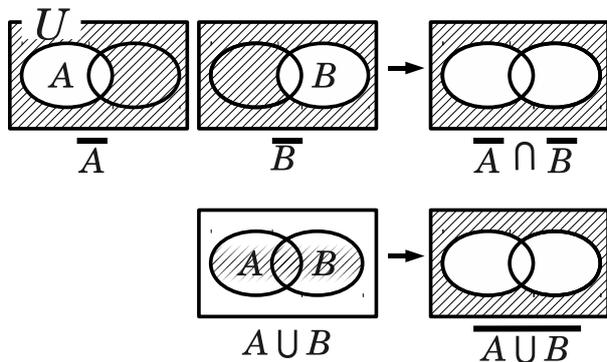


図 13.3 式 (13.26) を説明するベン図。

答 304 2 つの集合  $X, Y$  のそれぞれからひとつずつ要素を取り出してできるペアの全てからなる集合を、 $X$  と  $Y$  の直積と言って、 $X \times Y$  と表す。

答 305  $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

答 306 式 (13.36) はベクトルどうしの外積であり、その結果はベクトルである。式 (13.37) は集合どうしの直積であり、その結果は集合である。すなわち、

$$(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) = (-3, 6, -3)$$

$$\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\} = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$$

答 307

- (1) 実数  $x$  と実数  $y$  が比例するならば、ある実数  $a$  によって、 $y = ax$  と書ける。
- (2) どんな実数  $x$  にも、ある整数  $n$  が存在して、 $x < n$  とできる。(どんな実数にも、それぞれ、その実数より大きな整数がある。これは真である。)
- (3) ある整数  $n$  が存在して、どんな実数  $x$  にも、 $x < n$  とできる。(ある整数は、全ての实数よりも大きい。これは偽である。)

答 308

- (1)  $z \in \mathbb{C}, z + \bar{z} \in \mathbb{R}$
- (2)  $x \in \mathbb{R}, x^2 = 1 \implies x = \pm 1$



## 第14章

# 確率

この章を学ぶには、これまでの章 (特に集合、微分、積分) を既に習得している必要があります。

### 14.1 事象

「サイコロを1回投げる」という操作を考えよう。この操作は、結果として、「3(の目)が出る」とか「偶数が出る」とか「4以上が出る」等のことが起きる可能性がある。しかし、実際にこれらが起きるかどうかは、やってみなければわからない。

この「サイコロを投げる」というような、やってみなければ結果はわからないような動作 (操作) を 試行 (trial) と呼ぶ。そして、「3が出る」「偶数が出る」のように試行の結果として起きる可能性のあるできごとを 事象 (event) と言う (確率事象とも言う)。

よくある質問 147 試行とは何か? と問われて、「やってみなければわからないこと」と答えたら、正解をもらえませんでした。なぜ? ... その答えでは、試行と事象をはっきり区別できないからです。「サイコロをふってどの目がでるか」は試行、「サイコロをふって3(の目)が出る」は事象。でも、両方とも、「やってみなければわからないこと」です。「こと」が動作を意味するのか結果を意味するのかわからないのです。

よくある質問 148 そんな誤解をする人がいるとは思えません。... わかっている人ならそういう誤解はしないでしょ。でも、世の中にはいろんな人がいます。科学は、出来る限り誤解されない(まぎらわしくない)言葉遣いを心がけねばなりません。どんな表現についても、「これを誤解する人がいるとしたら、どのように誤解するだろうか? それを防ぐには、もっと良い表現は無いだろうか?」と、常に考えることが大切なのです。

ある試行に対して「2つの事象  $A$  と  $B$  の少なくとも片方が起きる」という事象を  $A$  と  $B$  の 和事象 と呼び、

$$A \cup B \quad (14.1)$$

と書く ( $\cup$  は「和集合」をあらわす記号)。

例 14.1 「サイコロを1回投げる」という試行に対して、「偶数が出る」という事象を  $A$ 、「4以上が出る」という事象を  $B$  とする。 $A \cup B$  は、「偶数または4以上の数が出る」すなわち「2か4か5か6が出る」という事象である。(例おわり)

ある試行に対して「2つの事象  $A$  と  $B$  がともに起きる」という事象を  $A$  と  $B$  の 積事象 と呼び、

$$A \cap B \quad (14.2)$$

と書く ( $\cap$  は「積集合」をあらわす記号)。上の例 14.1 の事象  $A, B$  について  $A \cap B$  は、「偶数かつ4以上が出る」すなわち「4か6が出る」という事象である。

ある試行に対して、ある事象  $A$  とある事象  $B$  が同時に発生することがないこと、つまり積事象が 空事象 (何も起きることがないという事象;  $\emptyset$  とあらわす) となるようなこと、すなわち

$$A \cap B = \emptyset \quad (14.3)$$

が成り立つ場合、 $A$  と  $B$  は互いに 排反 (exclusive) である、という。例えば、「サイコロを1回投げる」という試行に対して、「2が出る」という事象と「3が出る」という事象は互いに排反である。

他の複数の事象の和事象と考えることはできないような事象を 根元事象 という。例えば「サイコロを1回投げる」という試行に対して、「1が出る」という事象は、根元事象である。同様に、「2が出る」「3が出る」...「6が出る」は、いずれもそれぞれ根元事象である。空事象以外のどのような事象も、根元事象の和事象として表現できる。例えば「サイコロを1回投げる」という試行に対して「偶数が出る」という事象  $A$  は、

$$A = \text{「2が出る」} \cup \text{「4が出る」} \cup \text{「6が出る」}$$

というように、3つの根元事象の和事象として表現できる (従ってこの事象  $A$  は根元事象ではない)。

ある試行に関する全ての根元事象の和事象を 全事象 と呼ぶ\*1。サイコロの例で言えば、全事象  $U$  とは\*2、

$$U = \text{「1 が出る」} \cup \text{「2 が出る」} \cup \dots \cup \text{「6 が出る」}$$

である。言い換えれば、「1 から 6 のうちどれかが出る」という事象が全事象である。このことからわかるように、全事象とは、起こりうるすべての場合を網羅した事象である。

ある事象  $A$  について、「それが起きない」という事象を  $A$  の 余事象 と呼び、 $\bar{A}$  と書く。事象  $A$  とその余事象  $\bar{A}$  は排反である (式で書けば、 $A \cap \bar{A} = \emptyset$ )。例えばサイコロを 1 回投げるとする試行に対して、「偶数が出る」という事象  $A$  の余事象  $\bar{A}$  は、「偶数が出ない」つまり「奇数が出る」つまり「1, 3, 5 のいずれかが出る」ということである。

さて、ここまで来ると、式 (14.1) や式 (14.2) で集合の記号  $\cup, \cap$  等を使ったのがなぜか、わかるだろう。つまり、事象という考え方は、集合の考え方に立脚しているのだ。全事象を全体集合とすると、その他の事象は全事象の部分集合とみなせる。和事象は 2 つの事象に関する和集合であり、積事象は 2 つの事象に関する積集合である。

問 309 以下の用語を説明せよ。

- |         |         |          |
|---------|---------|----------|
| (1) 事象  | (2) 和事象 | (3) 積事象  |
| (4) 空事象 | (5) 余事象 | (6) 根元事象 |
| (7) 全事象 | (8) 排反  |          |

## 14.2 確率

同じ条件で試行を十分にたくさんの回数 ( $N$  回) だけ行った場合、事象  $A$  が起きる回数を  $n(A)$  回とすると、事象  $A$  が起きる 確率 (probability)  $P(A)$  を、次式で定義する:

$$P(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{N} \quad (14.4)$$

このように定義される確率のことを 統計的確率 とか 経験的確率 という。また、確率を表す記号として  $P$  が用いられるのは、probability の頭文字だからである。 $P(A)$  を  $Pr(A)$  と書いたりすることもあるが、同じ理由による。

\*1 標本空間とも言う。

\*2 全事象は慣習的に  $U$  と書くことが多い。

例 14.2 「サイコロを 1 回投げる」という試行を何回も繰り返すと、「偶数が出る」という事象  $A$  は、常識的に考えて、だいたい 2 回に 1 回くらいの割合で、発生するだろう。つまり、試行回数を  $N$  とすると、 $n(A)$  はだいたい  $N/2$  だろう。従って、 $N$  が十分に大きければ、式 (14.4) より、

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{N/2}{N} = \frac{1}{2} \quad (14.5)$$

となる。従って、「サイコロを 1 回投げて偶数が出る確率は  $1/2$ 」である。(例おわり)

例 14.3 天気予報で出てくる「明日、雨が降る確率」というのは、ちょっと微妙な考え方である。というのも、今日にとって明日は 1 回しかないから、「明日の天気はどうなる?」という試行を何回も試すわけにはいかない。しかし、仮に今日と全く同じ気象条件の日が、今日以外にも過去・未来に  $N$  回あるとして、その翌日に雨が降るのが  $n$  回ならば、その  $n/N$  を「明日、雨が降る確率」と考えるわけである。(例おわり)

よくある間違い 60 確率を確立と書いてしまう (誤字)。

では、確率という概念が満たすべき性質について検討していこう。まず、どんなことを何回試そうが、 $n/N$  は必ず 0 以上 1 以下だから、任意の事象  $A$  について、次式が成り立つ:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (14.6)$$

どんな事象も全事象の一部であるので、毎回の試行では必ず全事象が起きる (それは「全ての事象のうちどれかが起きる」という意味であり、「全ての事象がいっせいに起きる」というような意味ではない)。従って試行を  $N$  回行ったら、全事象  $U$  は  $N$  回起きる。従って、式 (14.4) より、

$$P(U) = \frac{n(U)}{N} = \frac{N}{N} = 1 \quad (14.7)$$

である。例えば「サイコロを投げて 1 から 6 のうちどれかが出る確率は 1」である。

問 310 次式を示せ:

$$P(\emptyset) = 0 \quad (14.8)$$

2つの事象  $A$  と  $B$  が互いに排反ならば、式 (14.3) より  $A \cap B = \emptyset$  である。従って、式 (14.8) より、

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \quad (14.9)$$

である。

また、 $A$  と  $B$  が互いに排反ならば、 $A$  と  $B$  の和事象  $A \cup B$ 、つまり「 $A$  と  $B$  の少なくとも片方が起きる」という事象が起きる回数  $n(A \cup B)$  は、 $n(A) + n(B)$  である\*3。従って、試行回数  $N$  が十分大きければ、式 (14.4) より、

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{N} = \frac{n(A) + n(B)}{N} \\ &= \frac{n(A)}{N} + \frac{n(B)}{N} = P(A) + P(B) \end{aligned} \quad (14.10)$$

となる。つまり、互いに排反な事象の和事象の確率は、それぞれの事象の確率の和に等しい。例えば、サイコロを振って出る目が2か3である確率は、2が出る確率(つまり  $1/6$ ) と、3が出る確率(つまり  $1/6$ ) の和  $2/6 = 1/3$  である。

任意の事象  $A$  とその余事象  $\bar{A}$  は互いに排反だから、式 (14.10) より、

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \quad (14.11)$$

である。ところが、 $A \cup \bar{A}$  とは、「 $A$  が起きるかもしれないし起きないかもしれない」という事象だから、全ての場合を網羅する、つまり全事象  $U$  である。従って、式 (14.7) より、

$$P(A \cup \bar{A}) = P(U) = 1 \quad (14.12)$$

である。式 (14.11)、式 (14.12) より、

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (14.13)$$

となり、従って、

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (14.14)$$

となる。つまり、ある事象の確率を1から引くと、その余事象の確率になる。例えば、サイコロを1回投げるという試行に対して「1が出る」を事象  $C$  とすれば、その余事象  $\bar{C}$  とは、「サイコロを振って1が出ない」つまり「サイコロを振って1以外の目が出る」つまり「サイコロを振って2, 3, 4, 5, 6のいずれかが出る」ということ

であり、 $P(C) = 1/6$  だから、

$$P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \quad (14.15)$$

である。

さて、サイコロを1回投げるという試行において、「1が出る」「2が出る」…「6が出る」という6つの事象はそれぞれ根元事象であり、互いに同程度に起こりやすく、なおかつ、これら以外が起きる可能性は無い。従って、例えば「2または3が出る」という事象は、常識的に考えれば6回に2回の頻度で起きるだろう。従って、その確率は、 $2/6 = 1/3$  となるだろう。

この考え方を振り返ってみると、もし全事象を構成する根元事象が互いに同じ「起きやすさ」で起きるならば、「事象を構成する根元事象の数」(ここでは「2が出る」と「3が出る」で2通り)を、「全事象を構成する根元事象の数」(ここでは6)で割ったものが確率になる、と考えることができる。つまり、事象  $A$  を構成する根元事象の数(いわゆる「場合の数」)を  $m(A)$  とし、全事象  $U$  を構成する根元事象の数を  $m(U)$  とすれば、

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(U)} \quad (14.16)$$

と書けるだろう。これは式 (14.4) とは違った考え方で確率を定義するものだ(高校数学ではこちらが一般的)。これを数学的確率とか理論的確率という。

ただし、この考え方は、あくまで全ての根元事象がどれも同程度に起こりやすいという前提が必要である。これを「同様の確からしさの原理」という。これは必ずしも成り立たないことに注意しよう。例えば「明日正午の天気は?」という試行において、「晴れ」「曇り」「雨」「雪」はいずれも根元事象だが、それらが同程度に起こりやすいとは言えない。実際、梅雨には雨が降りやすいし、真夏に雪が降る可能性はわずかしかない。そのような場合は式 (14.16) は使えない。

式 (14.4) と式 (14.16) はどちらも「確率の定義」である。一見似ているが、互いに異なる考え方に立脚していることは明らかだろう。どちらが正しいとも言えない。式 (14.4) には「明日の天気」のように本来は1回しかない試行についても繰り返しを考えるとという点に無理があるし、式 (14.16) は根元事象が互いに同程度に起こりやすいという前提に無理がある。このような微妙な問題に

\*3 一般に  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$  だが、 $A$  と  $B$  が排反ならば、 $n(A \cap B) = n(\emptyset) = 0$  である。

対して、数学(確率論)は明確な答えを出していない\*4。

問 311 2つのさいころを投げるとき、出る目の和が10以上になる確率は?

問 312 君はサッカー大会の決勝戦で、強豪チームに挑もうとしている。ロッカールームで君の同僚は、「どんなに相手が強くても、勝つか負けるか2つに1つなのだから、勝てる確率は50パーセントだ」と自分に言い聞かせている。それについて君はどう考えるか?

2つの事象  $A, B$  について、「 $A$  が起きるという前提で  $B$  が起きる」という確率を条件付き確率と呼び、 $P(B|A)$  と書く\*5。例えば、「明日、雨が降る」という事象を  $A$ 、「明日、洪水が起きる」という事象を  $B$  とすると、 $P(B|A)$  は、「明日、雨が降るならば、どのくらいの確率で洪水が起きるか」である。常識的に考えて、雨が降らなければ洪水は起きにくいので(それでも上流のダムが決壊するなど起きないこともないが)、雨が降るということを前提にするのならば、洪水が起きる確率は高くなるだろう。つまり、この例では、常識的に考えて、

$$P(B|A) > P(B) \quad (14.17)$$

である。一方、「明日、雨が降らない」という事象を  $C$  とすると、常識的に考えて、

$$P(B|C) < P(B) \quad (14.18)$$

である。このように、条件付き確率と、条件のつかない確率は、互いに別のものである。

さて、事象  $A$  と事象  $B$  について、「 $A$  と  $B$  がともに起きる」つまり  $A \cap B$  という事象を、「まず、 $A$  が起きる」(その確率は  $P(A)$ )、さらに、「 $A$  が起きた上に、 $B$  が起きる」(その確率は  $P(B|A)$ ) という2つの過程に段階的にわけて考えれば、以下になるだろう:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \quad (14.19)$$

ここで  $A$  と  $B$  をひっくり返して同様に考えれば、

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) \quad (14.20)$$

とも言える。式(14.19)、式(14.20)より、

$$P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \quad (14.21)$$

が成り立つ。両辺を  $P(A)$  で割ると、

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} \quad (14.22)$$

が成り立つ。式(14.22)は、ベイズの定理と呼ばれるもので、ベイズ統計学という、実用的に非常に重要な分野の基礎である。

問 313 「サイコロを1回ふる」という試行に対して、 $A$  を「3の倍数の目が出る」という事象、 $B$  を「5以下の目が出る」という事象とする。 $P(A)$ 、 $P(B)$ 、 $P(A \cap B)$ 、 $P(A|B)$ 、 $P(B|A)$  をそれぞれ求めよ。また、この2つの事象  $A, B$  についてベイズの定理が成り立つことを実際に確認せよ。

### 14.3 独立

複数の事象の発生・非発生が、互いに影響を及ぼさないことを独立(independent)という。

例 14.4 サイコロを2回ふるとき、「最初に2の目が出る」「次に3が出る」というのは互いに独立な事象である(イカサマのない限り)。(例おわり)

事象  $A, B$  が互いに独立ならば、 $A$  が起きようが起きまいが  $B$  の起きやすさは変わらないので、 $P(B|A) = P(B)$  である。同様に考えれば、 $P(A|B) = P(A)$  である。すると、式(14.19)や式(14.20)より、

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (14.23)$$

が成り立つことがわかる。式(14.23)を「事象の独立」の定義とする本もある。

問 314 以下の事象  $A, B$  の組みあわせは、独立・排反・どちらでもないのいずれか?

- (1) サイコロを1回投げて、  
 $A$ : 1が出る。  $B$ : 3が出る。
- (2) サイコロを2回投げて、  
 $A$ : 1回目に1が出る。  $B$ : 2回目に3が出る。
- (3) サイコロを1回投げて、  
 $A$ : 偶数が出る。  $B$ : 4が出る。

\*4 そこで、現代では、「どのような事象も0以上の確率で起きる」「全事象の確率は1」「排反な事象どうしの和事象の確率は、各事象の確率の和」という最低限の3つの性質を満たせば確率はどのように定義してもよい、という考え方(コルモゴロフの公理的確率)が主流である。しかし、この立場では「サイコロを1回ふって1が出る確率は1/6である」というような結論を導くことはできない。

\*5  $P_A(B)$  と書く本もある。

問 315 コインを 10 回投げて、裏が 1 回も出ない確率を求めよ。

#### 14.4 確率変数

試行の結果として数値が定まるような概念を 確率変数 (stochastic variable) という。

例 14.5 サイコロを 1 回投げると、1 から 6 までの整数値のうちひとつが結果として定まる。従って、「サイコロを 1 回投げて出る目の値」を  $D$  とすると\*<sup>6</sup>、 $D$  は確率変数である。(例おわり)

例 14.6 「明日の天気」は確率変数ではない。「明日の天気」は晴れ、曇り、雨、雪などの気象状況をとるものであり、それに数値は付随しない。ただし、「明日の天気が晴れなら 100 円、曇りなら 50 円、雨なら 0 円、…」などのような金額をつけて賭け事をするような場合は\*<sup>7</sup>、「明日の天気によって決まる配当金額」は確率変数になる。(例おわり)

確率変数に定数を足したのも確率変数である。例えば例 14.5 の確率変数  $D$  について、 $D + 10$  も確率変数である。実際、 $D + 10$  は、11, 12, 13, 14, 15, 16 のうちのどれかの値をとる。

確率変数に定数をかけたのも確率変数である。例えば例 14.5 の確率変数  $D$  について、 $10D$  も確率変数である。実際、 $10D$  は、10, 20, 30, 40, 50, 60 のうちのどれかの値をとる。

同様に考えれば、確率変数を何乗かしたり、確率変数を指数関数や三角関数に代入したものも (そんなことをして何の意味があるのかは別として) 確率変数である。

また、確率変数どうしを足したのも確率変数である (例: 「サイコロを 3 個投げて、出た目の値の和」という確率変数は、3 つの「サイコロの目」という確率変数の和である)。

確率変数がとり得る具体的な数値のことを 実現値 という。例えば、3 は、例 14.5 の確率変数  $D$  の実現値である (同様に 1 や 2 や 4 や 5 や 6 も  $D$  の実現値である)。

「ある確率変数が特定の範囲の実現値をとる」という現象は事象である。

例 14.7 「サイコロを 1 回投げて 3 が出る」という現象、言い換えれば、「 $D = 3$ 」という現象は、実際にサイコロを投げてみなければ、起きるかどうかはわからない。従って、事象である。この事象が起きる確率は、 $1/6$  である。すなわち、 $P(D = 3) = 1/6$  である。

「サイコロを 1 回投げて 3 以下の目が出る」というのも事象であり、起きる確率は  $1/2$  である。すなわち、 $P(D \leq 3) = 1/2$  である。(例おわり)

確率変数  $X$  の全ての実現値が  $x_1, x_2, \dots, x_n$  であるとき、

$$\sum_{k=1}^n P(X = x_k) = 1 \quad (14.24)$$

が必ず成り立つ。すなわち、確率変数について、各実現値をとる確率の総和は 1 である。証明: 「確率変数がどれかの実現値をとる」という事象の確率は、確率変数が各実現値をとる確率の総和である。一方、これは全事象なので、その確率は 1 である。 ■

式 (14.24) のように、慣習的に、確率変数はアルファベットの太文字で表し、実現値はアルファベットの細文字で表すことが多い。

#### 14.5 確率分布

ある確率変数の全ての実現値についてその実現値が起きる確率を対応させる関係のことを、確率分布 という。このとき、その確率変数は、その確率分布に 従う、という。

例 14.8 「1 から 6 までの整数値をいずれも  $1/6$  の確率でとる」というのはひとつの確率分布である。例 14.5 の確率変数  $D$  は、この確率分布に従う。(例おわり)

複数の確率変数が同一の確率分布に従うことがある。例えば 2 つのサイコロ A, B を投げる時、A, B それぞれが出す目の値を  $D_A, D_B$  とすると、 $D_A, D_B$  は互いに異なる確率変数だが (A が出す目と B の出す目は違うこともあり得る!)、同じ確率分布 (例 14.8 で説明した確率分布) に従う。

さて、コインを投げたとき、果たして表が出るか、裏が出るか? というような状況は、サッカーの PK 戦の先

\*<sup>6</sup>  $D$  は「サイコロ」の英語 dice の頭文字からとった。

\*<sup>7</sup> やってはいけません。

攻後攻を決める時だけでなく、人生や社会のいろんな場面で遭遇する。このように、ひとつの特定の事象が起きるか起きないか、ということまで単純化された試行のことを、ベルヌーイ試行という。言ってしまうと人生はベルヌーイ試行の連続である。志望校に合格するのかわからないのか、好きな人に告白して OK をもらうのかふられるのか、寝坊した時に電車で間に合うのか間に合わないのか。

ベルヌーイ試行の結果、その「特定の事象」が「起きる回数」は、1 か 0 かの実現値のみをとる確率変数である。その確率変数を  $X$  としよう。その「特定の事象」が起きる確率を  $p$  とすると ( $p$  は 0 以上 1 以下の適当な実数)、起きない確率は  $1-p$  なので、

$$\begin{cases} P(X=1) = p \\ P(X=0) = 1-p \end{cases} \quad (14.25)$$

となる。式 (14.25) は一種の確率分布であり、これを ベルヌーイ分布 という。例えば「コインを 1 回投げたとき、表が出る回数」は、ベルヌーイ分布に従う確率変数であり、コインが表裏対称にできていれば、 $p=0.5$  である。

同一条件でベルヌーイ試行を複数回、独立に行うことも、人生や社会ではよくある。例えば同じコインを 5 回投げる、ということは可能である。このとき、「表の出る回数」は、0 から 5 までの整数値を実現値とするような確率変数である。このように、互いに独立なベルヌーイ試行を複数回行ったときに、

$$X := \text{事象が起きる回数} \quad (14.26)$$

は、確率変数になる (この  $X$  は式 (14.25) の  $X$  とは違う意味である)。そのような確率変数  $X$  が従う確率分布を、2 項分布 といい、それを

$$B(n, p) \quad (14.27)$$

と書く ( $n$  はベルヌーイ試行の回数、 $p$  は各ベルヌーイ試行で事象が起きる確率である)。

ところで、上の議論で、 $k$  回目のベルヌーイ試行において事象が起きる回数 (といっても 1 か 0) を確率変数  $X_k$  で表すと、当然ながら  $X_k$  は式 (14.25) のようなベルヌーイ分布に従う。 $X_1$  から  $X_n$  までの総和が「 $n$  回のベルヌーイ試行で事象が起きる回数」になるので、式 (14.26) で定義される  $X$  を、

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (14.28)$$

と表すことができる。つまり、2 項分布に従う確率変数は、ベルヌーイ分布に従う複数の確率変数の和で表現できるのだ。この事実は後で使うときが来る。

では、2 項分布を具体的に求めてみよう：確率変数  $X$  が  $B(n, p)$  に従うとする。 $n$  回のベルヌーイ試行のうち、 $k$  個の特定の回で事象が起き、それ以外では起きないような場合の確率は、

$$p^k(1-p)^{n-k} \quad (14.29)$$

となる (例えば 5 回のベルヌーイ試行を行い、最初と最後の合計 2 回だけで事象が起き、残りの 3 回では起きなければ、 $p(1-p)(1-p)(1-p)p = p^2(1-p)^3$  となる)。ところが、我々はどの回で事象が起きるかには興味は無く、とにかく「合計  $k$  回起きる」ということ確率  $P(X=k)$  を知りたいのである (それが確率分布なのだ)。そこで、 $n$  回のベルヌーイ試行の中から  $k$  回を選び出し、その「 $k$  個の選ばれた回」だけで事象が起きるとすれば、その選び出し方は  ${}_n C_k$  通りある。それぞれが式 (14.29) という確率で発生するので、

$$P(X=k) = {}_n C_k p^k(1-p)^{n-k} \quad (14.30)$$

となる。

問 316 コインを 5 回投げたとき、表が 3 回出る確率は？

問 317 5 枚のコインを同時に投げたとき、3 枚が表、2 枚が裏になる確率は？

## 14.6 期待値

確率変数  $X$  について、それがとり得る全ての実現値のそれぞれに、それが起きる確率を掛け、総和をとったものを、 $X$  の 期待値 (expectation) と呼び、 $E[X]$  と書く。すなわち、 $x_1, x_2, \dots, x_n$  を確率変数  $X$  がとり得る全ての実現値とすると、

$$E[X] := \sum_{k=1}^n x_k P(X=x_k) \quad (14.31)$$

である。

問 318 期待値の定義式 (14.31) を 5 回書いて覚え

よ。その際、 $x_1, x_2, \dots, x_n$  の定義もきちんと書くこと。

問 319 A 君は、「期待値の定義を述べよ」という問に対して、式 (14.31) を正しく書いたが、「 $x_1, x_2, \dots, x_n$  は、 $n$  回行った試行の各結果の値」と書いた。これは正しいか？ 誤りだとしたら、それを A 君が納得するように説明せよ。単に「正しくは... だよ」と言っても、頑固者の A 君は、「意味的には同じじゃないのか？」と言い張るだろう。

例 14.9 例 14.5 の確率変数  $D$  の期待値は、

$$E[D] = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \dots + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5 \quad (14.32)$$

となる。(例おわり)

注：直感的には、期待値は、その確率変数が出してくる、「平均的な値」のようなものだ。実際、期待値のことを 平均 と呼ぶ人もいる。しかし、後で学ぶ「標本平均」という概念のことを平均と呼ぶ人もいる。単なる平均という言葉はまぎらわしいのでなるべく使わないのが賢明である。

問 320 サイコロを 1 回投げるとき、出る目の 2 乗の期待値を求めよ。

問 321 式 (14.25) で示したベルヌーイ分布に従う確率変数  $X$  について、次式を示せ：

$$E[X] = p \quad (14.33)$$

確率変数を定数倍したり定数を足したりしてできる確率変数は、どのような期待値を持つだろうか？ 今、確率変数  $X$  が  $x_1, x_2, \dots, x_n$  という実現値を、それぞれ  $p_1, p_2, \dots, p_n$  という確率でとるとする ( $n$  は 1 以上の整数)。任意の定数  $a, b$  について、 $Y = aX + b$  という確率変数を考える。 $Y$  は  $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$  という実現値を、それぞれ  $p_1, p_2, \dots, p_n$  という確率でとる。従って、

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{k=1}^n (ax_k + b)p_k = a \sum_{k=1}^n x_k p_k + b \sum_{k=1}^n p_k \\ &= aE[X] + b \end{aligned} \quad (14.34)$$

となる (ここで式 (3.86)、式 (3.87)、式 (14.31)、式 (14.24) を使った)。従って、次の定理が成り立つ：任

意の確率変数  $X$ 、定数  $a, b$  について、

$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad (14.35)$$

ところで、複数の確率変数を足したのもも確率変数である。例えば、2 つのサイコロがあって、「サイコロ A を投げて出る目の値」を  $D_A$ 、「サイコロ B を投げて出る目の値」を  $D_B$  とする。 $D_A$  も  $D_B$  も、それぞれ 1 から 6 までの実現値をとる確率変数である。ここで、「両者の値の合計」を  $S$  としよう。すなわち、 $S = D_A + D_B$  である。 $S$  は、「2 つのサイコロを投げて出る目の和」とも言える。これは、確率的にしか値は定まらないから、立派な確率変数である。同様の理由で、複数の確率変数を掛けたのもも確率変数である。

任意の 2 つの確率変数  $X, Y$  の和  $X + Y$  の期待値は、各確率変数の期待値の和に等しい。すなわち、

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \quad (14.36)$$

が成り立つ (定理)。これは、例えば  $X$  が何かのゲームの賞金で、 $Y$  が別の何かのゲームの賞金であり、2 つのゲームに参加してもらえそうな賞金総額は、各ゲームでもらえそうな賞金の合計に等しい、ということである。そう言われると、なんとなく直感で納得できるだろう。ところが、これは 2 つのゲームが独立でなくても成り立つ。すなわち、片方のゲームで好成績を出すと次のゲームが有利になる、というような仕組みが仮にあったとしても、結果的に賞金総額の期待値は、各ゲームの賞金の期待値を別個に判定したものの和になるのだ。

式 (14.36) の証明を以下に示す：今、 $X$  の実現値が  $x_1, x_2, \dots, x_n$  であり、 $Y$  の実現値が  $y_1, y_2, \dots, y_m$  だとする ( $n, m$  は 1 以上の整数で、 $n$  と  $m$  は互いに等しくてもよいし等しくなくてもよい)。 $X + Y$  の実現値は、

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 + y_1, & x_1 + y_2, & \dots, & x_1 + y_m \\ x_2 + y_1, & x_2 + y_2, & \dots, & x_2 + y_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n + y_1, & x_n + y_2, & \dots, & x_n + y_m \end{array}$$

という  $nm$  通りの値である (今は簡単のため、この中に重複する値は無いとする)。これらの全てに、それぞれが実現する確率をかけて足しあわせれば、 $X + Y$  の期待値が得られるはずだ (定義より)。今、スペースの節約のために、 $p_{i,j} := P(X = x_i \cap Y = y_j)$  とする ( $i, j$  は 1 以上

それぞれ  $n, m$  以下の整数)。すると,

$$E[X + Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i + y_j) p_{i,j} \quad (14.37)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i p_{i,j} + y_j p_{i,j}) \quad (14.38)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p_{i,j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j p_{i,j} \quad (14.39)$$

となる。ここで、式 (14.37) の根拠は式 (14.31) である。式 (14.37) の右辺の  $p_{i,j}$  の掛け算を括弧の中に入れたら式 (14.38) になる。式 (14.38) から式 (14.39) への根拠は P.42 式 (3.86) である。式 (14.39) の 1 項めについて考えよう:  $x_i$  は  $j$  には依存しないので、 $j$  に関する和においては  $x_i$  を定数とみなして、

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p_{i,j} = \sum_{i=1}^n x_i \left( \sum_{j=1}^m p_{i,j} \right) \quad (14.40)$$

とできる。ところが、この右辺の括弧の中の、 $\sum_{j=1}^m p_{i,j}$  は、「 $X$  は  $x_i$  という特定の実現値をとるが、 $Y$  はどんな実現値でもよい」という事象の確率なので、結局は  $P(X = x_i)$  に等しい。従って、式 (14.40) は、

$$= \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = E[X] \quad (14.41)$$

となる (最後の等号では式 (14.31) を使った)。同様の理屈で、式 (14.39) の 2 項めは、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j p_{i,j} &= \sum_{j=1}^m y_j \left( \sum_{i=1}^n p_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^m y_j P(Y = y_j) \\ &= E[Y] \end{aligned} \quad (14.42)$$

となる。式 (14.37)、式 (14.39)、式 (14.41)、式 (14.42) より、式 (14.36) が成り立つ。■

式 (14.36) は、3 つ以上の確率変数についても拡張できる。すなわち、 $X_1, X_2, \dots, X_n$  をそれぞれ確率変数として、次式が成り立つ (定理):

$$\begin{aligned} E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] \\ = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n] \end{aligned} \quad (14.43)$$

これは式 (14.36) を使えば簡単に証明できる。まず、

$$E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] \quad (14.44)$$

である。確率変数の和は確率変数なので、 $X_1 + X_2$  はひとつの確率変数である。それを  $Y$  と書こう。すると、式

(14.36) より、

$$E[Y + X_3] = E[Y] + E[X_3] \quad (14.45)$$

である。 $Y = X_1 + X_2$  を左辺に、 $E[Y] = E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$  を右辺に代入すれば、

$$E[X_1 + X_2 + X_3] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3]$$

となる。こんどは  $X_1 + X_2 + X_3$  をあらためて  $Y$  とおき、 $E[Y + X_4]$  を考え、... というふうに繰り返していけば、任意の  $n$  について式 (14.43) が示される。■

問 322 3 枚の 100 円玉を同時に投げ、表が出た 100 円玉は賞金としてもらえる、というゲームをする。賞金額の期待値を求めよ。

問 323 2 項分布  $B(n, p)$  に従う確率変数  $X$  について、次式を示せ:

$$E[X] = np \quad (14.46)$$

ヒント: 式 (14.28) と式 (14.43) を使う。

2 つの確率変数  $X, Y$  について、「 $X$  が実現値  $x$  をとる」という事象と、「 $Y$  が実現値  $y$  をとる」という事象が互いに独立である、ということが、全ての実現値の組み合わせ  $(x, y)$  について成り立つとき、2 つの確率変数  $X$  と  $Y$  は互いに独立である、という (定義)。このとき、2 つの事象が独立のときに必ず成り立つ式である P.200 式 (14.23) を使えば、

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \quad (14.47)$$

が、全ての  $(x, y)$  について成り立つ。式 (14.47) を「確率変数の独立」の定義とする本もある。

さて、以下の定理が成り立つ: 互いに独立な確率変数  $X, Y$  について、

$$E[XY] = E[X]E[Y] \quad (14.48)$$

注: 式 (14.48) は式 (14.36) に似てはいるが、式 (14.36) には「確率変数が互いに独立」という条件は付いていなかったことに注意せよ。

式 (14.48) の証明には、式 (14.37) を流用して、和を積に変えればよい:

$$E[XY] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{i,j} \quad (14.49)$$

ここで、 $p_{i,j} = P(X = x_i \cap Y = y_j)$  だが、 $X, Y$  が独立だから、式 (14.47) が使えるので、

$$P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \quad (14.50)$$

となる。従って、 $p_{i,j} = P(X = x_i)P(Y = y_j)$  となる。これを式 (14.49) に代入すると、

$$E[XY] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j P(X = x_i) P(Y = y_j) \quad (14.51)$$

となる。 $j$  を含まない部分は  $j$  に関する  $\Sigma$  の前に出せるから、

$$E[XY] = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) \sum_{j=1}^m y_j P(Y = y_j) \quad (14.52)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) E[Y] \quad (14.52)$$

$$= E[X] E[Y] \quad (14.53)$$

となり、式 (14.48) を得る。 ■

確率変数が互いに独立でないとき、式 (14.48) が成り立たないことを、例を通して見てみよう。

例 14.10 2枚の100円玉を順に投げ、表が出た100円玉は賞金としてもらえる、というゲームをする。ただし、1枚めで表が出たら、2枚めは無条件に(例え裏が出ても)もらえるとする。1枚めの賞金を  $X$  円、2枚めの賞金を  $Y$  円とする。 $X$  も  $Y$  も、実現値として0か100をとり得る確率変数である。 $E[X] = 50$  である。また、 $Y = 0$  となるのは、1枚めも2枚めも裏のときであって、その確率は  $1/4$  だから、

$$E[Y] = 0 \times \frac{1}{4} + 100 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 75 \quad (14.54)$$

である。従って、

$$E[X]E[Y] = 50 \times 75 = 3750 \quad (14.55)$$

である。

一方、 $XY$  は実現値として0か10000をとる確率変数である。 $XY = 10000$  となるのは  $X = 100$  かつ

$Y = 100$  のときであり、まず  $X = 100$  になるために1枚めで表が出なければならない。ところが1枚めで表が出れば、2枚めの表裏によらず自動的に  $Y = 100$  となるルールだった。つまり、 $XY = 10000$  という事象は「1枚めが表」という事象と同じである。従って、

$$P(XY = 10000) = \frac{1}{2} \quad (14.56)$$

$$P(XY = 0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (14.57)$$

である。従って、

$$E[XY] = 0 \times \frac{1}{2} + 10000 \times \frac{1}{2} = 5000 \quad (14.58)$$

である。

式 (14.55) と式 (14.58) より、明らかに、 $E[XY] \neq E[X]E[Y]$  である。(例おわり)

問 324 上のゲームで、

- (1)  $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$  が成り立つことを示せ。
- (2) 「1枚めで表が出たら、2枚めは無条件に(例え裏が出ても)もらえる」というルールを廃止したら、 $E[XY] = E[X]E[Y]$  が成り立つことを示せ。

このように、式 (14.48) は、 $X$  と  $Y$  が独立でない場合には、成り立たないことがある。その典型的な例は、 $Y$  が  $X$  に等しい場合である。すなわち、 $E[X^2] = (E[X])^2$  とはならないことがある。これは、問 320 から明らかだろう ( $E[D^2] = 15.2$ ,  $(E[D])^2 = 3.5^2 = 12.25$ )。一方、式 (14.36) は  $Y = X$  のときも成り立つ。すなわち、 $E[2X] = 2E[X]$  である。これは式 (14.35) で  $a = 2$ ,  $b = 0$  とした式である。

君は、こういう話を、「それがどうした?」という気持ちで読むかもしれない。しかし、式 (14.35)、式 (14.43)、式 (14.48) は統計学全般を組み立てるための礎石である。特に、確率変数が互いに独立のときに式 (14.48) が成り立つ、というのは、後で述べる「分散の加法性」につながる重要な礎石なのだ。

## 14.7 確率変数の分散と標準偏差

確率変数  $X$  の期待値  $E[X]$  を  $\mu$  と書こう。 $\mu$  は定数なので、 $X - \mu$  は確率変数である(確率変数に定数を足したのも確率変数)。従って、その2乗、つまり  $(X - \mu)^2$  も確率変数である(確率変数を何乗かしたもの

も確率変数)。この確率変数  $(X - \mu)^2$  の期待値を  $X$  の分散 (variance) と呼ぶ。すなわち、確率変数  $X$  の分散  $V[X]$  は、次式で定義される (ただし  $\mu$  は  $X$  の期待値):

$$V[X] := E[(X - \mu)^2] \quad (14.59)$$

例 14.11 「サイコロを 1 回振って出る目の値  $D$ 」の分散を求めてみよう。 $D$  の期待値を  $\mu$  とすると、P.203 式 (14.32) より、 $\mu = E[D] = 3.5$  である。従って、式 (14.59) より

$$\begin{aligned} V[D] &= E[(D - \mu)^2] \\ &= (1 - 3.5)^2 \times \frac{1}{6} + (2 - 3.5)^2 \times \frac{1}{6} + \\ &\quad \dots + (6 - 3.5)^2 \times \frac{1}{6} = 2.916\dots \end{aligned}$$

となる。(例おわり)

さて、確率変数  $X$  の分散の (正の) 平方根を  $X$  の標準偏差 (standard deviation) と呼ぶ (定義)。すなわち、確率変数  $X$  の標準偏差  $\sigma[X]$  とは、

$$\sigma[X] := \sqrt{V[X]} \quad (14.60)$$

のことである。

例 14.12 例えば、「サイコロを 1 回振って出る目の値  $D$ 」の標準偏差を求めてみよう。既に  $V[D] = 2.916\dots$  とわかっているので、

$$\sigma[D] = \sqrt{V[D]} = \sqrt{2.916\dots} = 1.707\dots \quad (14.61)$$

となる。(例おわり)

ところで、分散とか標準偏差というのは、一体、何を意味するものだろうか? 何回も試行すれば、多くの場合、 $X$  の値は、期待値を中心とする、ある程度の広がりの中に落ちるだろう。分散とか標準偏差は、その期待値を中心とする「広がり」を表すものだ。

式 (14.59) に戻ると、 $X - \mu$  は、「確率変数と、その期待値との差」である。要するに、「期待値からどれだけ外れているか」である。期待値より小さければマイナス、大きければプラスである。ところがそれを 2 乗すると、つまり  $(X - \mu)^2$  にすると、 $X$  が期待値より小さくても大きくてもプラスになる。その期待値をとって  $(V[X])$ 、さらにその平方根をとれば  $(\sigma[X])$ 、その結果は、「期待値からどのくらい外れるかの期待値」のような意味を持つことがわかるだろう。

ちょっと待て、「期待値からどのくらい外れるかの期待値」を知りたいなら、わざわざ 2 乗したり平方根をとったりしなくても、

$$E[|X - \mu|] \quad (14.62)$$

を求めればいいじゃないか、と思う人もいるだろう。それはごく自然な発想である。実際、サイコロの例でこれを求めてみると、

$$\begin{aligned} E[|D - \mu|] &= |1 - 3.5| \times \frac{1}{6} + |2 - 3.5| \times \frac{1}{6} + \dots \\ &\quad + |6 - 3.5| \times \frac{1}{6} = 1.5 \end{aligned}$$

となる。上で計算した  $\sigma[D] = 1.707\dots$  は、この値に近いとは言えるが、一致はしていない。それでもなお、数学や統計学では、式 (14.62) はほとんど使わず、かわりに式 (14.60) を使うのだ。その理由は、一言で言えば、式 (14.60) のほうが数学的に扱いやすいからなのだ。式 (14.62) は、意味はわかりやすいが、その定義の中に絶対値が入っている。絶対値は、概念的には難しいものではないが、数学的に処理するときには、常に、絶対値の内側の正負について場合分けして考える必要がある。つまり、かえってめんどくさいのだ。それが数学や統計学の論理展開において、妨げになるのだ。

さて、話を戻すと、上の例で、 $D$  の期待値が 3.5、標準偏差が約 1.7、ということは、だいたい、 $3.5 \pm 1.7$  の範囲、つまり 1.8 から 5.2 の範囲内に  $D$  の値が収まることが多いというふうに解釈してもよい。ただし、サイコロの目は整数だから 1.8 とか 5.2 という小数点以下には意味はないので、ここでは四捨五入して、「2 から 5 までの範囲」としよう。これが、上で述べた「期待値を中心とする、ある程度の広がり」である。無論、1 や 6 が出るのは、2 や 3 が出るのと同じような確率だが、目の値が期待値からどれだけ離れた範囲の中におさまるかという観点では、最小値である 1 とか最大値である 6 のように期待値から大きく外れるケース (2 ケース) よりも、2 から 5 までのように期待値に「そこそこ近い」ケースのほうが多い (4 ケース)。従って、出る目の値の大小にこだわらなような場合は、1 や 6 が出ることはあまり期待せず、せいぜい 2 から 5 の間を期待しましょう、という、常識的な解釈に落ち着くのだ。

## 14.8 期待値・分散・標準偏差と次元

ここで、これまで見た量を、次元という観点で見なおしてみよう。確率変数の実現値は、何かの数量なのだから、次元を持つ量、すなわち、何らかの単位が必要な量かもしれない。例えば、「資源生を任意に1人連れてきて、履いている靴のサイズを調べるときの、得られる値」という確率変数  $X$  の実現値は、約 20 cm から約 30 cm までの値、つまり「長さ」という次元を持つ量である。

問 325 このとき、

- (1)  $X$  が実現値 25.0 cm をとる確率  $P(X = 25.0 \text{ cm})$  の次元は?
- (2) 期待値  $E[X]$  の次元は?
- (3) 分散  $V[X]$  の次元は?
- (4) 標準偏差  $\sigma[X]$  の次元は?

これでわかったように、期待値と標準偏差は、確率変数 (の実現値) と同じ次元を持つので、互いに足し引きしたり、大小関係を比べることができる。ところが、分散は次元が異なるので、期待値や確率変数 (の実現値) と足し引きしたり大小関係を比べることができない。前節で、「分散とか標準偏差は、その期待値を中心とする広がり の程度を表す」と述べたが、実は、分散は、その目的にはあまり適していないのだ。その目的に適しているのは標準偏差である。分散の平方根をわざわざとって標準偏差という量を作るのは、そのような目的があるからである。しかし、確率論や統計学の理論構築においては、標準偏差よりも分散の方が便利であり、重要である。それについて次節で調べよう。

## 14.9 分散の性質

さて、確率変数  $X$  と、任意の定数  $a, b$  によって  $aX + b$  とあらわされる確率変数の分散や標準偏差を考えてみよう。式 (14.59) で  $X$  のかわりに  $aX + b$  とすれば、

$$\begin{aligned} V[aX + b] &= E[(aX + b - E[aX + b])^2] \\ &= E[(aX + b - (aE[X] + b))^2] \\ &= E[(aX + b - aE[X] - b)^2] \\ &= E[(aX - aE[X])^2] \\ &= E[a^2(X - E[X])^2] \\ &= a^2 E[(X - E[X])^2] \\ &= a^2 V[X] \end{aligned} \quad (14.63)$$

ここで P.203 式 (14.35) を使った。式 (14.60) と式 (14.63) より、

$$\begin{aligned} \sigma[aX + b] &= \sqrt{V[aX + b]} \\ &= \sqrt{a^2 V[X]} \\ &= |a| \sqrt{V[X]} = |a| \sigma[X] \end{aligned} \quad (14.64)$$

このように、確率変数を定数 ( $a$ ) 倍すると、標準偏差がその定数 (の絶対値) 倍になるが、確率変数に定数 ( $b$ ) を足すことは、分散や標準偏差には影響を与えない。

では、2つの確率変数  $X, Y$  の和であらわされる確率変数  $X + Y$  の分散はどうなるだろうか?

$$\begin{aligned} V[X + Y] &= E[(X + Y - E[X + Y])^2] \\ &= E[(X + Y - (E[X] + E[Y]))^2] \\ &= E[((X - E[X]) + (Y - E[Y]))^2] \\ &= E[(X - E[X])^2 + (Y - E[Y])^2 \\ &\quad + 2(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[(X - E[X])^2] + E[(Y - E[Y])^2] \\ &\quad + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= V[X] + V[Y] + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \end{aligned} \quad (14.65)$$

ここで P.204 式 (14.43), P.203 式 (14.35) を使った。式 (14.65) の最後の項の中の  $E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$  は、以下のように変形できる:

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])(Y - E[Y])] &= E[XY - E[X]Y - E[Y]X + E[X]E[Y]] \\ &= E[XY] - E[E[X]Y] - E[E[Y]X] + E[E[X]E[Y]] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] - E[Y]E[X] + E[X]E[Y] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned} \quad (14.66)$$

ここで、もし  $X$  と  $Y$  が互いに独立ならば、P.204 式 (14.48) より、 $E[XY] = E[X]E[Y]$  となるので、式 (14.66) は 0 になる。式 (14.65) 式 (14.65) は次式のようになる:

独立な確率変数の分散の加法性

$$\begin{aligned} &X, Y \text{ が互いに独立な確率変数なら,} \\ &V[X + Y] = V[X] + V[Y] \end{aligned} \quad (14.67)$$

この式 (14.67) は極めて重要な定理である。統計学の重要な考え方のほとんどがこの定理に立脚していることを、君はいずれ知るだろう。

式 (14.67) は、3 個以上の確率変数についても拡張できる。すなわち、 $X_1, X_2, \dots, X_n$  が互いに独立な確率

変数なら,

$$V[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = V[X_1] + V[X_2] + \cdots + V[X_n] \quad (14.68)$$

が成り立つ。なぜか?  $X_1 + X_2$  を  $X$ ,  $X_3$  を  $Y$  とみなして式 (14.67) を使えば, 3 個の確率変数について式 (14.68) が成り立つ。これを繰り返せば, 確率変数が何個であっても式 (14.68) が成り立つことがわかる。

問 326 3 枚の 100 円玉を同時に投げ, 表が出た 100 円玉は賞金としてもらえる, というゲームをする。賞金額の分散と標準偏差を求めよ。

問 327 式 (14.25) で示したベルヌーイ分布に従う確率変数  $X$  について, 次式を示せ:

$$V[X] = p(1-p) \quad (14.69)$$

問 328 2 項分布  $B(n, p)$  に従う確率変数  $X$  について, 次式を示せ:

$$V[X] = np(1-p) \quad (14.70)$$

ヒント: 式 (14.28) と式 (14.68) を使う。

よくある質問 149 かっこのは () と [] で何か違うのですか? ... 期待値や分散のときの記法ね。どっちでもいいのですが, このテキストでは [] を使います。() だったら, ただの関数のように見えてしまう。

よくある質問 150 なんだかわからなくなってきました…。…ここで「わからない」という人は, たいいてい, 説明をちゃんと読まずに斜め読み・流し読みしています。大事なことはぜんぶ書いてあるよ。まずしっかり丁寧に, 説明を読もう!

よくある質問 151 でも, 文や文字が多くて, 読むのが疲れま… …君が勉強しているのは, それなりに高度な概念なので, どうしても理屈っぽくなるし, それを表現するには文章を使う必要があるのです。だから, 数学には国語力がとても大切。活字を読むのが面倒臭かったり苦手であるような人は, 数学はできません。高校までとは違うのです。

## 14.10 共分散と相関係数

ところで, 式 (14.65) の最後の項の中に現れた,  $E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$  という量を,  $X$  と  $Y$  の 共分散 (covariance) と呼び,  $\text{Cov}(X, Y)$  と書く (定義):

$$\text{Cov}(X, Y) := E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \quad (14.71)$$

これは式 (14.66) で見たように,  $E[XY] - E[X]E[Y]$  に等しい。そして, もし  $X$  と  $Y$  が互いに独立なら,  $E[XY] = E[X]E[Y]$  だから  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  となる。しかし  $X$  と  $Y$  が互いに独立でなければ,  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$  となる可能性がある。

共分散をそれぞれの確率変数の標準偏差で割った量:

$$\rho_{XY} := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma[X]\sigma[Y]} \quad (14.72)$$

のことを, 確率変数  $X, Y$  の 相関係数 と呼ぶ (定義)。共分散や相関係数は, 2 つの確率変数が「どのくらい独立から遠いか」を表す指標として使われる。

ところで, 確率変数  $(X - E[X])(Y - E[Y])$  の次元は,  $X$  の次元と  $Y$  の次元の積である。従って, 共分散の次元も,  $X$  の次元と  $Y$  の次元の積である。ところが, 相関係数の分母には  $X$  と  $Y$  の標準偏差の積があり, その次元も,  $X$  の次元と  $Y$  の次元の積である (前に見たように, 標準偏差の次元は確率変数の次元に等しいので)。従って, 相関係数は無次元の量である。

## 14.11 離散的確率変数と連続的確率変数

例 14.13 時計の秒針が指す値は 0 秒以上 60 秒未満の連続的な値である。君が気がぐれに時計を見たときに秒針が指す値を  $X$  秒としよう。  $X$  は 0 以上 60 未満の値をとるが, それはあらかじめ予測できないので,  $X$  は一種の確率変数とみなせる。(例おわり)

問 329 例 14.13 を考える。

- (1) もし, 秒針が 1 秒刻みでコッチコッチと動くならば,  $X$  の実現値は 0, 1, 2, ..., 59 の 60 通りである。このとき,  $P(X = 30)$  を求めよ。
- (2) もし, 秒針が 0.1 秒刻みで動くならば,  $X$  の実現値は 0, 0.1, 0.2, ..., 59.9 の 600 通りである。このとき,  $P(X = 30)$  を求めよ。
- (3) もし, 秒針が 0.01 秒刻みで動くならば,  $P(X = 30)$  はどうなるか?
- (4) 秒針が  $10^{-n}$  秒刻みで動くならば ( $n$  は任意の自然

数),  $P(X = 30)$  はどうなるか?

- (5) 秒針がスーッと滑らかに動くならば,  $P(X = 30)$  はどうなるか?

時計の秒針は, 君が見ていようがいまいが, 1 分間の間に 1 回は必ず 30 秒ぴったりを示す。だから, 君がその瞬間を目撃するという事象は, 起こり得ないものではない。にもかかわらず, 秒針が滑らかに動くときは, 前問(5)で確認したように, その確率は 0 である。すなわち, 「確率が 0」だからといって, 必ずしも「その事象が起こり得ない」ということにはならないのだ!

残念ながら, 小中学校の教科書の中には, 「確率が 0 のことは絶対に起こらない」と書いてあるものがある。明確に否定しておこう。そのような教科書は間違っているのだ。「絶対起こらない事象の確率は 0」とは言えるが, 「確率が 0 の事象は絶対起こらない」とは言えないのだ。

よくある質問 152 納得がいきません。秒針がなめらかに動くときも, 30 秒を指す確率は 0 じゃないと思います。... 秒針が滑らかに動くとき, ぴったり 30 秒を指すというのは, 極めて希な事象なのです。実際のところぴったり 30 秒を指した, と思っても, それはもしかして 30.01 秒かもしれないし, 30.000000001 秒かもしれないのです。

よくある質問 153 まだ納得がいきません。0 に非常に近いけど, 0 ではない数だと思います。... ではそれが 0 ではない, 正の数  $a$  だとしましょう。秒針はどの値も同じ確からしさで指しますが, 秒針が指す可能性のある値 (実現値) は無限個です。正の数  $a$  に無限をかけると無限になってしまいます。これは「全事象の確率は 1」(式 (14.7)) に反します。

よくある質問 154 まだ納得がいきません。0 に限りなく近いけど, 0 ではないと思います。... そうですか。なら, そう思っているでもいいですよ。生物資源学類の数学では, おそらく不都合は起きないでしょう。

よくある質問 155 なんですか, その微妙な言い方! ... 実はここは, 数学的には説明が難しい, 本当に微妙なところなのです。どうしても気になる人は, 本格的な確率論か, 「ルベーグ積分」という数学を勉強してみるとよいでしょう。でも, そっちに行きすぎると, 資源の勉強 (環境とか農業とか) に戻って来れなくなるので気をつけて!

前問の (1), (2), (3), (4) では, いずれも,  $X$  の実現値は有限個しかない。ある実現値と, その隣の実現値の間には, 明らかにギャップがある。このように, 実現値が有限個しかない確率変数を, 離散的確率変数 という

(「離散的」とは, とびとびの値のことである)。ところが (5) では, 実現値は連続的であり, 0 以上 60 未満のいかなる実数もとりに得る。このように実現値が連続的であるような確率変数を, 連続的確率変数 という\*8。

## 14.12 確率密度関数・確率分布関数

前節で見たように, 連続的確率変数は, 特定の実現値をとる確率が 0 になってしまう (ことがある) ので, その確率分布, すなわち「実現値と確率の対応関係」は「どの実現値についても確率は 0」になってしまう。これは無意味である。そこで, 連続的確率変数については, その「確率分布」を違う形で定義し直すのだ。

例 14.13 を続けて考えよう。秒針が滑らかに動くとき,  $X$  が特定の実現値をとる確率が 0 であっても, その値を含めた一定の範囲の中のどれかの値 (例えば 30 と 30.5 の間の値) をとる確率は, 0 でないかもしれない。多くの場合, その範囲が十分に狭ければ, その範囲内の値をとる確率は, その範囲の広さに比例すると考えることができるだろう。すなわち, 連続的な値をとる確率変数  $X$  が,  $dx$  を十分 0 に近い正の値として,  $x < X \leq x + dx$  の範囲をとる確率は, 適当な実数  $a$  によって

$$P(x < X \leq x + dx) = a dx \quad (14.73)$$

と表されると考える。この  $a$  は  $x$  の関数だろう。つまり, 何らかの関数  $f(x)$  によって,

$$P(x < X \leq x + dx) = f(x) dx \quad (14.74)$$

と表すことができるはずだ。この  $f(x)$  を  $X$  の 確率密度関数 (probability density function) と呼ぶ。そして, 連続的な確率変数の確率分布は, このように「幅を持った実現値の範囲」と確率との対応関係である, と再定義しよう。それは, 確率密度関数によって具体的に表現することができるのだ。

問 330 確率変数  $X$  の確率密度関数を  $f(x)$  とする。 $a < b$  として, 次式を示せ\*9:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad (14.75)$$

確率密度関数は, 多くの場合, 図 14.1 のように, 山型のグラフになる (ピークはひとつとは限らず, 複数になることもある)。横軸は実現値, 縦軸はその「出やすさ」

\*8 連続型確率変数ともいう。

\*9 本によっては, これを確率密度関数の定義とするものもある。

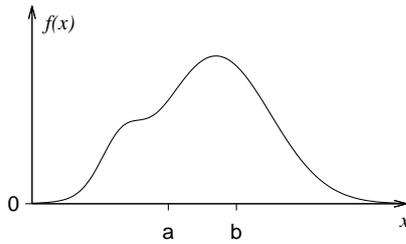
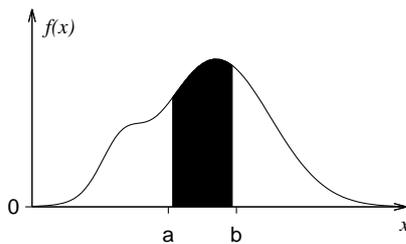


図 14.1 確率密度関数の例。

を表す。イメージ的には、図 14.2 のように横軸の  $a$  から  $b$  の間で、グラフと  $x$  軸に挟まれた部分 (図で塗りつぶされた部分) の面積が、「 $a$  から  $b$  までの間の実現値が出る確率」である (それを数式で表現するのが式 (14.75) である)。といっても、縦軸の値そのものが確率を表すのではないことに注意せよ。なお、確率は負になることはないので、確率密度関数のグラフは  $x$  軸より下に来ることはない。

図 14.2 黒く塗りつぶされた面積が、式 (14.75)、つまり  $P(a < X \leq b)$  に相当する。

さて、いかなる連続的確率変数も、その確率密度関数  $f(x)$  について

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (14.76)$$

である。なぜならば、上の式の左辺は、 $X$  が  $-\infty$  から  $\infty$  の間の値をとる確率だが、そもそも  $X$  は「 $-\infty$  から  $\infty$  の間」以外の値をとりようがないので、これは  $X$  がとりうる全ての値についての確率を足し算したものに他ならない。それは全事象に対応するので、言うまでもなく 1 である<sup>\*10</sup>。

問 331 例 14.13 で秒針が滑らかに動く場合、

- (1)  $X$  の確率密度関数  $f(x)$  を求めよ。ヒント: 式 (14.75) で  $a = 0$ ,  $b = 60$  と考える。その場合、

<sup>\*10</sup> 式 (14.76) は、離散的確率変数に関する式 (14.24) を、連続的確率変数に関して言い換えたものだ。

式 (14.75) の左辺はどのような値であるべきだろう? また、右辺はどのように積分できるだろう?

- (2) それを用いて、 $P(30 < X \leq 30.1)$  を求めよ。ヒント: 式 (14.74) を使う。  $dx = 30.1 - 30 = 0.1$

$x$  を任意の実数とする。確率変数  $X$  が、ある値  $x$  以下であるような確率、すなわち  $P(X \leq x)$  を考える。これは  $x$  の関数とみなすことができる。これを確率分布関数(probability distribution function) と呼ぶ。すなわち、確率変数  $X$  の確率分布関数  $F(x)$  は、

$$F(x) := P(X \leq x) \quad (14.77)$$

である (定義)。

例 14.14 サイコロを振って出た目の値  $D$  は確率変数である。 $x$  を任意の実数とする。 $D$  の確率分布関数  $F(x)$  は、以下のような関数である:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \text{ のとき} \\ 1/6 & 1 \leq x < 2 \text{ のとき} \\ 2/6 & 2 \leq x < 3 \text{ のとき} \\ 3/6 & 3 \leq x < 4 \text{ のとき} \\ 4/6 & 4 \leq x < 5 \text{ のとき} \\ 5/6 & 5 \leq x < 6 \text{ のとき} \\ 1 & 6 \leq x \text{ のとき} \end{cases} \quad (14.78)$$

(例おわり)

確率分布関数は、確率変数が離散的だろうが連続的だろうが、お構いなしに定義できる。しかし、確率密度関数は、離散的確率変数には定義できず<sup>\*11</sup>、連続的確率変数についてのみ、定義できる。もし  $X$  が連続的確率変数なら、確率分布関数は、式 (14.75) において  $a = -\infty$ ,  $b = x$  としたもので、

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (14.79)$$

が成り立つ。

図 14.3 に確率分布関数の例を示す。これは図 14.1 で例示した確率密度関数  $f(x)$  に対応する確率分布関数  $F(x)$  である。両者の間には、式 (14.79) の関係がある。この図のように、一般に、確率分布関数は、左にいくと ( $x$  が  $-\infty$  に行くと) 0 に近づき、右に行くと ( $x$  が  $\infty$  に行くと) 1 に近づき、右肩上がり (単調増加) の関数である。

<sup>\*11</sup> ここでは説明しないが、ディラックのデルタ関数という、拡張された関数概念を考えれば、離散的確率変数にも、確率密度関数を定義できる。

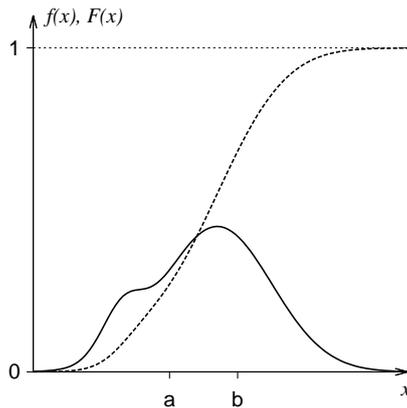


図 14.3 図 14.1 の確率密度関数  $f(x)$  (実線) と、それに対応する確率分布関数 (太い点線)。

問 332 連続的確率変数  $X$  に関する確率密度関数  $f(x)$  と確率分布関数  $F(x)$  について、次式を示せ。

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \quad (14.80)$$

式 (14.80) から明らかのように、連続的確率変数については、確率分布関数は確率密度関数の原始関数 (のひとつ) であり、確率密度関数は確率分布関数の導関数である\*12。

問 333 確率密度関数とは何か? 確率分布関数とは何か?

問 334 確率変数  $X$  の確率分布関数を  $F(x)$  であるとする。  $x_1 < x_2$  として、次式を示せ:

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad (14.81)$$

式 (14.81) において、左辺は  $X$  が  $x_1$  から  $x_2$  の間の値をとる確率だから、それは 0 以上である (少なくともマイナスではない)。従って、

$$0 \leq F(x_2) - F(x_1), \quad \text{すなわち、} \quad F(x_1) \leq F(x_2)$$

である。つまり、確率分布関数  $F(x)$  は、 $x$  が増えるときほとんど増えるような関数である (これが、グラフを描くと、必ず右肩上がりになる理由だ)。

式 (14.81) を使えば、連続的確率変数の確率分布を表すことができる。つまり、確率分布関数は、連続的確率

変数の確率分布の表し方のひとつなのだ。

注 1: 確率分布関数と確率分布を混同する人がいる。上記のように、確率分布関数は、確率分布を表す表し方のひとつである。確率分布は実現値と確率の対応関係であり、それを「ある値以下になる確率」という形で表すのが確率分布関数である。

注 2: 連続的確率変数の確率分布は、確率密度関数を使っても表現できるし、確率分布関数を使っても表現できる。どちらを使ってもよいのだ。確率密度関数の方が直感的にはわかりやすいが、確率分布関数の方が数学的に精密な理論に適する。

注 3: 式 (14.74) や式 (14.79) 等の中にある  $P()$  の中の不等式で、不等号が  $\leq$  だったり  $<$  だったりした。これらのどちらにすべきかは、実はどうでもよい。というのも、もし等号をつけるのなら、その境目にあたる値も起きるような事象を考えることになるのだが、既に学んだように、連続的な確率変数が特定の値をとる確率は、多くの場合は 0 であると考えてよい (そうでないような場合もありえるが、それは高度な数学や確率論になるので君は今は無視してよい)。従って、不等号に等号をつけようがつけまいが、確率には実質的に影響しないのだ。

## 14.13 連続的確率変数の期待値・分散・標準偏差・共分散・相関係数

確率変数の期待値とは、「実現値にその確率を掛けたものの総和」と定義された。これは離散的確率変数には OK だが、連続的確率変数なら、特定の値をとる確率は 0 になったりするので、具合が悪い。そこで、連続的確率変数  $X$  の期待値  $E[X]$  を、

$$E[X] := \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad (14.82)$$

と定義しなす。  $f(x)$  は、  $X$  の確率密度関数である。

例 14.15 例 14.13 の  $X$  について、その確率密度関数は、問 331 で考えたように、  $0 \leq x < 60$  で  $f(x) = 1/60$  であり、それ以外で  $f(x) = 0$  である。このとき、

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_0^{60} \frac{x}{60} dx = \left[ \frac{x^2}{120} \right]_0^{60} = 30$$

となる。これは、秒針が 1 秒おきの値を離散的にとる場合の期待値と一致することがわかるだろう。(例おわり)

期待値が定義されれば、あとは離散的確率変数と同じような話が成り立つ。例えば、証明は省くが、式 (14.35)、式 (14.36)、式 (14.43)、式 (14.48) などは連続的確率変

\*12 おおざっぱに言えば、統計データのヒストグラムが確率密度関数になり、累積頻度分布が確率分布関数になる。

数でも成り立つ。

連続的確率変数  $X$  の分散とは、P.206 式 (14.59) と同様に、

$$V[X] := E[(X - \mu)^2] \quad (14.83)$$

と定義する。ここで、 $\mu$  は、 $X$  の期待値である。また、P.206 式 (14.60) と同様に、分散の平方根、すなわち、

$$\sigma[X] := \sqrt{V[X]} \quad (14.84)$$

を標準偏差と定義する。

離散的確率変数に関して成り立った多くの定理、すなわち、式 (14.36)、式 (14.43)、式 (14.48)、式 (14.63)、式 (14.64)、式 (14.65)、式 (14.67)、式 (14.68) は、連続的確率変数でも成り立つ（証明は省略する）。また、連続的確率変数でも共分散と相関係数を、離散的確率変数の場合と同じ式（式 (14.71)、式 (14.72)）で定義する。

例 14.16 連続的に動く秒針が指す値を  $X$  秒とする。この連続的確率変数  $X$  の分散を求めてみよう。既に見たように、 $X$  の期待値は  $\mu = E[X] = 30$  である。分散は、

$$\begin{aligned} V[X] &= E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &= \int_0^{60} \frac{(x - 30)^2}{60} dx = 300 \end{aligned}$$

となる。標準偏差はこの平方根なので、 $\sqrt{300} = 17.3 \dots$  となる。（例おわり）

問 335  $c$  を実数、 $a$  を正の実数とする。確率変数  $X$  は、 $c - a$  から  $c + a$  の間の値を一様にとり、それ以外の範囲の値をとらないとする\*<sup>13</sup>。

- (1)  $X$  の確率密度関数は、 $c - a \leq x \leq c + a$  で  $1/(2a)$ 、それ以外で 0 となることを示せ。
- (2)  $E[X] = c$  となることを示せ。
- (3)  $V[X] = a^2/3$  となることを示せ。
- (4)  $\sigma[X] = a/\sqrt{3}$  となることを示せ。

\*<sup>13</sup> この問題は、「物理学実験 1 テキスト」P.9 の問題 3、4 に相当する。

#### 14.14 誤差伝播の法則

以上の話は、実際の実験や測定で得られたデータの解析に、非常に役に立つ。

例として、2 つの地点（点 A と点 B）の間の距離を巻尺で測ることを考える。この巻尺は少し短すぎて、この 2 地点間をいちどに測ることはできない。そこで、線分 AB の上のどこかに点 C を設定して、AC 間の距離と CB 間の距離をそれぞれ測る。

AC 間の距離の真値を  $L_A$ 、CB 間の距離の真値を  $L_B$  とする。AB 間の距離の真値は、当然、 $L_A + L_B$  である。ところが、測定には誤差がつきものなので、実際に得られる測定値は、測定のたびに微妙に違う値になり、それはあらかじめ予測できるものではない。つまり、測定値とは、確率変数なのだ。

いま、AC 間の距離の測定値を確率変数  $X_A$  とし、CB 間の距離の測定値を確率変数  $X_B$  とする。

もし巻尺の目盛が、偏った狂い（つまり実際の 1 m よりも巻尺の 1 m のほうが常に「長すぎ」もしくは「短すぎ」のようなこと\*<sup>14</sup>）が無ければ、 $X_A$  の期待値は  $L_A$ 、 $X_B$  の期待値は  $L_B$  に一致するはずだ：

$$E[X_A] = L_A \quad (14.85)$$

$$E[X_B] = L_B \quad (14.86)$$

我々は、AB 間の距離を、 $X_A + X_B$  で測定（推定）するのだが、当然、 $X_A + X_B$  も確率変数であり、その期待値は、式 (14.43) より

$$E[X_A + X_B] = E[X_A] + E[X_B] = L_A + L_B \quad (14.87)$$

となり、実際の AB 間に一致するはずだ。

では、これらの測定値の分散や標準偏差はどうなるだろう？ 既に述べたように、標準偏差は、確率変数が期待値の周りにどれだけばらつくかの指標である。つまり、測定値の標準偏差とは、いわば「誤差」のようなものだ\*<sup>15</sup>。では、 $X_A$  に含まれる誤差（ $X_A$  の標準偏差）や  $X_B$  に含まれる誤差（ $X_B$  の標準偏差）は、どのようにして  $X_A + X_B$  の誤差（ $X_A + X_B$  の標準偏差）に効くのか？ それを教えてくれるのが式 (14.67) である。すなわち、

$$V[X_A + X_B] = V[X_A] + V[X_B] \quad (14.88)$$

\*<sup>14</sup> このようなことがあれば、測定値は常に真値より大きめか小さめの片方に偏った値を出すだろう。そのような誤差を「系統誤差」と呼ぶ。

\*<sup>15</sup> 厳密には、これを「不確かさ」と呼び、「誤差」と区別する。

である。分散は標準偏差の 2 乗だから、

$$(\sigma[X_A + X_B])^2 = (\sigma[X_A])^2 + (\sigma[X_B])^2 \quad (14.89)$$

とも書ける。つまり、AB 間の誤差の 2 乗は、AC 間の誤差と CB 間の誤差のそれぞれの 2 乗を足したものだ。誤差そのものが足されるのではなく、誤差の 2 乗が足されるのだ\*16!

例 14.17 もし  $X_A$  の誤差 (標準偏差) が 3 cm で、 $X_B$  の誤差 (標準偏差) が 4 cm であれば、 $X_A + X_B$  の誤差 (標準偏差) は 3 cm + 4 cm = 7 cm なのではなく、 $\sqrt{(3 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2} = 5 \text{ cm}$  なのだ。(例おわり)

ただし、この話には前提条件が 2 つある。まず、式 (14.85) と式 (14.86) が成り立たなくてはならない。つまり、巻尺が偏った狂いを持っていてはならない。次に、式 (14.67) が成り立つ条件、つまり  $X_A$  と  $X_B$  が互いに独立でなければならない。つまり AC 間を測る時と CB 間を測る時で、同じようなミスをしてはならない\*17。

さて、この話は、AB 間をもっと多くの区間に分割する場合にも拡張できる。いま、AB 間を  $n$  個の区間に分割するとして、各区間の距離の測定値を  $X_1, X_2, \dots, X_n$  とし、それらは互いに独立であるとする。それらの合計:  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  について、式 (14.68) より、

$$V[Y] = V[X_1] + V[X_2] + \dots + V[X_n] \quad (14.90)$$

すなわち、

$$(\sigma[Y])^2 = (\sigma[X_1])^2 + (\sigma[X_2])^2 + \dots + (\sigma[X_n])^2 \quad (14.91)$$

が成り立つ。すなわち、以下の定理が成り立つ\*18:

#### 誤差伝播の法則

複数の測定値の和の誤差 (標準偏差) の 2 乗は、各測定値の誤差 (標準偏差) の 2 乗の和になる。ただし、各測定の期待値は真値に一致し、各測定どうしは独立でなければならない。

問 336 誤差伝播の法則を述べよ、という問に対し

\*16 これは偶然にも、三平方の定理に似ている。三平方の定理でも、直角三角形の斜辺の長さとの 2 辺の長さに関して、長さそのものでなく、長さの 2 乗が足されていた。

\*17 これらの条件が満たされないならば、誤差の 2 乗ではなく、誤差の大きさが足されるとみなすべきである。例えば例 14.17 では、AB 間の誤差は 3 cm + 4 cm = 7 cm とすべきである。

\*18 この定理は慣習的に「法則」と呼ばれているが、実体は定理である。「伝播」は「でんぱ」と読む。

て、「複数の測定値の誤差 (標準偏差) の和の 2 乗は、各測定値の誤差 (標準偏差) の 2 乗の和になる。ただし、各測定の期待値は真値に一致し、各測定どうしは独立。」と書く人がいる。これは不正確である。なぜか? どのように修正すればよいか?

問 337 1 km ほどの距離を、長さ約 1 m ごとの区間 1000 個に区切って、ものさしで測る。ものさしは 1 mm ごとに目盛が切っているので、1 回の測定 (約 1 m の測定) の誤差は約 1 mm であると考えられる。各区間の測定値の総和には、どのくらいの誤差が含まれているか? ただし、各測定の期待値は真値に一致し、各測定どうしは独立であるとする。

実際の現場では、ある量を、複数の量の測定値から推定する、ということがよく行われる。

例 14.18 例えば、円筒の体積  $V$  を測定するには、底面の半径  $r$  を測り (実際は直径を測ってそれを半分にするだろう)、高さ  $h$  を測って、 $V = \pi r^2 h$  という式で  $V$  を推定する。(例おわり)

このような場合は、誤差はどのように見積もればよいのだろうか?

今、最終的に欲しい量  $y$  が、 $y = f(x_1, x_2)$  のように、2 つの量  $x_1, x_2$  の関数であるとしよう (上の例では  $r$  が  $x_1$ 、 $h$  が  $x_2$ 、 $V$  が  $y$ 、 $\pi r^2 h$  が  $f$  に相当する)。  $x_1$  の測定値を  $X_1 = \mu_1 + dX_1$  と書こう。  $\mu_1$  は  $x_1$  の真値であり (従って定数)、  $X_1$  と  $dX_1$  は確率変数である ( $dX_1$  は誤差)。同様に、  $x_2$  の測定値を  $X_2 = \mu_2 + dX_2$  と書く。  $\mu_2$  は  $x_2$  の真値であり (従って定数)、  $X_2$  と  $dX_2$  は確率変数である ( $dX_2$  は誤差)。すると、  $y$  の真値は  $f(\mu_1, \mu_2)$  であり、  $y$  の推定値  $Y$  は  $f(X_1, X_2)$  である ( $Y$  も確率変数である)。ここで、測定はなかなかうまくいっており、  $dX_1$  と  $dX_2$  は小さいとみなせるとしよう。すると、全微分、すなわち P.150 の式 (10.39) を使うことができ、

$$\begin{aligned} Y &= f(X_1, X_2) = f(\mu_1 + dX_1, \mu_2 + dX_2) \\ &= f(\mu_1, \mu_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1} dX_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dX_2 \quad (14.92) \end{aligned}$$

となる。最初と最後で分散をとると、

$$V[Y] = V\left[f(\mu_1, \mu_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1} dX_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dX_2\right] \quad (14.93)$$

となる。 $f(\mu_1, \mu_2)$  は(未知の量ではあるが)定数なので、式(14.63)を使うと、上式の右辺は以下ようになる:

$$= V \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} dX_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dX_2 \right] \quad (14.94)$$

ここでもし、 $\frac{\partial f}{\partial x_1} dX_1$  と  $\frac{\partial f}{\partial x_2} dX_2$  が互いに独立なら(それぞれの偏微分係数は定数なので、要するにそれは「 $dX_1$  と  $dX_2$  が互いに独立なら」という条件である)、上の式は、式(14.67)より、

$$= V \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} dX_1 \right] + V \left[ \frac{\partial f}{\partial x_2} dX_2 \right] \quad (14.95)$$

となる。ここで再び式(14.63)を使うと、式(14.95)は次式のようになる:

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 V[dX_1] + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 V[dX_2] \quad (14.96)$$

ところで、また式(14.63)より、

$$V[X_1] = V[\mu_1 + dX_1] = V[dX_1] \quad (14.97)$$

$$V[X_2] = V[\mu_2 + dX_2] = V[dX_2] \quad (14.98)$$

である。これらを使って式(14.96)の  $V[dX_1]$  と  $V[dX_2]$  をそれぞれ  $V[X_1]$  と  $V[X_2]$  に書き換え、また、そもそも我々は式(14.93)から出発していたことを思い出すと、結局、

$$V[Y] = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 V[X_1] + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 V[X_2] \quad (14.99)$$

となる。分散は標準偏差の2乗だから、

$$\sigma_y^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_2^2 \quad (14.100)$$

となる(ここで、 $\sigma[Y]$  を  $\sigma_y$  と書き、 $\sigma[X_1]$  を  $\sigma_1$  と書き、 $\sigma[X_2]$  を  $\sigma_2$  と書いた)。これは、式(14.89)を拡張した式である。

ここでは、 $y$  が2つの変数( $x_1, x_2$ )だけに依存するしたが、もっとたくさんの変数、すなわち  $x_1, x_2, \dots, x_n$  に依存するケースに上の議論を拡張することは容易である(ここではやらないが)。すると、以下の式が成り立つ:

$$\sigma_y^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_n^2 \quad (14.101)$$

この式(14.101)は、式(14.91)を拡張した式である。実際、 $y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  の場合は、 $\partial f / \partial x_1 = \partial f / \partial x_2 = \dots = \partial f / \partial x_n = 1$  なので、式(14.101)の中の偏微分係数は全部1になり、式(14.91)と同じ式になる。一般には、むしろこの式(14.101)を誤差伝播の法則

という。

例14.18のような状況では、この式を使って、誤差の大きさを見積もるのだ。その際、真値における偏微分係数、すなわち  $\partial f / \partial x_1$ 、 $\partial f / \partial x_2$  などを求める必要があり、そのためには真値、すなわち  $\mu_1, \mu_2$  などが必要なのだが、それは実際にはわからない(真値がわかるなら苦労はしない。わからないから測定するし、誤差を見積もるのだ)。そこで、これらの偏微分係数を計算するとき、真値のかわりに(仕方なく)測定値を入れるのだ。

ちなみに「物理学実験1テキスト」P11の式(9)に、これと同じ式が書いてあり、「不確かさ伝播の法則」と称されている。「誤差」という語は意味がちょっと不明確だという理由で、最近はかわりに「不確かさ」という語がよく使われる。それはこういう話である:

誤差とは、「測定値 - 真値」である。上の議論では、 $dX_1$  や  $dX_2$  が誤差である。それは正の値も負の値もとりに得る、どのような値なのかはわからない量である(もしそれがわかるのなら、測定値からそれを引くことで真値が得られてしまう。そうできるのなら苦労はしない)。しかし、それがどのくらいの「大きさ」(絶対値みたいなもの)は、なんとなく評価できる、と考えるのだ。それが不確かさである。多くの場合は、不確かさは誤差の標準偏差の推定値として評価され、その場合は「標準不確かさ」と呼ばれる。このあたりの詳しい事情は「物理学実験」で学んで欲しい。

問338 例14.18を考える。今、ある円筒の体積  $V$  を推定するために、その半径  $r$  と高さ  $h$  を計測し、 $r = 35.2$  mm、 $h = 73.4$  mm という結果を得た。 $r$  の不確かさは  $\sigma_r = 1.0$  mm、 $h$  の不確かさは  $\sigma_h = 0.3$  mm であるとして、この円筒の体積  $V$  とその不確かさを  $\sigma_V$  を見積もれ。

## 問題の解答

答 309

- (1) 試行の結果として起きる可能性のあるできごと。
- (2) 複数の事象の少なくともひとつが起きるといふ事象。
- (3) 複数の事象のいずれもが起きるといふ事象。
- (4) 何も起きることがないといふ事象。
- (5) ある事象に対して「それが起きない」といふ事象。
- (6) 他の複数の(空事象でない)事象の和事象と考えることができないような事象。
- (7) 全ての根元事象の和事象。
- (8) 複数の事象について、それらが同時に発生することがないこと。

答 310 たとえ何回試行しても、空事象  $\emptyset$  の発生する回数  $n(\emptyset)$  は 0 である。従って、式 (14.4) より、 $P(\emptyset) = n(\emptyset)/N = 0$

答 311 2 つのサイコロの出る目の和が 10 以上の場合、(6, 6)(6, 5)(6, 4)(5, 6)(5, 5)(4, 6) の 6 通りで、2 つのサイコロの出る目のパターンは 36 通りである。「同様の確からしさの原理」が成り立つとみなして、 $6/36 = 1/6$

答 312 (例) 「同様の確からしさの原理は一般的には成り立たない」ということを知らない同僚が、この場面では羨ましい。

答 313 略。ヒント:  $P(A \cap B) < P(A|B) < P(B|A)$  になるはず。

答 314

- (1) サイコロを 1 回投げて、1 と 3 は同時に出ることは、有り得ないので、排反。また、1 が出たら 3 が出ることはない、というふうに、互いへの影響は大いにあるので、独立ではない\*19。
- (2) 1 回めに 1, 2 回めに 3 が出ることは、両方起きる可能性があるから、排反ではない。また、これらは互いに影響を与えないので、独立。
- (3) 4 が出たら A, B 両方の事象が起きたことになるので、排反ではない。偶数が出るならば、その場合、目は 2, 4, 6 のうちどれかなので、4 が出る確率は大きくなる。従って、独立でもない。

答 315  $(1/2)^{10} = 1/1024$ 

答 316  $B(5, 1/2)$  に従う確率変数  $X$  について、 $P(X = 3)$  を求めればよい。式 (14.30) より、 $P(X = 3) = {}_5C_3 (1/2)^3 (1 - 1/2)^{5-3} = {}_5C_3 (1/2)^5 = 10/32 = 5/16$ 。

答 317 問 316 と同じで、 $5/16$ 。

答 318 略。がんばれ!

答 319 略。

答 320 各目が出る確率はいずれも  $1/6$  なので、

$$\frac{1^2}{6} + \frac{2^2}{6} + \frac{3^2}{6} + \frac{4^2}{6} + \frac{5^2}{6} + \frac{6^2}{6} = \frac{91}{6} \approx 15.2$$

答 321

$$E[X] = 1 \times P(X = 1) + 0 \times P(X = 0) = P(X = 1) = p$$

答 322 表が  $k$  回出る確率を  $P(k)$  とすると、 $P(0) = 1/8$ ,  $P(1) = 3/8$ ,  $P(2) = 3/8$ ,  $P(3) = 1/8$  である。賞金額の期待値は、 $0 \times P(0) + 100 \times P(1) + 200 \times P(2) + 300 \times P(3) = 1200/8 = 150$  円。

答 323  $k$  回目のベルヌーイ試行で事象が起きる回数 (0 か 1) を確率変数  $X_k$  で表す ( $k$  は 1 以上  $n$  以下の任意の整数)。すると、 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  と表される。従って、

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] \\ &= E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n] \quad (14.102) \end{aligned}$$

となる(式 (14.43) を使った)。ここで、 $X_1, X_2, \dots, X_n$  は同一のベルヌーイ分布に従う確率変数なので、P.203 の式 (14.33) より(注: 式 (14.33) の  $X$  はここでは  $X_1, X_2, \dots, X_n$  のこと!)、

$$E[X_1] = E[X_2] = \dots = E[X_n] = p \quad (14.103)$$

従って、式 (14.102) は  $np$  となる。■

答 324

- (1)  $P(X = 0, Y = 0) = 1/4$ ,  
 $P(X = 100, Y = 0) = 0$ ,  
 $P(X = 0, Y = 100) = 1/4$ ,  
 $P(X = 100, Y = 100) = 1/2$  である。従って、

$$E[X + Y] = 0 \times \frac{1}{4} + 100 \times (0 + \frac{1}{4}) + 200 \times \frac{1}{2} = 125$$

\*19 従って、一般に、排反な事象は互いに独立にはならない。

一方, 例より  $E[X] = 50$ ,  $E[Y] = 75$  だったから,

$$E[X] + E[Y] = 50 + 75 = 125$$

従って与式が成り立つ。

(2) このルールを廃止したら,

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = 0) &= P(X = 100, Y = 0) \\ &= P(X = 0, Y = 100) = P(X = 100, Y = 100) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。従って,

$$\begin{aligned} P(XY = 10000) &= P(X = 100, Y = 100) = \frac{1}{4} \\ P(XY = 0) &= 1 - P(XY = 10000) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

従って,

$$E[XY] = 0 \times \frac{3}{4} + 10000 \times \frac{1}{4} = 2500$$

一方,  $E[X] = E[Y] = 50$  なので,  $E[X]E[Y] = 2500$ 。従って与式が成り立つ。 ■

答 325

- (1) 実現値 (資源生の靴のサイズとしてあり得る値) を  $x_1, x_2, \dots, x_n$  とする。資源生の人数を  $M$  とし, 靴のサイズが  $x_k$  の資源生の人数を  $m_k$  とする。どの資源生も同じ確からしさで選ばれるとみなせば, 靴のサイズ  $x_k$  の資源生が選び出される確率は, 式 (14.16) より,  $m_k/M$  である。従って,  $P(X = x_k) = m_k/M$  となる。これは人数/人数なので, 無次元。同様に考えれば, 全ての  $k$  について,  $P(X = x_k)$  は無次元である。つまり, 確率は無次元。
- (2) 式 (14.31) をこの問題に適用して考える。確率は無次元なので, 式 (14.31) の右辺の次元は, 実現値  $x_k$  の次元である。従って, 期待値の次元は実現値の次元に等しい。つまり「長さ」である。
- (3) 期待値を  $\mu$  と書く。式 (14.59) をこの問題に適用して考える。この式は,

$$V[X] = E[(X - \mu)^2] = \sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2 P(X = x_k)$$

と書ける ( $\mu = E[X]$ )。最右辺の次元は, (2) と同様に考えて,  $(x_k - \mu)^2$  の次元, つまり実現値の 2 乗の次元である。従って, 分散の次元は, 実現値の 2 乗の次元, つまり「長さの 2 乗」である。

- (4) 標準偏差は分散の平方根なので, その次元は分散の

次元の  $1/2$  乗である。分散の次元は, 実現値の 2 乗の次元に等しいので, 標準偏差の次元は実現値の次元, つまり, 「長さ」である。

答 326 問 322 より, 賞金額の期待値は 150 円。賞金額の分散は,

$$\begin{aligned} &(0 - 150)^2 \times P(0) + (100 - 150)^2 \times P(1) \\ &+ (200 - 150)^2 \times P(2) + (300 - 150)^2 \times P(3) \\ &= 7500 \text{ 円}^2 \end{aligned}$$

従って, 標準偏差は,  $\sqrt{7500}$  円  $\approx 87$  円。

別解: 100 円玉 1 枚を投げて表が出たらもらえる, という確率変数の分散は

$$(0 - 50)^2 \times \frac{1}{2} + (100 - 50)^2 \times \frac{1}{2} = 2500 \quad (14.104)$$

3 枚の 100 円玉を投げるのは互いに独立なので, これらの和の分散は, 1 枚の分散 3 つの和。従って,  $2500 \times 3 = 7500 \text{ 円}^2$ 。注: ここで分散の値に単位として  $\text{円}^2$  とつけたが, この「2 乗」は必要である。

答 327 式 (14.33) より  $E[X] = p$  である。これを  $\mu$  と置くと,

$$\begin{aligned} V[X] &= E[(X - \mu)^2] = E[(X - p)^2] \\ &= (1 - p)^2 p + (0 - p)^2 (1 - p) \\ &= p(1 - p)^2 + p^2(1 - p) \\ &= p(1 - p)(1 - p + p) = p(1 - p) \end{aligned}$$

答 328 式 (14.28) より,

$$V[X] = V[X_1 + X_2 + \dots + X_n] \quad (14.105)$$

である。ここで,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  は互いに独立なので, 式 (14.68) を使って,

$$V[X] = V[X_1] + V[X_2] + \dots + V[X_n] \quad (14.106)$$

とできる。ところで,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  は同一のベルヌーイ分布に従うことと, 式 (14.69) より,

$$V[X_1] = V[X_2] = \dots = V[X_n] = p(1 - p) \quad (14.107)$$

である。式 (14.107) を式 (14.106) に代入して,

$$\begin{aligned} V[X] &= p(1 - p) + p(1 - p) + \dots + p(1 - p) \\ &= np(1 - p) \end{aligned}$$

となり, 与式を得る。 ■

答 329 (1)  $X$  は 60 個の整数値のいずれも同じ確からしさでとりえるので, 30 に限らず, ひとつの特定の値をとる確率は,  $1/60$ 。(2)  $X$  は 0 から 59.9 までの 600 個の値のいずれも同じ確からしさでとりえるので, 30 に限らず, ひとつの特定の値をとる確率は,  $1/600$ 。(3) 同様に考えて,  $1/6000$ 。(4) 同様に考えて,  $1/(60 \times 10^n)$ 。(5) 「滑らかに動く」とは, 限りなく小さな刻みで動くことと考え, (4) で  $n \rightarrow \infty$  を考えると,  $1/(60 \times 10^n) \rightarrow 0$ 。したがって, 0。

答 330  $a$  から  $b$  の範囲を,  $n$  個の微小区間に分割する。すなわち,  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  とする。また,  $0 \leq k < n$  として,  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  とする。式 (14.74) より,

$$P(x_k < X \leq x_{k+1}) \doteq f(x_k)\Delta x_k \quad (14.108)$$

である。従って,

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k < X \leq x_{k+1}) \\ &\doteq \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k \end{aligned} \quad (14.109)$$

$\Delta x_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  とすれば, 積分の定義より, 与式の右辺に一致する。

答 331 (略解) (1)  $f(x) = 1/60$  ... そうなる理由も述べる! (2)  $P(30 < x \leq 30.1) = f(30) \times (30.1 - 30.0) = (1/60) \times 0.1 = 1/600$

答 332 導関数の定義 (P.66 式 (5.9)) より,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

ここで式 (14.79) より, 右辺は,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_{-\infty}^x f(x)dx}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x} \end{aligned}$$

ところで,  $\Delta x$  が十分に小さければ,  $x$  から  $x + \Delta x$  の間で  $f(x)$  はほとんど一定とみなせるから, 上の式は, 積分の公式 6 より,

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) \int_x^{x+\Delta x} dx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x)$$

となる。

答 333 確率変数  $X$ , 微小量  $dx$  について,  $P(x < X \leq x + dx) = f(x)dx$  となるような関数  $f(x)$  のことを  $X$  の確率密度関数という。また,  $P(X \leq x)$  を  $x$  の関数とみなしたものを,  $X$  の確率分布関数という。

答 334 確率分布関数の定義より, 次式が成り立つ:

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) \\ = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \end{aligned}$$

式 (14.75) より, これは  $P(x_1 < X \leq x_2)$  に等しい。

答 335 (1)  $X$  は  $c - a \leq x \leq c + a$  で一様な確率で値をとるので,  $X$  の確率密度関数  $f(x)$  は,  $c - a \leq x \leq c + a$  で, 一定値をとる。それを  $A$  とする。また,  $c - a \leq x \leq c + a$  以外の範囲には  $X$  は値をとらないから,  $c - a \leq x \leq c + a$  以外の範囲では  $f(x) = 0$  である。さて,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{c-a} f(x)dx + \int_{c-a}^{c+a} f(x)dx \\ &+ \int_{c+a}^{\infty} f(x)dx = \int_{c-a}^{c+a} A dx = 2Aa \end{aligned}$$

となる。式 (14.76) より,  $2Aa = 1$ 。従って,  $A = 1/(2a)$  である。

$$(2) E[X] = \int_{c-a}^{c+a} \frac{x dx}{2a} = \left[ \frac{x^2}{4a} \right]_{c-a}^{c+a} = c$$

$$(3) V[X] = \int_{c-a}^{c+a} \frac{(x-c)^2 dx}{2a} = \left[ \frac{(x-c)^3}{6a} \right]_{c-a}^{c+a} = \frac{a^2}{3}$$

$$(4) \sigma[X] = \sqrt{V[X]} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

答 336 不正確なポイントは 2 つある。まず, 「誤差 (標準偏差) の和の 2 乗」の部分は「和の誤差 (標準偏差) の 2 乗」としなければならない。これらは必ずしも一致しない。次に, 末尾は「でなければならない。」とか, 「であることが必要。」とまで書かねばならない。これが無いと, 「各測定の期待値は真値に一致し, 各測定どうしは独立」ということが定理の成立条件でなく定理の結論の一部であると誤解される可能性がある。

答 337 各区間の測定値を  $X_1, X_2, \dots, X_{1000}$  とする。その総和を  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{1000}$  とする。各区間の測定値の標準偏差を 1 mm とすると,  $V[X_1] =$

$V[X_2] = \dots = V[X_{1000}] = (1 \text{ mm})^2$  である。従って、誤差伝播の法則より、 $V[Y] = V[X_1] + V[X_2] + \dots + V[X_{1000}] = 1000 \times (1 \text{ mm})^2 = 1000 \text{ mm}^2$ 。従って、 $\sigma[Y] = \sqrt{V[Y]} = \sqrt{1000 \text{ mm}^2} \approx 32 \text{ mm}$ 、すなわち、約 3 cm の誤差が含まれていると考えられる。

答 338 式 (14.101) で  $n = 2$ ,  $x_1 = r$ ,  $x_2 = h$ ,  $\sigma_1 = \sigma_r$ ,  $\sigma_2 = \sigma_h$ ,  $\sigma_y = \sigma_V$  と置き換えれば、

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2$$

となる。 $f = \pi r^2 h$  なので、 $\frac{\partial f}{\partial r} = 2\pi r h$ ,  $\frac{\partial f}{\partial h} = \pi r^2$  である。従って、

$$\sigma_V^2 = (2\pi r h)^2 \sigma_r^2 + (\pi r^2)^2 \sigma_h^2 \quad \text{従って、}$$

$$\sigma_V = \sqrt{(2\pi r h)^2 \sigma_r^2 + (\pi r^2)^2 \sigma_h^2}$$

となる。この右辺に与えられた値を代入すると、 $V = 285713.8 \dots \text{ mm}^3$ ,  $\sigma_V = 16275.6 \dots \text{ mm}^3$

となる。 $\sigma_V$  の有効数字を 2 桁とすると、 $\sigma_V = 16000 \text{ mm}^3$  となる。 $V$  の有効数字がこの 2 桁 (1 と 6;  $10^4$  と  $10^3$  の桁) を含むように、 $10^2$  の桁 (7 という数字) を四捨五入で丸めると、 $V = 286000 \text{ mm}^3$  となる。すなわち、 $V = (2.86 \pm 0.16) \times 10^5 \text{ mm}^3$ 。

## コラム: 覚えることと理解すること

本章と次章 (確率論・統計学) は、耳慣れない言葉がたくさん出てきて、その定義を覚えるのが大変だ。そういうとき、数学が得意な学生は、「数学は理解すれば自然に覚えらるものだ。理解せずに覚えるなんて無意味だ!」と思ってしまい、ひとつひとつの言葉に素直に向き合えずに、挫折してしまいがちだ。

もちろん、数学は理解しなければ無意味。でも、大学の数学は抽象的なものが多く、すぐに理解できるようなものはわずかなのだ。

そこで威力を発揮するのは、数学好きの人が毛嫌いする「理解できなくてもまず覚える」というアプローチだ。定義を呪文のように覚えるのだ。数学は全て定義 (公理) から組み立てられるのだから、定義が頭に入れば、あとは丁寧に論理をたどれば、教科書や授業の話にくらいついていける。そうしているうちに、その「意味」が徐々にわかってくる。要するに、「覚えてから理解する」のだ。

なぜこんな不自然なアプローチをするのだろうか? 喩え話で考えてみよう。

君が料理を習うとき、まず指示に従って食材を揃える。そのとき君は、個々の食材がなぜ必要なのか知りたいだろう。しかし、普通はそんなことは説明されない。それよりも、その食材を使って料理が完成するまでの過程を君は体験させられるだろう。それを何回も繰り返し、いろいろな試す中で、個々の食材や調味料がどのような役割をしているのかを、君は理解するのだ。

こういうことは、他にも多くの学びごとにもある。スポーツも楽器演奏も、陶芸や木工のような工芸も、野菜作りや米作りのような農作業もそうだ。規則や道具や材料や練習メニューや作業工程といった個々の要素の「意味」は最初に説明されたりしないし、たとえ説明されてもわかることは少ないだろう。とにかくやってみて、ある程度習得した後になってわかるのだ。なぜだろう? 簡単なことだ。個々の要素は全体の中で役割を担うのだから、全体像が見えないと個々の役割、すなわち「意味」は見えないのだ。

確率論・統計学も同じだ。確率変数や期待値、分散、確率分布、独立などの概念は、確率論・統計学を明快な理論体系に組み上げるための材料だ。それらの本当の意味や役割は、確率論・統計学の全体像が見えてこないとわからない。しかし、その全体像は、これらの言葉を使わないと見えて来ないのだ。ここに数学を学ぶ時の矛盾がある。

「理解する」とか「意味を考える」ことが無意味だと言っているのではない。それらはとても大切なプロセスだ。ただ、数学において、学ぶことの最初の段階からそれらを過剰に求めることは、むしろ有害で、かえって理解や意味を遠ざけてしまうのだ。

ならば闇雲に覚えればいいのかというと、そうでもない。数学は体系性が重要である。定義を覚えるときは、その定義に出てくるひとつひとつの言葉の定義がわかっていなくてはならない。「定義全体の意味」は当面はわからなくてもいいが、定義に出てくる「個々の言葉の意味」はわかっていなくてはならない。

## 第15章

# 統計学

神の御心を知るには統計学を学ばなければならない  
(ナイチンゲール)。

### 15.1 母集団と標本

統計学において、知りたい対象の全ての集合を 母集団(population) という。例えば日本の成人男子の身長がどの程度なのかを知りたいとき、「日本全国の成人男子全員の身長集合」が「母集団」になる。

母集団の中のすべての対象を調べることを「全数調査」という。対象の数が膨大になると、全数調査は労力的に大変なので、母集団から、いくつかの対象(母集団の要素)を抽出して調べる。このとき母集団から抽出された要素を集めたものを 標本 とか サンプル(sample) という。従って、当然ながら標本(すなわちサンプル)は母集団の部分集合である。標本を構成する個々の要素(データ)を 標本データ という(言い換えると、標本は標本データの集合である)。このような調査を「標本調査」という。

例 15.1 「日本全国の成人男子全員の身長」を調べるために、全国から 100 人の成人男子を選び出して、各人の身長を計れば、100 人分の身長データが得られる。このとき、100 人分のデータをひとまとめにしたものが、1 つの標本である。1 人の身長データは「標本」ではなく、「標本データ」である。(例おわり)

問 339 母集団とは何か?

問 340 標本とは何か? 標本と標本データはどう違うか?

ひとつの標本を構成する標本データの個数を 標本サイズ とか 標本の大きさ とか「サンプルサイズ」

という。上の例で言えば、100 人分の身長データから構成される一つの標本について、その「標本サイズ」は 100 である。

標本という「集合」がいくつあるか、つまり「標本データのセット」が何セットあるかを 標本数 とか「サンプル数」という。上の例で言えば、100 人分の身長を計る、という操作を、例えば 3 回繰り返すと、100 人分の身長データが 3 セット得られる(つまり 300 人分の身長データが得られる)。この場合、標本数やサンプル数は 3 である(300 ではない)。

よくある間違い 61 「標本サイズ」のことを「標本数」とか「サンプル数」と言ってしまう ... 間違いです。

このような間違いをする人や教科書(ウェブ教材等)が多いので大きく書いておく:

注意!

標本サイズ (=標本の大きさ=サンプルの大きさ)  
を標本数 (=サンプル数) と叫ぶな!

用語は正しく使おう。

問 341 「標本サイズ」と「標本数」はどう違うか?

標本データを母集団の中から無作為に抽出する場合は、抽出してみるまではどういう値になるかはわからない。しかし、母集団の中にたくさん存在するような値が、高い確率で標本データに現れるだろう。ということは、標本を構成する個々の標本データは、どういう値になるか、確率的に決まっている。従って、標本を構成する個々のデータは 1 つ 1 つが「確率変数」と考えることができる。その期待値と分散をそれぞれ 母平均、母分散 と呼ぶ。

ただし、これまで学んだ確率変数の例と少し違って、標本データについては、確率分布がわかっていないこと

が多い。例えば、サイコロを投げて出る目の値を実現値とするような確率変数なら、3が出る確率は $1/6$ である(サイコロが正しく作られていれば)。しかし、日本の成人男子を1人つれてきたらその身長が1.74 mである、という確率は、あらかじめわかっているものではない。というか、そもそもそれを知りたいから調査するのだ。わかっているからどうするか? 未知数とするのだ。それらを未知数として数学的な理論を先に構築してしまう。そして、それを逆にたどることによって、限られた測定結果から、なるべく正しい、つじつまのあうような結論を導き出すのが統計学である。

問 342 標本と確率変数はどういう関係にあるか?

## 15.2 標本平均

P.202 式 (14.31) で定義された期待値は、その確率変数が出してくる、最も「平均的な」実現値なので、期待値のことを 平均 と呼ぶ人もいる。

ところが、期待値を求めるには、各実現値の確率が必要であり、それはサイコロのような単純な場合を除けば、現実的には得られないことがほとんどである。その代替になるのが、以下に述べる標本平均である。

今、標本を  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  とする ( $X_k$  は標本データ、 $n$  は標本サイズ)。標本データの総和を標本サイズで割ったもの、すなわち

$$\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (15.1)$$

をこの標本の 標本平均 という。これを単に 平均 と呼ぶ人もいるが、上述のように、期待値を平均と呼ぶ人もいるので、混同を避けるために、平均という言葉はできるだけ使わないのが賢明である。

例 15.2 サイコロを8回振って、出た目が

2, 3, 5, 3, 6, 1, 4, 5

だったなら、その標本平均は

$$\bar{X} = \frac{2+3+5+3+6+1+4+5}{8} = 3.625$$

となる。(例おわり)

期待値と標本平均はどのように違うのだろうか? まず、期待値は、ひとつの定数である。一方、標本平均は、それ自身が確率変数である。なぜなら、個々の標本デー

タが確率変数であるため、それを複数個、足したのも確率変数であり、それを標本サイズ ( $n$ ) で割ったのも確率変数である(一般に、確率変数どうしの和や定数倍は確率変数だった)。従って、標本平均は、標本をとるたびに微妙に違う値になる。つまり、標本平均の値は、標本をとってみななければわからないのだ。

また、期待値は、定数とは言いながら、その値は、多くの場合は人間にとって永遠に未知である。しかし標本平均は、標本が得られれば具体的に一つの値が定まる。

ところが、標本サイズ  $n$  が十分に大きくなれば、標本平均と期待値は、限りなく接近するのだ。それを確認しよう:

いま、確率変数  $X$  が、 $x_1, x_2, \dots, x_N$  という、 $N$  とおりの実現値をとり得るとする。例えば上のサイコロの例 15.2 なら  $N = 6$  であり、 $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_6 = 6$  である。

$n$  回の試行<sup>\*1</sup>によって標本  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  が得られ、その中で、値が  $x_k$  に等しいものが  $m_k$  個あったとしよう ( $k$  は 1 から  $N$  までの任意の整数である)。それぞれの値をとったデータの数を合計すると、標本サイズ、つまり  $n$  になるので、

$$m_1 + m_2 + \dots + m_N = n \quad (15.2)$$

である。上のサイコロの例だと、 $n$  はサイコロを投げた回数、つまり 8 である。また、

$$\begin{aligned} m_1 &= 1, m_2 = 1, m_3 = 2, \\ m_4 &= 1, m_5 = 2, m_6 = 1 \end{aligned}$$

であり、 $m_1 + m_2 + \dots + m_6 = 8$  である。

また、全ての標本データの合計は、それぞれの実現値に、その実現値をとった標本データの数をかけたものの和に等しいので、

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_N m_N \quad (15.3)$$

である。上のサイコロの例だと、この左辺は

$$2 + 3 + 5 + 3 + 6 + 1 + 4 + 5$$

であり、右辺は

$$1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 1$$

であり、ともに 29 で一致する。

\*1  $n$  と  $N$  を混同しないように!

従って、式 (15.1) と式 (15.3) より、

$$\bar{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_N m_N}{n} \quad (15.4)$$

$$= x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \cdots + x_N \frac{m_N}{n} \quad (15.5)$$

ここで、 $m_k/n$  は、 $n$  が十分に大きければ、実現値  $x_k$  が起きる確率  $p_k$  に等しい (これは確率の定義!)。従って、上の式 (15.5) は、

$$\doteq x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_N p_N \quad (15.6)$$

となり、右辺は期待値の定義式になる。

このように、標本サイズ  $n$  が十分に大きければ、期待値  $E[X]$  と標本平均  $\bar{X}$  はほとんど一致する。従って、標本平均で期待値を推定することができる。

とはいえ、標本サイズ  $n$  を無限に大きくはできないし、そもそも両者は別のものであるから、期待値と標本平均はきちんと区別すべきである (統計学がわからないという人は、得てしてこういうところが雑である)。

問 343 期待値と標本平均の定義をそれぞれ述べよ。

### 15.3 標準誤差と大数の法則

さて、先に述べたように、標本平均  $\bar{X}$  は、それ自体がひとつの確率変数なので、 $\bar{X}$  にも期待値、分散、標準偏差があるはずだ。それらを求めてみよう:

いま、同じ母集団から、互いに独立に抽出された  $n$  個の標本データ

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad (15.7)$$

から構成される標本を考えよう。どのデータも同じ母集団から抽出されるので、式 (15.7) を、互いに同じ期待値  $\mu$  と同じ分散  $\sigma^2$  を持つ確率変数とみなす。すなわち、

$$E[X_1] = E[X_2] = \cdots = E[X_n] = \mu \quad (15.8)$$

$$V[X_1] = V[X_2] = \cdots = V[X_n] = \sigma^2 \quad (15.9)$$

である。すると、式 (15.1)、P.203 式 (14.35)、P.204 式 (14.43) より、

$$\begin{aligned} E[\bar{X}] &= E\left[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right] \\ &= \frac{E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n]}{n} \\ &= \frac{E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]}{n} \\ &= \frac{\mu + \mu + \cdots + \mu}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu \end{aligned} \quad (15.10)$$

従って、標本平均の期待値は母平均 (期待値) に等しい。

次に、標本平均の分散を調べてみよう: まず、標本データは互いに独立なので、式 (14.68) より、

$$\begin{aligned} V[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] &= V[X_1] + V[X_2] + \cdots + V[X_n] \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2 = n\sigma^2 \end{aligned} \quad (15.11)$$

となる。上式と式 (14.63) より、

$$\begin{aligned} V[\bar{X}] &= V\left[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n^2} V[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \quad (15.12)$$

となる。従って、標本平均の分散は母集団の分散 (母分散) を標本サイズで割ったものである。

さて、「標本平均の標準偏差」つまり  $\sigma[\bar{X}]$  のことを標準誤差 (standard error) と呼ぶ (定義)。標本データどうしが独立ならば、標準誤差は式 (15.12) の最後の項の平方根をとればよい。その結果、

$$\sigma[\bar{X}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (15.13)$$

となる。 $n$  が大きくなればなるほど、式 (15.13) は 0 に近づくのは明らかだろう。すなわち、標本データどうしが独立ならば、標準誤差 (標本平均の標準偏差) は母集団の標準偏差の  $1/\sqrt{n}$  になる、という性質があるのだ。

標準誤差は、標本平均がその期待値からどのくらいばらつくか (誤差の大きさ) の指標になる。標本データどうしが独立ならば、それは標本サイズの平方根に反比例するのだ。つまり、標本平均の誤差を  $1/10$  にしようとするれば、標本サイズは 100 倍にしなければならないのだ。

以上をまとめると、次のような法則になる:

#### 大数の法則

標本データどうしが独立なら、標本平均  $\bar{X}$  は、標本サイズ  $n$  を増やすほど母平均 (つまり期待値  $E[X]$ ) に近づく。母集団の標準偏差を  $\sigma$  とすると、このときの標準誤差 (標本平均の標準偏差) は、 $\sigma/\sqrt{n}$  である。

よくある間違い 62 大数の法則を述べるときに、「標本データどうしが独立なら」という前提条件を忘れる ... 世の中の統計学の教科書の中にも、この条件を明記しないものが多いありますが、この条件は絶対に必要であり、決して忘れてはダメです。

## 15.4 標本分散と標本標準偏差

前節で、母集団の平均(期待値)は、標本平均によって、ひとつの(十分大きな)標本から推定できることがわかった。では、母集団の分散はどのようにして推定できるのだろうか? 分散は P.206 式 (14.59) で定義されるのだが、実際にこの式に基づいて計算するには、各実現値の確率が必要であり、統計学が必要とされるような多くの場合は、それは現実的には未知である。現実的に標本から計算可能で、しかも式 (14.59) のかわりになるような量は無いだろうか? それがここで学ぶ「標本分散」である。

標本  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  について

$$s^2 := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 \quad (15.14)$$

を 標本分散 と呼ぶ(定義)。その(正の)平方根  $s$  を標本標準偏差と呼ぶ(定義)\*2。

標本分散は、P.206 式 (14.59) で定義される「分散」と、言葉は似ているが別物である。ただし、標本が十分に大きければ、標本分散は分散の良い推定値になる(ここでは証明しない)。だからといって分散と標本分散を混同してはいけない。

厳密に言えば、全数調査でない限り、分散の推定値としては、式 (15.14) ではなく、次のような量  $u^2$  を使うほうが、より適切である:

$$u^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 \quad (15.15)$$

この  $u^2$  を 不偏分散 という(定義)。分母が  $n$  ではなくて  $n-1$  になっていることに注意せよ。この正体は、大学の統計学の授業で学ぶだろう。

問 344 ある小学校のクラスの児童の学力を調べるために、10 点満点の試験をしたところ、各児童の得点  $x$  は、以下のとおりであった:

$$3, 4, 3, 5, 6, 4, 5, 6, 4, 7 \quad (15.16)$$

電卓を使って、以下の計算を行え:

- (1) 標本平均  $\bar{X}$  は 4.7 点であることを示せ。
- (2) 標本分散  $s^2$  は 1.61 点<sup>2</sup>であることを示せ。
- (3) 標本標準偏差  $s$  は 1.27 点であることを示せ。

\*2 念のため言っておくが、標本標準偏差は「標本平均の標準偏差」とは別物である(言葉は似ているけど)。

パソコンの表計算ソフトを使うと、上の計算が楽にできる。やってみよう。まず、表計算ソフトを立ち上げ、スプレッドシートの A 列に、(15.16) のデータを以下のように入れる:

	A	B	C
1	3		
2	4		
3	3		
...	...		
10	7		
11			
12			

セル A11 に、”=sum(A1:A10)/10” と入力する。これで標本平均が計算され、セル A11 にその結果が表示されるだろう。”sum()” というのは、ある範囲内のセルの値を合計するという、表計算ソフト特有の関数である。

次に、各データ  $X_k$  について、 $(X_k - \bar{X})^2$  を計算しよう。まず、セル B1 に、”=(A1-A\$11)\*(A1-A\$11)” と入力する。ここで標本平均が入っているセル A11 への参照を固定するために、絶対参照を使っていることに注意しよう。そして、このセル B1 をコピーして、セル B2 からセル B10 までを選んで「ペースト」する。

この B 列を合計して、 $n$  で割って、 $s^2$  を得よう。そのために、セル B11 に、”=sum(B1:B10)/10” と入れる。この値の平方根が  $s$  である。それを求めるために、セル B12 に、”=sqrt(B11)” と入れる。

この結果、以下のような表ができるだろう:

	A	B	C
1	3	2.89	
2	4	0.49	
3	3	2.89	
...	...	...	
10	7	5.29	
11	4.7	1.61	
12		1.27	

問 345 (1) 上の操作を行って結果を確認せよ。

- (2) セル A12 に、”=average(A1:A10)” と入れてみよ。その結果を標本平均と比較せよ。
- (3) セル A13 に、”=stdevp(A1:A10)” と入れてみよ。その結果を標本標準偏差と比較せよ。

このように、表計算ソフトには、標本平均や標本標準偏

差を求める関数 (機能) が備わっている。

## 15.5 標準化

確率変数  $X$  について、期待値が  $\mu$ 、標準偏差が  $\sigma$  であるとき、

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \quad (15.17)$$

を求めることを 標準化 (又は正規化) と呼ぶ (定義)。

問 346 標準化された確率変数の期待値は 0、分散は 1 (だから標準偏差も 1) になることを示せ。

標準化は、ある標本データについて、母集団の分布の中で相対的にどのような位置にあるかを示すために使われることが多い。 $\mu, \sigma$  が得られないときは、それぞれ標本平均  $\bar{X}$ 、標本標準偏差  $s$  (もしくは  $u$ ) で代用する。

問 347 現在、日本で満 1 才の女児の身長は、平均 74 cm、標準偏差 2.5 cm であるとする。ある満 1 才の女児の身長は 71 cm であった。この値を標準化せよ。

標準化を、量の次元という観点で考えてみよう。P.207 で見たように、確率変数と、その期待値と、標準偏差は、同じ次元を持つ。だからこそ、式 (15.17) の分子にあるような引き算が可能なのだ。また、式 (15.17) の分母と分子は同じ次元を持つ。従って、その比である式 (15.17) は、無次元の量になるのだ。このように、標準化は、確率変数を「無次元化」という役割も持つ。それによって、様々な次元を持つ様々な確率変数どうしを、「無次元」という次元に統一して、互いに比較することができるのだ。例えば、「体重」と「身長」は、全く違う次元のものを表している (前者は重さ、後者は長さ) ので、比べることはできない。しかし、それらを標準化してしまえば、「期待値から標準偏差何個分離れているか」という統一された見方で、比較ができるのである。

標準化された確率変数を 10 倍して 50 を足したものを「偏差値」という (高校時代にお世話になったね!):

$$\text{偏差値} := 50 + 10 \times \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (15.18)$$

問 348

- (1) 問 347 の女児の身長の偏差値はいくらか?
- (2) 君の身長の偏差値を、同年齢・同性の日本人集団の

中で求めよ。ヒント: 母集団の平均・標準偏差は、「日本人 身長 平均 標準偏差」で検索! 身長や年齢について、自分の数値をレポートに書くことをためられる人は、架空の数値でも構わない。

## 15.6 正規分布

以下のような確率密度関数で表される確率分布を、正規分布 (normal distribution) とか ガウス分布 (Gaussian distribution) と呼ぶ:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (15.19)$$

$\mu$  は確率変数の期待値、 $\sigma$  は標準偏差である。この式 (15.19) は記憶すること!<sup>\*3</sup>

こんな式を暗記する必要は無い、という人もいるが、まあそう言わずに暗記せよ。こういう式は、君のように頭の柔らかいうちに覚えておくと、あとで良かった、と思うものである。

注: この式の分母の  $\sigma^2$  を根号の外に出して、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (15.21)$$

と書く教科書もある。もちろんこれは数学的には式 (15.19) と同じである。

期待値が  $\mu$ 、標準偏差が  $\sigma$  であるような正規分布のことを、 $N(\mu, \sigma^2)$  と書き表す。

式 (15.19) のグラフは、 $x = \mu$  となるときピークを示す ( $f(x)$  が最大となる)。そのピークを挟んで左右対称な形になる (図 15.1)。この関数の原型は、P.90 式 (6.36) である。実際、 $a = 1/(2\sigma^2)$  として、式 (6.36) のグラフ (P.90 図 6.7) を  $x$  軸方向に  $\mu$  だけ平行移動し、 $y$  軸方向に  $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$  倍したら、式 (15.19) のグラフになる。

<sup>\*3</sup> これは複雑な式のようなのだが、よく見てみると、まず、 $\exp$  の中に、式 (15.17) とよく似た式:

$$\frac{x - \mu}{\sigma} \quad (15.20)$$

が (2 乗の形になってはいないが) 入っていることに気づく。これは標準化である。(式 (15.17) で  $X$  だったのがここで  $x$  になったのは、確率密度関数の変数は確率変数  $X$  そのものではなくて、その実現値  $x$  だからである ... わからない人は確率密度関数の定義を再確認せよ!)。P.152 の 10.10 節で述べたように、 $\exp$  はマクローリン展開されるので、その引数は、無次元量でなければならない。式 (15.20) は、その役割を担っているのである。

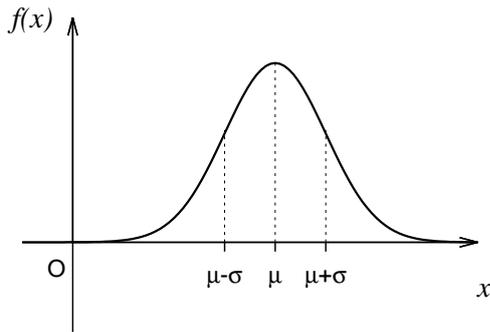


図 15.1 正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  の確率密度関数。式 (15.19)。

問 349 正規分布の確率密度関数を表す式 (15.19) を 10 回書いて、記憶せよ。

問 350 正規分布の確率密度関数、すなわち式 (15.19) は式 (14.76) を満たすこと、すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = 1 \quad (15.22)$$

が成り立つことを確認しよう。

- (1)  $t = (x-\mu)/(\sqrt{2}\sigma)$  と置いて、置換積分の公式 (8.94) を使うと、式 (15.22) の左辺は次式になることを示せ:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (15.23)$$

- (2) ガウス積分の公式 (8.126) を使って、式 (15.23) は 1 に等しいことを示せ。

問 351 以下の正規分布の確率密度関数を、パソコンを使って重ねてグラフに描け。

- (1)  $N(0, 1)$       (2)  $N(0, 2^2)$       (3)  $N(1, 1)$

注意: どのような確率分布でも、確率密度関数のグラフと  $x$  軸で囲まれる面積は必ず 1 になる。従って、いくつかの正規分布のグラフを重ねて描いたとき、どれかが極端に小さくなることはありえない。必ず、ピークが下がると横方向に広がる。

特に、期待値が 0、標準偏差が 1 であるような正規分布、つまり  $N(0, 1)$  のことを、標準正規分布 (standard normal distribution) と呼ぶ。

問 352 標準正規分布とは何か?

問 353 標準正規分布  $N(0, 1)$  の確率密度関数  $f(z)$  は、次式のようになることを示せ:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \quad (15.24)$$

注: 普通、確率密度関数の中の変数は  $x$  で表すことが多いが、標準正規分布に限っては、変数を  $z$  で表す慣習である。

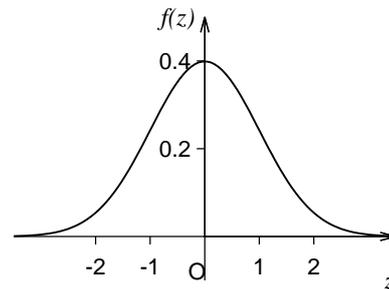


図 15.2 標準正規分布  $N(0, 1)$  の確率密度関数。式 (15.24)。

問 354 式 (15.24) は偶関数であることを示せ。ヒント: 偶関数の定義に戻って判定する。

問 355  $N(\mu, \sigma^2)$  に従う確率変数  $X$  を標準化して得られる確率変数  $Z$  は、標準正規分布に従うことを示せ\*4。

問 356 標準正規分布に従う確率変数  $Z$  について、以下の事実をパソコンによる数値積分 (P.117) によって確かめよ。ヒント: P.209 式 (14.75)。

$$(1) P(-1 \leq Z \leq 1) \doteq 0.683 \quad (15.25)$$

$$(2) P(-1.64 \leq Z \leq 1.64) \doteq 0.90 \quad (15.26)$$

$$(3) P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \doteq 0.95 \quad (15.27)$$

これらの値は、後で学ぶ「区間推定」や、いずれ学ぶ「仮説検定」という理論で必要になるので、記憶せよ。

式 (15.25)~式 (15.27) をグラフ上で表すと、図 15.3 の上段 (塗りつぶした部分) のようになる:

\*4 統計学では、なぜか標準正規分布に従うような確率変数を  $Z$  と書き、その実現値を  $z$  と書く慣習がある。慣習はルールではないので無視してもいいのだが、文書を読むときには助けになる。

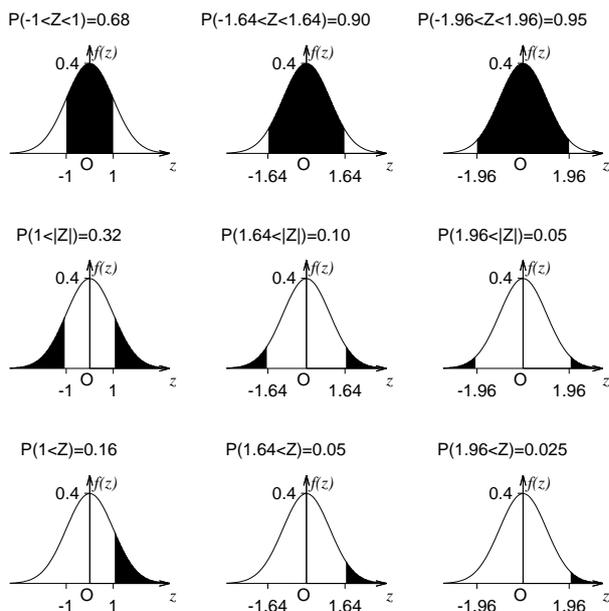


図 15.3 標準正規分布  $N(0, 1)$  の確率密度関数と確率の関係。黒く塗りつぶした部分の面積が、それぞれのグラフの上部に書かれた確率を表す。

図 15.3 の中段で塗りつぶされた部分（左右の裾野）は、上段で塗りつぶされなかった部分である。それらに対応する確率は、1 から上段の確率を引いたものになっている。例えば、中段の左は  $Z$  が  $-1$  以下または  $1$  以上になる確率（約 0.32）を表しているが、それは 1 から「 $Z$  が  $-1$  以上  $1$  以下」になる確率（上段の左；約 0.68）を引いた値になっている。

下段で塗りつぶされた部分の面積は、中段で塗りつぶされた部分の半分である。各グラフは左右対称（偶関数）だからだ！

問 357 標準正規分布に従う確率変数  $Z$  を考える。  
 図 15.3 を用いて、以下の値を求めよ：

- (1)  $P(Z \leq 1.64)$
- (2)  $P(Z \leq 1.96)$
- (3)  $P(0 \leq Z \leq 1.96)$

問 356, 問 357, 図 15.3 は、あくまで、標準正規分布の話である。正規分布以外の確率分布については、これらの数値は異なってくる。しかも、多くの現実的な場合では母集団が従う確率分布がそもそもわからない。ならばなぜ統計学で正規分布について熱く語るのかというと、次の「中心極限定理」があるからなのだ。

## 15.7 中心極限定理

証明は難しいので省くが<sup>\*5</sup>、以下の定理は極めて重要である。

——— 中心極限定理 ———

母集団がどんな確率分布であっても、十分に大きな標本の標本平均は正規分布に従う。ただし標本データどうしは独立でなければならない。

よくある間違い 63 上記の中の「の標本平均」という部分を落として覚えてしまう。... 例えば「サイコロを振って出る目の値」というデータをたくさんとれば、データ自体が正規分布する、従って、連続的な実現値、例えば 2.3 とか 5.67 とかをとりうる、というのですか？ そんなわけないでしょ。何回振ろうが、サイコロの目は 1 から 6 までの整数値しか取り得ません。

例 15.3 コインを 1 回投げて表の出る回数を  $X$  とする。 $X$  は 0 と 1 を実現値とする確率変数で、期待値  $\mu = 0.5$ 、標準偏差  $\sigma = 0.5$  である。コインを  $n$  回投げたときに表が出る割合は、このような確率変数  $n$  個からなる標本  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  の、標本平均  $\bar{X}$  とみなせる。 $n$  が大きくなれば、 $\bar{X}$  は  $\mu = 0.5$  に近づき、その標準偏差は  $\sigma/\sqrt{n} = 0.5/\sqrt{n}$  になる（大数の法則）。このときの  $\bar{X}$  の確率分布は、正規分布  $N(0.5, 0.5^2/n)$  に近づく。（例おわり）

大数の法則と中心極限定理は、どちらも標本サイズ  $n$  が大きくなると標本平均  $\bar{X}$  がどうなるかを予測する定理だが、大数の法則は、 $\bar{X}$  が  $1/\sqrt{n}$  の速さで  $E[X]$  に近付くことを主張し、中心極限定理は、 $\bar{X}$  の確率分布が正規分布に近付くことを主張している。両者の違いを区別して記憶せよ。

問 358 中心極限定理とは何か？

問 359 コインを 10000 回投げて、表が 5100 回以上出る確率はどのくらいか？ ヒント：例 15.3 で  $n = 10000$  とし、 $P(0.51 \leq \bar{X})$  を求めればよい。

<sup>\*5</sup> これを証明するには今の君の数学力では無理で、フーリエ変換という数学的技法を駆使して「特性関数」というものを考える必要がある。それには、複素数の積分とオイラーの公式が関与している

## 15.8 母平均の区間推定

統計学を実際の場面で応用する際に、我々は標本平均  $\bar{X}$  によって、母平均つまり期待値  $\mu$  を推定しようとする。そして、標本サイズ  $n$  が大きくなるほど、 $\bar{X}$  は  $\mu$  に近づく (大数の法則より)。その「近づく」ということを、より定量的に表してみよう:

まず、母集団がどのような確率分布に従うとしても、 $\bar{X}$  は、期待値  $\mu$ 、標準偏差  $\sigma/\sqrt{n}$  の正規分布に従う確率変数とみなせる (ここで、 $\sigma$  は母集団の標準偏差)。これは大数の法則と中心極限定理の帰結である。さて、 $\bar{X}$  を標準化してできる、以下のような確率変数  $Z$  を考える:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (15.28)$$

問 355 より、 $Z$  は標準正規分布に従う。従って、式 (15.26) より、

$$P(-1.64 \leq Z \leq 1.64) \doteq 0.90 \quad (15.29)$$

となる。つまり、

$$P\left(-1.64 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.64\right) \doteq 0.90 \quad (15.30)$$

となる。式 (15.30) の ( ) 内の不等式を変形すると、

$$P\left(\bar{X} - 1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \doteq 0.90 \quad (15.31)$$

となる。つまり、期待値  $\mu$  は、90 パーセントの確率で、区間

$$\left[\bar{X} - 1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (15.32)$$

に含まれるだろう、という推定ができるのだ (「 $a$  以上  $b$  以下」の実数の集合 (区間) を、 $[a, b]$  と表す。P.193 参照)。このように、母集団に関する特徴的な値 (この場合は母平均  $\mu$ ) を、「ある確率 (この場合は 90 パーセント) で、ある区間の中に含まれる」という形で推定することを、区間推定 という。その確率 (この場合は 90 パーセント) のことを信頼度と呼び、その区間 (この場合は式 (15.32)) のことを 信頼区間 と呼ぶ。

注: 「 $\mu$  は 90 パーセントの確率で、ある区間の中に含まれる」とは、具体的にはどういうことだろうか?  $\mu$  の値がその区間にふらふらと迷い込んだり出て行ったりするイメージを持ちやすいが、そうではない。 $\mu$  の値は、我々にはわからないが、どこかに既に存在して、静かに座っているのだ。標本 ( $n$  個のデータの集まり) を 1 つ得れば、式 (15.32) によって「ある区

間」が 1 つ定まる。その区間は、たまたま  $\mu$  を含むようにうまく設定できたかもしれないし、そうでないかもしれない。そういう「標本を 1 つとって区間を 1 つ設定する」ということを、仮想的に何回も (例えば 10000 回とか) 行ったとしたら、そのうち 90 パーセント (例えば 9000 回くらい) で、「設定された区間が  $\mu$  を含む」だろう、という意味なのだ。

1 つしか標本を得ないのに、たくさんの標本を得るという状況のことがなぜわかるのだろうか? ポイントは大数の法則である。標準誤差を標準偏差の  $1/\sqrt{n}$  で推定できる、という定理 (P.221 式 (15.13)) である。その元をたどれば、独立な確率変数の分散は足し算できるという定理 (P.207 式 (14.67)) に行き着くのだ。

もっと高い信頼度で推定したい! という場合は、式 (15.29) 以降の議論を、例えば式 (15.27) を使ってやり直せばよい。すると、信頼度 95 パーセントでの信頼区間は

$$\left[\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (15.33)$$

となり、より広い信頼区間をとらねばならないことがわかる。

このように、母集団の分布が不明でも、中心極限定理と正規分布を使えば、標本平均の「確からしさ」を定量的に検討できるのだ。

問 360 平均値の区間推定において、同じ信頼度のままで、信頼区間の大きさを半分にするためには、標本サイズを何倍にすればよいか?

この問からわかるように、一般に、信頼度を一定にしたままで信頼区間の大きさを  $1/a$  倍にしたければ、 $a^2$  倍の測定回数をこなさねばならない。例えば、信頼区間を  $1/10$  に縮めたければ、測定回数を 100 倍にしなければいけないのだ!

注: 式 (15.32) や式 (15.33) を使って区間推定をする場合、母集団の標準偏差  $\sigma$  が必要である。これは、普通は未知である (標準偏差が既知であるような母集団なら、普通、期待値だって既知だろう。そこまでわかっていたら統計学なんか使う必要ない)。その場合、下の問 361 で行うように、 $\sigma$  は標本標準偏差  $s$  や不偏分散の平方根  $u$  で代用する ( $s$  より  $u$  を使うほうが正確)。ただし、その場合、 $\bar{X}$  は正規分布ではなく、 $t$  分布 という確率分布に従うと考える方が、より正確な議論になる。実用的には、そちらの方が一般的である。といっても、標本サイ

ズが十分に大きければ、正規分布で考えても結論はほとんど変わらない。例えば以下の問 361 を  $t$  分布で考えたとしても、その影響は 95 パーセント信頼区間の 5 桁めの有効数字に現れる程度である。

問 361 ある森で、ある種の昆虫（成虫）を、無作為に 400 個体採集し、その体長を測ったところ、標本平均 1.230 cm、標本標準偏差 0.20 cm を得た。この森に棲むこの昆虫（成虫）の平均的な体長を、信頼度 90 パーセントと信頼度 95 パーセントでそれぞれ区間推定せよ。ただし、標本サイズは十分大きいとみなし、簡単のため、標準偏差を標本標準偏差で代用せよ。

よくある質問 156 いろんな量が正規分布するのはなぜですか？ ... ある量について、多数の独立な要因が関与し、それらの和や平均としてその量が生じるとしましょう。各要因がどういふ確率分布をしても、その和や平均は中心極限定理によって正規分布します。従って、多くの要因がからむほど、その量は正規分布に従いやすいのです。だからといって、なんでもかんでも正規分布を仮定してよい、ということではないので、注意！

よくある質問 157 世の中で生きていくためには統計がすごく大事なのに、高校の授業で扱わないのはヤバいんじゃないですか?! ... 私もそう思います。

## 問題の解答

答 339 統計学において、知りたい対象全体の集合。

答 340 母集団から抽出された要素を集めた集合を標本という。標本を構成する個々の要素（データ）を標本データという。

答 341 標本という集合を構成する要素（標本データ）の個数を、その標本の大きさという。対して、標本という集合の個数を「標本数」という。

答 342 標本データは確率変数だとみなせる。標本データを集めた集合が標本なので、標本は確率変数の集合とみなせる。

答 343 確率変数  $X$  について、 $X$  の実現値と、その実現値が発生する確率との積の総和を、 $X$  の期待値と呼ぶ。

ある標本について、標本データの総和を標本サイズで割って得られる値を、この標本の標本平均と呼ぶ。

答 344 (1) 略。(2) 略。(3)  $\sqrt{1.61 \dots}$  点  $\doteq$  1.27 点。

答 345 略。

答 346 P.203 式 (14.35) を使って ( $a = 1/\sigma$ ,  $b = \mu/\sigma$  とみなして),

$$E\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = E\left[\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right] = \frac{E[X]}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

また、P.207 式 (14.63) を使って ( $a = 1/\sigma$ ,  $b = \mu/\sigma$  とみなして),

$$V\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = V\left[\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right] = \frac{V[X]}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

答 347 (71 cm - 74 cm)/(2.5 cm) = -1.2

答 348 (1)  $50 + 10 \times (-1.2) = 38$ 。(2) 略。

答 349 がんばれ!

答 350

(1)  $t = (x - \mu)/\sqrt{2}\sigma$  と置いて、両辺を  $x$  で微分すると  $dx = \sqrt{2}\sigma dt$  を得る。また、 $t^2 = (x - \mu)^2/2\sigma^2$ 。これらを式 (15.22) の左辺に代入すると与式\*6を得る。

(2) ガウス積分の公式から、

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1$$

答 351 図 15.4。

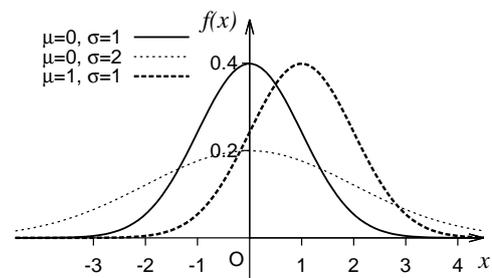


図 15.4 正規分布の確率密度関数

答 352 期待値が 0、標準偏差が 1 であるような正規分布、つまり  $N(0, 1)$  のこと。

答 353 式 (15.19) において、 $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$  とすれば与式を得る (注に従って、 $x$  は  $z$  と書き換えればよい)。

答 354 略。これがわからない人は、基礎ができていないので、勉強法を考えなおすべきである。

\*6 ここで、 $x \rightarrow \infty$  で  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$  で  $t \rightarrow -\infty$  なので、積分区間は変わらない。

答 355  $X$  を標準化すると,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (15.34)$$

となる。確率密度関数の定義より,

$$P(x < X \leq x + dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \quad (15.35)$$

である。一方、 $X = x$  のとき  $Z = z$  とし、 $X = x + dx$  のとき  $Z = z + dz$  とすると、式 (15.34) より,

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (15.36) \\ z + dz &= \frac{x + dx - \mu}{\sigma} = \frac{x - \mu}{\sigma} + \frac{dx}{\sigma} = z + \frac{dx}{\sigma} \end{aligned}$$

である。従って,

$$dz = dx/\sigma \quad (15.37)$$

である。さて、 $x \leq X < x + dx$  という事象は  $z \leq Z < z + dz$  という事象と同じだから、

$$P(x \leq X < x + dx) = P(z \leq Z < z + dz) \quad (15.38)$$

となる。式 (15.35)、式 (15.38)、式 (15.36) より、

$$\begin{aligned} P(z \leq Z < z + dz) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dx \quad (15.39) \end{aligned}$$

となる。この右辺の  $dx$  を式 (15.37) によって  $\sigma dz$  に置き換えると、

$$\begin{aligned} P(z \leq Z < z + dz) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \sigma dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \quad (15.40) \end{aligned}$$

となる。この右辺の  $dz$  の係数は、 $N(0, 1)$  の確率密度関数である。従って  $Z$  は  $N(0, 1)$  に従う。 ■

答 356 略。

答 357

- (1)  $P(Z \leq 1.64)$  は、図 15.3 の下段中央の図の白抜きの部分に相当する。塗りつぶされた面積が 0.05 なのだから、 $1 - 0.05 = 0.95$ 。
- (2)  $P(Z \leq 1.96)$  は、図 15.3 の下段右の図の白抜きの部分に相当する。塗りつぶされた面積が 0.025 なの

だから、 $1 - 0.025 = 0.975$ 。

- (3) 図 15.3 の下段右の、右半分を考える。左右対称だから、右半分の面積は 0.5。そこから塗りつぶされた面積 0.025 を引いて、 $0.5 - 0.025 = 0.475$ 。あるいは、図 15.3 の中段右の白抜きの面積 ( $1 - 0.05 = 0.95$ ) の半分で 0.475 としてもよい。

答 358 略。

答 359 表が出る比率  $\bar{X}$  は、今の場合、 $5100/10000 = 0.51$  である。中心極限定理により、 $\bar{X}$  は、近似的には、平均 0.5、標準偏差  $0.5/\sqrt{10000} = 0.005$  の正規分布に従うと考えられる。 $\bar{X} = 0.51$  を標準化すると、

$$Z = \frac{0.51 - 0.5}{0.005} = 2.0$$

となる。従って  $P(2.0 \leq Z)$  を求めればよい ( $Z$  は標準正規分布に従う)。問 356(4) によると、 $P(2.0 \leq Z) \doteq 0.023$ 。従って、求める確率は約 0.023。

答 360 標本サイズを  $n$  とすると、信頼区間の大きさは  $1/\sqrt{n}$  に比例する (式 (15.32) や式 (15.33) でわかるように)。従って、信頼区間の大きさを 1/2 倍にするには、 $1/\sqrt{n}$  を 1/2 倍にしなければならない。すなわち、 $\sqrt{n}$  を 2 倍に、すなわち  $n$  を 4 倍にしなければならない。

答 361 標本平均  $\bar{X} = 1.230$  cm、標準偏差  $\sigma \doteq 0.2$  cm、標本サイズ  $n = 400$  匹とする。これらを式 (15.32)、式 (15.33) に代入すればよい。 $\sigma/\sqrt{n} = 0.2$  cm/ $\sqrt{400} = 0.01$  cm であることから、 $1.64\sigma/\sqrt{n} = 0.0164$  cm、 $1.96\sigma/\sqrt{n} = 0.0196$  cm。従って、母集団の平均  $\mu$  は、信頼度 90 パーセントでは、 $[1.214$  cm,  $1.246$  cm] 信頼度 95 パーセントでは、 $[1.210$  cm,  $1.250$  cm] と区間推定される (ここで、測定値の有効数字が 4 桁なので、信頼区間の上下限の値は 5 桁目を四捨五入した)。

よくある間違い 64 この問題の回答で単位を付け忘れて、 $[1.214, 1.246]$  のように書いてしまう。

## 索引

- 2 項分布, 202
- arccos, 107  
arcsin, 107  
arctan, 107
- cf., 193  
cos, 102  
cosec, 102
- det, 174  
dimension check, 29
- e.g., 193  
exp, 85
- i.e., 193
- ln, 10  
log, 9
- s.t., 193  
sec, 102  
sin, 102  
SI 基本単位, 22  
SI 単位系, 22
- tan, 102  
 $t$  分布, 226
- アークコサイン, 107  
アークサイン, 107  
アークタンジェント, 107  
位相, 147  
一次関数, 52  
一次近似, 74  
一次結合, 167  
位置ベクトル, 12  
一般項, 39  
陰関数, 60  
裏, 184  
運動量, 164  
エクスポネンシャル, 85  
エネルギー, 27  
円周率, 2  
オイラーの公式, 146  
階乗, 34  
解析学, 49  
解析学の基本定理, 121  
解析的, 69  
解析的に解く, 124  
角運動量, 164  
角速度, 110, 164  
確率分布, 201  
確率分布関数, 210  
確率変数, 201
- 確率密度関数, 209  
加減乗除, 4  
加算, 4  
加速度, 79  
加速度ベクトル, 80  
片対数グラフ, 90  
傾き, 50  
加法定理, 104  
環境収容力, 140  
関数, 49  
外積, 162  
ガウス関数, 90, 124  
ガウス積分, 129  
ガウス分布, 223  
ガウス平面, 146  
幾何ベクトル, 166  
奇関数, 57  
期待値, 202  
気体定数, 28  
級数, 39  
共通部分, 190  
共分散, 208  
共役複素数, 145  
極形式, 147  
極限, 50, 65  
極座標, 109  
極小, 80  
極大, 80  
極値, 80  
虚数, 38  
虚数単位, 38  
虚数部, 145  
距離, 34, 77  
逆, 184  
逆関数, 59  
逆行列, 175  
逆三角関数, 107  
行, 171  
行ベクトル, 157  
行列, 171  
行列式, 173  
ギリシャ文字, 16  
空集合, 190  
空事象, 197  
区間, 193  
区間推定, 226  
組み立て単位, 22  
偶関数, 57  
経験的確率, 198  
係数行列, 176  
結合法則, 4  
元, 188  
減算, 4  
原始関数, 121

- 高階導関数, 75
- 交換法則, 4
- 公差, 39
- 恒等式, 38
- 公比, 39
- 公理, 1
- 個体群の成長曲線, 139
- 弧度法, 99
- 固有値, 177
- 固有ベクトル, 177
- 固有方程式, 177
- コルモゴロフの公理, 200
- 根, 37
- 根元事象, 197
- 合成関数, 58
- 誤差伝播の法則, 213, 214
- 三角関数, 102
- 三角関数の合成, 110
- サンプル, 219
- 三平方の定理, 99
- シグモイド関数, 95
- 仕事, 27
- 指数, 7
- 指数関数, 85
- 指数法則, 7
- 自然数, 1
- 自然対数, 9
- 自然対数の底, 9
- 四則演算, 4
- 集合, 188
- 収束, 40
- 初期条件, 137
- 初項, 39
- 信頼区間, 226
- 信頼度, 226
- 次元, 20, 166
- 事象, 197
- 次数, 35, 171
- 磁束密度, 164
- 実数, 2
- 実数部, 145
- 実現値, 201
- 重解, 37
- 重根, 37
- 重積分, 151
- 従属変数, 49
- 十分条件, 187
- 純虚数, 38
- 順列, 34
- 条件, 183
- 条件付き確率, 200
- 乗算, 4
- 常用対数, 9
- 除算, 4
- 磁力, 164
- 水素イオン濃度, 30
- 数学的確率, 199
- 数学的帰納法, 42
- 数値積分, 117
- 数値微分, 69
- 数ベクトル, 166
- 数列, 39
- 数列の和, 41
- スカラー, 11
- スカラー積, 158
- 正規化, 223
- 正規分布, 223
- 正弦, 102
- 正弦定理, 106
- 正弦曲線, 105
- 正四面体角, 165
- 正射影, 159
- 整数, 2
- 正接, 102
- 正則行列, 175
- 成分, 171
- 正方行列, 171
- 積集合, 190
- 関孝和, 175
- 積分, 116
- 積分定数, 122
- 積分変数, 116
- 積和公式, 111
- 接頭辞, 23
- 切片, 52
- 遷移行列, 179
- 線型近似, 74
- 線型結合, 167
- 線型性, 42
- 絶対値, 34, 147
- 漸化式, 40
- 漸近線, 50
- 全体集合, 190
- 全微分, 150
- 相加平均・相乗平均, 33
- 相関係数, 208
- 双曲線, 50
- 相對参照, 46
- 速度, 78
- 速度ベクトル, 80
- 対角化, 178
- 対角行列, 178
- 対角成分, 173
- 対偶, 184
- 対称移動, 51
- 対数, 9
- 対数グラフ, 90
- 対数微分, 89
- 体積分, 151
- 多項式, 35
- 多重積分, 151
- 単位, 19
- 単位円, 102
- 単位行列, 173
- 単位系, 22
- 単位ベクトル, 158
- 単項式, 35
- 単振動, 110
- 単調減少, 40
- 単調増加, 40
- 代数学の基本定理, 38
- 大数の法則, 221
- 代数方程式, 37
- 力のモーメント, 164
- 置換積分, 126
- 中心極限定理, 225
- 直積, 191
- 底, 9
- 定義, 3
- 定数関数, 49
- 定積分, 116, 121
- 底の変換公式, 88
- 定理, 3
- テンソル, 157

- テーラー展開, 143
- デカルト座標, 109
- 電力, 28
- 電力量, 28
- 統計的確率, 198
- 等差数列, 39
- 等速円運動, 164
- 等比数列, 39
- 特性方程式, 177
- トルク, 164
- 導関数, 67
- 動径, 147
- 同値, 187
- 同様の確からしさの原理, 199
- 独立, 200
- 独立変数, 49
- ド・モルガンの法則, 191
- 内積, 158
- 内的自然増加率, 140
- 内分, 12
- 二項係数, 35
- 二項定理, 36
- 2項分布, 202
- ネイピア数, 9, 85
- 排反, 197
- 背理法, 188
- 発散, 40
- 半減期, 93
- 反応速度定数, 94
- 反比例関係, 50
- 判別式, 37
- 反例, 186
- 倍角公式, 104
- 引数, 49
- 非対角成分, 173
- 必要十分条件, 187
- 必要条件, 187
- 否定, 183, 185
- 標準化, 223
- 標準誤差, 221
- 標準偏差, 206
- 標本, 219
- 標本データ, 219
- 標本標準偏差, 222
- 標本分散, 222
- 比例関係, 50
- ビッターリッヒ法, 101
- 微分係数, 66
- 微分方程式, 92
- ピタゴラスの定理, 99
- 複素共役, 145
- 複素数, 38, 145
- 複素平面, 146
- 不確かさ伝播の法則, 214
- 不定, 177
- 不定積分, 121
- 不等式, 56
- 不能, 177
- 普遍集合, 190
- 不偏分散, 222
- 物理量, 19
- 部分集合, 189
- 部分積分, 126
- 部分分数展開, 125
- 分散, 206
- 分配法則, 4
- 平均, 203, 220
- 平行, 11
- 平行移動, 51
- 平行四辺形の面積, 174
- 平方完成, 36
- 変位, 77
- 偏角, 147
- 偏差値, 223
- 変数分離, 138
- 偏導関数, 148
- 偏微分, 148
- ベイズの定理, 200
- 巾, 7
- べき関数, 50, 92
- ベクトル, 10, 167
- ベクトル積, 162
- ベルヌーイ試行, 202
- ベルヌーイ分布, 202
- ベータ崩壊, 93
- 法線ベクトル, 160
- 放物線, 50
- 補集合, 190
- 母集団, 219
- 母分散, 219
- 母平均, 219
- マクローリン展開, 143
- マグニチュード, 96
- 交わり, 190
- マルコフ過程, 179
- 丸める, 14
- 右ネジ, 174
- 無限小, 66
- 無限大, 4
- 無次元量, 22
- 結び, 190
- 無名数, 22
- 無理数, 2
- 命題, 183
- 面積分, 151
- 有限小, 66
- 有効数字, 13
- 有理数, 2
- 余因子行列, 175
- 要素, 188
- 余弦, 102
- 余弦定理, 107
- 余事象, 198
- ラジアン, 99
- 離散的確率変数, 209
- 両対数グラフ, 91
- 理論的確率, 199
- 累乗, 7
- ルジャンドル関数, 82
- ルベグ積分, 117
- 零行列, 172
- 列, 171
- 列ベクトル, 157
- 連続的確率変数, 209
- 連立一次方程式, 176
- ロジスティック方程式, 139
- 和集合, 190
- 和積公式, 111
- パラメータ, 60
- ロジスティック曲線, 95