

物理学I教材

(ニュートン力学)

筑波大学生物資源学類 平成28年度 春学期; 05/24改訂版

目次

第 1 章	はじめに	1
1.1	方針	1
1.2	物理学とは	2
1.3	だまされないための物理学	3
1.4	ものづくりや研究のための物理学	4
1.5	危機管理のための物理学	4
1.6	スポーツや音楽のための物理学	4
1.7	生物資源学類と物理学	5
1.8	法則・原理・定義・公理・定理	5
1.9	概算	6
1.10	質点モデル	7
第 2 章	力の法則	9
2.1	4 つの力	9
2.2	力の一般的な性質	9
2.3	重力	9
2.4	クーロン力	12
2.5	電場と磁場	13
2.6	張力	13
2.7	弾性力 (フックの法則)	15
2.8	垂直抗力	18
2.9	摩擦力 (クーロンの摩擦法則)	19
2.10	系とは何か?	20
2.11	解答	21
第 3 章	仕事とエネルギー	25
3.1	仮想仕事の原理	25
3.2	仕事とエネルギー	27
3.3	ポテンシャルエネルギー	30
3.4	仕事率	32
3.5	電位・電位差・電圧	32
3.6	電流・電力・電力量	33
3.7	解答	34
第 4 章	運動の三法則	39
4.1	位置・速度・加速度	39
4.2	等速直線運動	40

4.3	等加速度直線運動	40
4.4	運動の三法則	40
4.5	自由落下	43
4.6	空気抵抗	44
4.7	運動の三法則と哲学	45
4.8	解答	45
第5章	さまざまな運動	49
5.1	単振動	49
5.2	斜め投げ上げ	51
5.3	円運動	52
5.4	解答	54
第6章	力学的エネルギー保存則 (1)	57
6.1	運動エネルギー	57
6.2	力学的エネルギー保存則	59
6.3	物理学における保存則	61
6.4	解答	62
第7章	運動量保存則	65
7.1	運動量保存則	65
7.2	弾性衝突と非弾性衝突	67
7.3	回転運動再考	69
7.4	解答	70
第8章	熱力学入門	73
8.1	温度の定義	73
8.2	理想気体の状態方程式 (気体分子運動論)	74
8.3	内部エネルギーと定積モル比熱	76
8.4	熱力学第一法則	77
8.5	エンタルピー	77
8.6	エントロピー	78
8.7	解答	78
第9章	力学的エネルギー保存則 (2)	79
9.1	3次元空間における運動エネルギー	79
9.2	3次元空間における仕事	79
9.3	3次元空間におけるポテンシャルエネルギー	80
9.4	3次元空間における力学的エネルギー保存則	81
9.5	振り子の運動	82
9.6	ポテンシャルエネルギーと力の関係	83
9.7	解答	84
第10章	角運動量保存則	87
10.1	外積	87
10.2	角運動量	87

10.3	角運動量保存則	89
10.4	解答	91
第 11 章	慣性モーメント	93
11.1	剛体というモデル	93
11.2	剛体の回転運動	93
11.3	慣性モーメント	94
11.4	分子の運動と慣性モーメント	97
11.5	剛体振り子	98
11.6	解答	99
11.7	補遺: 量子のエネルギー	101
11.8	補遺: 熱放射	102
第 12 章	慣性系と慣性力	103
12.1	慣性系と慣性の法則	103
12.2	複数の慣性系	103
12.3	非慣性系と慣性力	104
12.4	回転する座標系の慣性力	105
12.5	解答	107

第1章

はじめに

1.1 方針

この教材は筑波大学生物資源学類 1 年次「物理学 I」(奈佐原顕郎)の教材である。まず、本書の基本的な方針を示しておこう。

- 想定する学生は、高校の数学 III までは履修した人(物理基礎や物理学は不問)。
 - 副教材として生物資源学類の「数学リメディアル教材」を参照する。
 - 物理学の理解に数学の学力は必須。「あったら良い」という程度でなく、「必須」。それも、相当高度な数学が必要。この教材では、前半部では主に高校数学(数学 III まで)を使うが、後半部ではさらに大学の数学(微分方程式・偏微分・全微分・外積など)も使う。これらの数学は「数学リメディアル教材」で自主的に学んでおくこと。「とりあえず物理を勉強してみて、数学が必要になったらそのとき数学を勉強しよう」という考えは甘い!
 - 高校物理の履修は前提としないが、一応、高校物理の参考書として山本・左巻「新しい高校物理の教科書」(講談社ブルーバックス)をお勧めする。
 - 物理実験の映像をたくさん見よう。物理学は机上の空論ではなく、実際の自然現象を説明する理論だから、実験を通して理解することが絶対に必要。テレビ番組では以下がお勧め:
 - NHK 教育「NHK 高校講座 物理」
... ネット上でも見れます。
 - NHK 教育「ピタゴラスイッチ」
... 特にピタゴラ装置
 - NHK 教育「大科学実験」
 - 日本テレビ「ザ! 鉄腕! DASH!!」
... 特に DASH ガレージ
 - 日本テレビ「世界一受けたい授業」
... 特にでんじろう先生
- 他にも、ネット上 (YouTube など) に、良い動画が

たくさんある。楽しんで見よう!

- この教材の誤植訂正情報は、以下のウェブサイトに掲載する:
<http://ryuiki.agbi.tsukuba.ac.jp/lec/16-physics/>
- この教材の内容は、(基本法則や慣習的に理解されていること以外は)全てオリジナルである。ただし、Richard Feynman "Lectures on Physics" Addison-Wesley から影響を受けている(岩波書店から「ファインマン物理学」という題で和訳が出ている)。
- ベクトルは、細字や「文字に上矢印」ではなく、太字で書くこと。
- x を χ と書かないように。
- 数値を求める問題では、(無次元量でない限り)数値に単位をつけること。数値の有効数字は、特に指定がなければ、2 桁でよろしい。

よくある質問 1 高校で物理を勉強していないので不安です ... あまり関係ありません。重要なのは高校数学。この教材は、高校物理未習の生物資源学類生を想定しています。

よくある質問 2 物理は高校で挫折しましたが、高校数学は学びました。リベンジできますかね? ... 高校数学を修めた今こそ、物理にチャレンジ&リベンジする時です! 実際、高校物理の難しさの大部分は、ちゃんと数学を使わない(文科省の縛りで使っちゃいけないことになっている)ことにあります。ちゃんと数学を使えば「覚えること」は半分以下に減り、見通しもすっきりします。

よくある質問 3 このテキストは高校物理の復習ですか? ... 部分的にはそうですが、高校物理とは別物と思って下さい。高校物理と同じ題材でも、高校物理とは違ったスタイル(数学をガンガン使う)で説明します。「高校物理やったから簡単!」とか思っていると痛い目にあいますよ。

よくある質問 4 私は高校物理既習ですが、有利ではないのですか？ ... 高校物理をやった人は、有利な面と不利な面があります。それぞれの題材や問題に慣れ親しんでいるのは有利なこと。高校物理と似た話題を「それ高校でやった」とスルーしてしまいがちで、体系的な理解に到達しにくいのは不利なこと。高校物理を忘れて、謙虚にやりなおすことが何より大事。

よくある質問 5 てことは、もしかして高校物理をやったのは無意味？ ... そんなことはありません。ただ、人間は成功体験や先入観があると新しいことを学びづらくなります。それに気をつけよう、と言ってるだけです。謙虚にやり直せば、「高校で学んだアレは実はこういうことだったのか!」という驚きや感動が、君を大いに成長させてくれるでしょうし、それは高校で物理をやらなかった人には味わえない体験です。

よくある質問 6 物理、嫌いです。どうすれば好きになれますか？ ... 物理が嫌いなのは、「わからない」からでは？ 数学もそうですが、わからないときは、逃げたりスルーしたり闇雲に飲み込んだりしないで、わかるところまで遡って、納得がいくまでじっくり考えたり質問したりしてみよう。それにはまず、わからないことの「わからなさ」を言葉に出して表現する言語能力も必要です。言語能力を養うには、物理に限らず、多くの本を読み、多くの人と議論することも必要。

よくある質問 7 簡単な公式は覚えておいた方が良いでしょうか。 ... 「公式」よりも、まず「基本法則」と「定義」をしっかりと覚えましょう。「公式」は、基本法則と定義から論理的に導出されます。

1.2 物理学とは

自然現象は多種多様であり、それらの多くはどのように起きているのか説明しがたいように思える。しかし、どんな自然現象でも少数の「法則」に従うはずだと考え、そのような法則、すなわち「基本法則」*1を解明し、基本法則で自然現象を説明しようとする学問が物理学だ。

そして、そのような法則を見出すと、執拗にその正しさを、あらゆる実験で検証する。そして、その法則に合わない「例外」や「矛盾」を見つけたら、それをきちんと説明できて、かつ、もとの法則とも矛盾しないような、より包括的な法則を物理学は探す。そのとき武器になるのは数学だ。物理学では、人間の想像力が及ばない法則であっても、数学の論理と整合性は崩れないだろうと考え、数学の力を信じる。だから、物理学を学ぶには数学が必

要なのだ。

物理学の基礎は、おおまかに言って、以下のような分野にわけられる：

- 力学
- 熱力学
- 電磁気学
- 相対論
- 量子力学

力学は「古典力学」とか「ニュートン力学」ともいう。我々の日常的な時空間スケールでの物体の運動を扱う。1学期に学ぶのはこの分野である。津波の伝播、地震波の伝播、地球の周囲をまわる月の運動、本田圭佑のフリーキック、浅田真央のトリプルアクセル、レインボーブリッジの強度や構造、交通事故の衝撃等は、力学で解析できる。「運動の三法則」と呼ばれる法則（慣性の法則・運動方程式・作用反作用の法則）が基本法則である。万有引力の法則も力学の一部である。力学を数学的に洗練した「解析力学」という分野もある。

熱力学は、熱や温度が関与する現象を扱う。「化学 I」や秋学期「物理学 II」で学ぶ。同じ対象を統計学の手法を使って解析する「統計力学」というのもあるが、熱力学との区別は明瞭ではない。そこで、両者を一緒にして「熱力学」とか「熱・統計力学」と呼ぶこともある。「熱力学の三法則」という法則（エネルギー保存則・エントロピー増大の法則・絶対エントロピーの法則）が基本法則だ。多くの場合、後述する量子力学と組み合わせあって威力を発揮する。気体の状態方程式（温度・圧力・体積の関係）、比熱、相転移（融解・蒸発等）、電池の活性などは熱力学で解析できる。地球温暖化は大部分が熱力学の問題だ。

電磁気学は、電気や磁気が関与する現象を扱う。「物理学 II」の後半で学ぶ。「マクスウェル方程式」というのがその基本法則だ。中学校以来なじみ深い「オームの法則」は、電磁気学と熱力学との境界に位置する法則である。身近な電気製品はもちろん電磁気学の対象だ。分子や原子の間で働く力の大部分は電磁気力なので、物質の構造や性質を理解するためにも電磁気学は必要だ。空間の電磁気的な性質が波として伝わる現象が「電磁波」すなわち「光」だ。光を電磁気学的に解析する中で、次に述べる相対論が生まれた。

相対論は、大きな速さで運動する物体の運動に関する物理学である。電磁気学から導かれ、実験的にも確かめられたこととして、光は誰から見ても一定の速さで飛び、

*1 「基本原理」「第一原理」などとも言う。

という事実がある。ここから出発し、力学を修正したものを「特殊相対論」と呼ぶ。その中で、質量がエネルギーと同じものであることが示された。また、特殊相対論を包含し、さらに万有引力（重力）を説明するものを「一般相対論」と呼ぶ。天文学には相対論が必要である。原子力（核反応）で解放されるエネルギーは相対論で説明される。カーナビで使う GPS (Global Positioning System; 人工衛星からの電波によって、地上の位置を高精度で計測するシステム) の精度を高めるにも相対論が必要。

量子力学は「量子論」とも言う。主に原子や分子といった極微のスケールの現象を説明する。「シュレディンガー方程式」というのがよく出てくるが(秋学期の「化学 II」でも出てくるだろう)、必ずしもそれが基本法則ではない。量子力学の基本法則は高度に抽象的で数学的だ。そこでは微積分だけでなく、線形代数学(ベクトルや行列の理論)や、複素数、確率などの考え方が活躍する。化学や生物学のミクロな現象は量子力学が支配する。光子が活躍する現象、例えば太陽光(熱放射)や、植物の光合成、レーザー、発光ダイオード(LED)などは、量子力学が無いと説明できない。コンピューター等の情報デバイス(半導体)のほとんどは量子力学をもとに高性能化・小型化されている。病気が怪我をして病院で MRI (核磁気共鳴画像法) の診断を受けた人もいるだろうが、あれは物理学、特に量子力学のカタマリである。筑波大学の前身だった東京文科大学で、朝永振一郎教授がノーベル物理学賞をとったが、それは量子力学の一分野(量子電磁力学)を開いた功績によるものである。

問 1 力学・熱力学・電磁気学の、それぞれの基本法則の名前を述べよ(内容はまだ理解しなくてよい)。

これらの物理学を組み合わせ、発展させることで、物理学は様々な対象を扱う。宇宙論(天文学)や気象学、多くの工学(電気工学・電子工学・建築工学・土木工学・機械工学・航空工学・船舶工学)は、物理学に立脚する(というか実質的にほとんど物理学だ)。

一方で、原子よりもずっと小さいスケールの粒子(素粒子)の法則を追求し、現有の様々な法則を統一的に理解するために「究極の法則」を探す営為も、物理学の先端で続けられている。湯川秀樹、南部陽一郎、益川敏英、小林誠、小柴昌俊、梶田隆章といった日本人物理学者がノーベル物理学賞を受賞したのはこの分野である。

また、その派生的な成果として、様々な素粒子で人間の病気を治療する方法が開発されたり(筑波大学病院の

重粒子線治療)、火山の活動を素粒子で透過的に観測する技術が開発されたりしている。

このように考えれば、ほとんどの科学は、根本の部分で物理学に依存することがわかるだろう。物理学以外の科学も多々あるが、それらが扱う対象は、ほとんどが物理学の法則に従う。ただ、往々にして対象が複雑・特殊過ぎて、物理学の法則を直接的に適用するのが大変だから、とりあえず物理学とは別の学問とするのだ。

そういうわけで、「私は に興味があるから物理学は関係ない」という考え方はとてもズレている。文化・経済・文学・芸術などですら物理学と無関係ではない。文化や経済に大きな影響を与える新技術の開発や地球環境変動は、それを理解するのに物理学が必要である。夏目漱石の小説には物理学の話題が多く登場する。音楽は楽器の開発とともに発展したが、楽器は非常に物理学的な装置(音響工学)である。

よくある質問 8 量子力学にとっても興味があります。... この授業では量子力学についてほとんど言及できませんが、量子力学はすごい学問です。リチャード・ファインマン著「光と物質の不思議な理論」(岩波書店)や、朝永振一郎著「鏡の中の物理学」(講談社)などを読んでみましょう。本格的に勉強したければ、数学をしっかり勉強してください。

1.3 だまされないための物理学

ところで、世の中には、オカルト的な科学がたくさんある。物理学は、そのようなものへの耐性を君に与えてくれる。

例 1.1 「マイナスイオン」というのが健康に良い、という話が社会に広まり、「マイナスイオンを出す装置」なるものが開発・販売されている。そういうのを聞いて、懐疑的に思うのが物理学だ。物理学には「電荷の保存則」という強い法則があり、それを否定する実験結果は見つかっていない。もし「マイナスイオン」を発生するのなら、それを打ち消すプラスの電荷がどこかにあるはずで、それはどこに行っているのだ?

例 1.2 テレポーテーションやテレパシーという超能力に対しても、物理学は懐疑的である。物理学では、「光よりも速く移動する物体は無い」という強い法則(相対性理論)がある。それを否定する事実を多くの物理学者が血眼になって探したが、いまだにひとつも見つかっていない。もし物体が瞬間的に遠くに移動したら、その法

則が崩れてしまう。

例 1.3 水を凍らせる際に、水にやさしい言葉をかけるときれいな氷の結晶ができる、という話がある。これも物理学は懐疑的である。物理学(熱力学)では、物体の結晶成長に関する精密な理論ができており、結晶のできる様子は温度や圧力、湿度(過飽和度)、不純物の存在などによって決まることがわかっている。

例 1.4 2003年頃、あるカルト宗教が「スカラー電磁波」なるものから身をまもるために、あらゆるものに白い布を巻き付けるという行動に出たことがテレビで報道されたが、物理を学んだ人は、電磁波はベクトルの波であり、「スカラー電磁波」などそもそも存在しないと知っている。

オカルト科学は、いかにも科学的な裏付けがありそうな言葉で、科学が苦手な人をだます。特に、物理っぽい言葉がよく使われるのは、多くの人が物理が苦手だからだろうか。物理をきちんと理解していれば、オカルト科学にだまされる危険は大きく減るだろう。

問 2 社会を騒がせたオカルト的な科学の例を1つ調べて、その概要と、君ならそれをどう見破るかを合計200字~400字程度で述べよ。ただし、上で例に挙げた事例はダメ。

1.4 ものづくりや研究のための物理学

さて、石だろうが紙だろうが生き物だろうが食べ物だろうが、物を相手にする仕事には、測ったり作ったりということが不可欠になる。測るということは、対象の特徴を、数値的な量に置き換えて表現することだ。その過程は物理学である。例えば溶液中の化学物質の濃度を測るには、特定の波長の光がその溶液をどれだけ透過するかを調べるが、その原理は物理学である。

原理を知らないでも、説明書(マニュアル)のとおりによれば、とりあえず計測機械を使うことはできる。しかし、マニュアルを読みこなすには、原理がわかっていると大変だ。マニュアルは人が書いたものなので、ミスもあり得る。あるいは「こんなことはマニュアルを書くまでもないだろう」ということもあるだろう。

実験したり物を作ったりするには、計測だけでなく「制御」も重要になる。例えば生き物を育てるときに、温度や光、湿度などの環境を一定に保つことは、しばしば

必要になる。その原理も、物理学である。物理学をきちんとわかっていれば、高価な恒温槽などを買わなくても手近な材料や機械を組み合わせ、適切な制御系を組むことができる。

このように、計測も制御も、多少なりとも機械が必要になる。機械は君の気持ちには無関係に、あくまでも物理学の法則に従って働くのだ。君が機械を手足のように自在に使いたいならば、機械の気持ち、つまりは物理学を理解しなければならない。そのためには、物理学実験を学ぶ必要がある。特に、多くの機械は電気で動くから、電気の知識は重要である。

1.5 危機管理のための物理学

さて、社会にも人生にも危機(ピンチ)はある。生命を脅かすピンチの多くは物理的な現象である。交通事故、飛行機の墜落、船の沈没などはニュートン力学(とその応用である流体力学)である。特にこれから運転免許をとる諸君は、車の構造や交通法規の背景に、たくさんの物理学があることを意識しよう。意味や仕組みがわかっただけで、ルールも守る気になるものだし、結果的に安全な「カーライフ」を送ることにつながる。

自然災害(津波や台風、地震、落雷、火山噴火など)も、多くは物理学(地球物理学)で扱われる。落下や感電、窒息なども物理現象である。これらを事前に予防したり、対策したりするには、やはり物理学の考え方が重要だ。

家庭用電気製品は、事故が起きないように、メーカーが慎重に設計・検証して作られるので、めったに事故は起きない。しかし、それでも老朽化すると故障するし、事故が起こる。それを防ぐのは、個人の判断であり、管理である。それには機械の動作原理の理解、つまり物理学が必要である。

家電製品以外の機械、つまり研究・業務目的の機械は、「プロ仕様」なので、家電製品のような徹底した安全対策や検証はされていないのが普通である。専門的な中小企業が作ることが多いし品数が出ないので、そのような「素人向けの安全対策」までは手がまわらないのだ。従って、そのような機械を扱うときには、慎重さと判断力、熟練が必要で、それが、多くの資格が必要な理由である。そういう資格試験の問題の多くは物理学である。

1.6 スポーツや音楽のための物理学

意識している人は少ないが、実は、スポーツと音楽は物理学のカタマリである。テニスで速いサーブを打つに

は？サッカーでボールのスピードを上げるために芝に水を撒くのはなぜ？相撲で小さな力士が大きな相手に押し負けれないようにするには？などなど、多くの工夫やスキルは、物理学の観点で裏付けできるし説明できる。だからスポーツ用品メーカーの開発部はまるで物理学の研究室だ。物理学がわかると、他人のフォームやスキルの中の良いところに気付きやすくなるし、自分の癖に気付いたり人からのアドバイスを理解したりもスムーズになる。

良い音色を出す楽器の構造は？気温や湿度で楽器のチューニングが狂うのはなぜ？良い音でレコーディングするにはどんな工夫が必要？野外ライブでは電源をどのように確保・配給すればいい？ノイズをカットするにはどういうことに気をつけて配線すべき？音階が狂うのはなぜ？などなども物理学で説明できる。だから音楽をやる人は、物理学を学んで損は無い。

1.7 生物資源学類と物理学

生物資源学類生の中には、「自分は生物学に興味があるので物理学は不要だ」とか思っている人もいるが、そういう考え方は間違っている。生き物の機能や構造がどのように作られているのかを理解するには物理学は必須だ。昆虫が固い殻(外骨格)を持っていることには、物理学的な理由がある。魚が高速で水中を泳いだり、鳥が空を飛ぶのは、彼らが物理学的に合理的な身体構造と機能を持っているからだ。植物は光合成で獲得した炭素を、根・幹・葉・生殖器官に最適に分配しているが、その戦略は、物理学的な事情(根から水を効率的に吸い上げる・風などの外力で倒れたり折れたりしない・多くの光を葉に受ける・種子を風に乘せて遠くに飛ばすなど)で決まる。

農業の効率化に灌漑施設や農業施設、農業機械は不可欠だが、それらを低コストで効率よく働かせるには、物理的に最適な設計と配置が必要だ。田畑に霜がおりると作物はダメになってしまうので、霜がおりないような工夫をするのだが(茶畑で扇風機がくるくるまわってるやつとか)、それも物理学だ。乾燥地農業で塩類集積が問題になるが、あれを予測・制御するには土壌水分と塩類の移動を物理学でモデル化する必要がある。家畜が逃げないように牧場のまわりに電気柵を張り巡らす、それを安全に扱うには電気の知識(結局は物理学)が必要だ。地域で伝統的に行われている農法や漁法(霞ヶ浦の帆引き船など)には、物理学的に理にかなった工夫が随所に

ある。そういうのを理解しないと、伝統の継承や発展は難しい。

地球環境を保全するには、人工衛星で地球を観測する必要があるが、そこでは衛星の軌道制御や観測装置の設計などで、膨大な物理学的知識が使われている。土砂災害を防ぐには、地すべりや土石流の発生と移動を予測し制御する必要があるが、その中心は物理学だ。物理学を駆使して、起き得る災害を正確に予測できれば、コンパクトで効率的なダムや堤防を作ることができ、経費の節約や環境保全になる。

食品の保存や加工、微生物の培養などには、最適な温度・湿度環境が必要だが、その制御には物理学が活躍している。

1.8 法則・原理・定義・公理・定理

ここで、法則・原理・定義・公理・定理などの言葉の意味を確認しておこう。

- 法則 ... 自然現象や社会現象の中に見られるルール。物理学・化学・生物学・経済学などで使う。数学ではほとんど使わない。例：万有引力の法則
- 原理 ... 法則と同じようなもの。ただし、法則の中でも、より根源的なもの(基本法則に近いもの)を原理と呼ぶ傾向がある。例：アルキメデスの原理
- 定義 ... 言葉の意味を定めること。
- 公理 ... 定義と同じようなもの。主に数学で使う。言葉の意味を定めるだけでなく、そのようなものが存在することを認めよう、という立場も示す。例：ユークリッド幾何学の公理
- 定理 ... 公理や他の定理から論理的に導かれること。主に数学で使う。定理の中で、いまいち影が薄いものを、補題と呼ぶ。例：三平方の定理

法則 A と法則 B があって、法則 A で説明できることはすべて法則 B でも説明され、なおかつ、法則 A では説明できないが法則 B で説明できるようなこともあるような場合、法則 B は法則 A より一般性が高い、という。そのような場合は、たいてい、法則 A は法則 B の特別なケースであり、法則 B から法則 A を論理的に導出することができる*2。

*2 ところが、科学というのはおもしろいもので、法則 B から論理的に導かれる法則 A のほうが一般性が高いということも、たまにある。例えば「力学的エネルギー保存則」という法則は運動の三法則から導かれるが、「エネルギー保存則」は力学の範囲を超えて普遍的に成り立つ法則でもある。

科学は、より一般性の高い法則を見出すことを目指す。最も一般性の高い法則（つまり根源的な法則）を「基本法則」とか「第一原理」と呼ぶ。しかし、基本法則は抽象的過ぎて、実際には使いづらいことが多い。そこで、具体的なよくある状況に限定して基本法則を変形することで、使いやすい法則が多く生まれる。実際の問題を解くときには、そのような派生的な法則が便利である。だからといって、派生的な法則だけを覚え、基本法則は無視、というのは正しい態度ではない（こういう態度は高校物理を学んだ人に多い）。派生法則には「使える条件」が厳しく設定されているが、なぜそのような条件が必要なのかは、基本法則に戻らないと理解できないのである。

例えば、力学的エネルギー保存則という便利な法則がある。しかしこの法則は摩擦力が働く状況では成立しない。なぜ摩擦力が働くときにこの法則が成立しないのかを理解するには、運動の3法則と、クーロンの摩擦法則という基本法則に戻らないとダメである。

君は、多くの法則をばらばらに覚えるのではなく、何が基本法則で、そこからどのような条件でどのような派生法則が生じるのか、といった体系性を意識して学ぼう。

ところで、「オッカムの剃刀^{*3}」という考え方がある。基本法則として、複数の候補があったとき、それらが同程度に有効であるなら、より単純なほうが正しい、という考え方である。これは必ずしも常に正しい考え方とは言えないが、物理学（と多くの科学）は「無矛盾さ」の次に「シンプルさ」を求める傾向にある、ということは覚えておこう。

問3 オッカムの剃刀とは何か？

1.9 概算

いろんな自然現象や社会問題について、具体的な数値をもとに定量的に考えることに、あまり慣れていない人も多いだろう。しかし、問題を「数」として量的に把握することは、とても大切である。

基本的ないくつかの数字と、各分野における基本法則、そして常識と少しの数学（特に対数や近似）を使いこなすことで、多くのことを「おおざっぱ」に「ざっくり」と見積り、理解できる。これは、普通はほとんど教育されることはないが、とても重要なことである。

^{*3} 剃刀は「カミソリ」と読む。

たとえば、現在、日本政府の債務（赤字、つまり借金）の額は、約1000兆円である。15桁にもおよぶ金額だが、多くの国民にとって、まず重要なのは、その15桁の全ての数字なのではなく、15桁という桁数、すなわち「規模」である。

ところが多くの人は「1000兆円なんて大きすぎてピンと来ない」と言う。高等教育を受ける人がそんなことを言うてはならない。想像しにくい規模の数を想像するには、「～あたり」という視点に立てば良い。膨大な額の借金も、国民のひとりあたりの借金に換算すれば、想像しやすくなるだろう。日本の人口は約1億人だから、 $1000 \text{ 兆円} \div 1 \text{ 億人}$ で、1000万円/人、つまりひとりあたり1000万円である^{*4}。こんな調子で、「だいたい」でいいから、何らかの数値をぱっと出すことを、概算という。

よくある質問9 概算はどこまでアバウトでいいのですか？
... 一概には言えませんが、±50パーセント程度でいいのでは。

問4 ある人の息子が、「僕は将来、サッカー選手になりたい」と言う。その夢を応援するためには、親としては、それがどれだけ厳しい戦いになるかを知っておかねばなるまい。

- (1) 日本のサッカーのプロリーグ（Jリーグ）には、およそ30のチームがある。各チームに選手は30人いるとして、日本のプロサッカー選手の人数を概算せよ。
- (2) サッカー選手の選手寿命は短い。平均5年で引退すると考えて、Jリーグで1年間に引退するサッカー選手の総数を概算せよ。それが、1年間に新たにサッカー選手になれる人数だろう。
- (3) 一方、小学校1学年には、何人の男の子がいるだろうか？ 少子化とかは無視して、日本の人口を1億人、平均寿命を100年として概算せよ。
- (4) 一学年の男子のうち、何人に一人が、夢をかなえてサッカー選手になれるのだろうか？

問5 2016年現在、日本の年間の国家予算は約100兆円である。また、日本から国際連合（国連）への年間の拠出金額は約250億円である。これらの数字を、(1) 政府の借金に比べてどのくらいの大きさか？ (2) 国民ひ

^{*4} 信じられない、奈佐原はまた誤植をしているのではないかと
思う人は、自分で調べてみたらよい。

とりあたりいくらか? という、2つの観点で、概算で評価せよ。有効数字は1~2桁でよい。

問6 日本の平均年間降水量は1500 mm程度である。一方、日本では、水田1 m²あたり、500 g程度の米がとれる。一方、米1 kgの生産には3000 kgの水が必要とされる。日本では、水田に降る雨だけで、この水量をまかなうことはできるか?

1.10 質点モデル

我々はこれから、力と物体の運動に関する法則を学ぶのだが、まず、「質量」という概念を受け入れよう。質量とは、物体の根源的な属性（物体を特徴付ける性質）のひとつであり、「どうやらそういうものが存在するらしい」と受け入れるしかない。質量とは何か、質量はなぜ存在するのか、ということ執拗に探求する物理学者達の熱い戦いはまだ続いているが、とりあえずそれは彼らに任せて、我々は先に進む。感覚的には、質量は物体の重さとか物体の「動かしにくさ」に関係するような性質である。

次に、「質点」という概念を定義しよう：質点とは、質量は持つが大きさは持たない、点状の仮想的（理想的）な物体である。

現実の物体は大きさや形を持つのだが、大きさや形を考えると、物体に働く力がややこしくなるのだ。例えば、大きな物体の各部位に働く力がまちまちだったりすると、物体全体に働く力もうわけがわからぬ、ということになる。そこでとりあえず、質点とみなせるくらい小さな物体に働く力を考える。そうやってひとまず大きさや形といった属性を切り捨てることで、次節以降に述べる諸々の力の法則や、いずれ学ぶ「運動の三法則」という単純かつ強力な法則を見出すことができたのだ。

このように、現実のものや現象を単純化・抽象化してとらえ直し、扱いやすくした近似的概念を「モデル」（模型）と呼ぶ。質点は、物体のひとつのモデルである。

なら「質点」は空想の産物、机上の空論に過ぎないのかという、そうでもない。現実の中には、物体の大きさや形を近似的に無視できるような現象がたくさんあり、そのような場面では、質点の議論がほとんどそのまま成り立つ。物体の大きさや形が無視できなくても、質点としての考察は議論の出発点として役立つことが多い。

どうしても大きさや形を考慮しないとまずい状況で

は、質点の集合（それを質点系という）として物体をモデル化するのである。そうして、質点の理論に持ち込むのである*5(図1.1)。

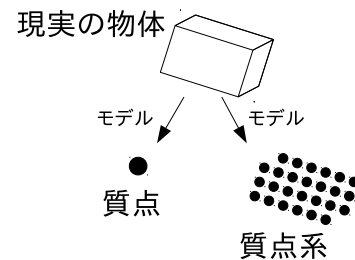


図1.1 物体のモデル。大きさと形を無視できる場合は質点。そうでない場合は質点系としてモデル化する（質点系では質点どうしの間に働く力も考える。そうすることで物体がバラバラにならないように理論化できる）。

問7 モデルとは何か?

問8 質点とは何か?

モデルは科学のあらゆるところにある。例えば化学でいずれ学ぶ「理想気体」は現実の気体のモデルのひとつである。

現実の現象や物体は往々にして複雑だが、それを複雑なままで見ているだけでは、仕組みはわからない。人間のしょぼい知性では複雑なものを理解できないのだ。しかし複雑さをばっさり切り捨てて、単純な状況に限定すると、自然の仕組みは人間ごとにも理解できることがある。だからモデルが必要なのだ。モデルの力を借りて科学は進歩してきた。

ところが、いったん出来上がった科学を学ぶ我々は、恩あるモデルの存在を忘れ、モデルに限って成り立つ法則が、現実の複雑な現象にそのまま全面的に成り立つような錯覚を起こしがちである。これは大変危険なことである。

例1.5 君は小学校で振り子を習っただろう。そこで振り子の周期は振幅に依存しない、と習ったはずだ。これを振り子の等時性という。ところが、振り子の等時性は、振り子の振れの角が十分に小さいという単純なモデルについてのみ成り立つ近似的・限定的な性質である。振れの角が大きくなれば、等時性は成り立たない。実際、振れの角が60度になれば周期は7パーセント程度長く

*5 その場合は、後述するように、角運動量や慣性モーメントといった概念が必要になる。

なることがわかっている。ちなみにこの「ずれ」は、物理学と数学の理論で説明できる。

君はこれから学ぶ科学の様々な事柄に対して、それがどのような限定の中で成り立つかを注意深く理解しなければならない。そのためには、法則や理論の結論だけを丸飲みするのではなく、その理論の成立する過程をきちんと理解し、それが現実の中の何をモデル化しているのか理解しなければならない。

解答

答 1

力学の基本法則: 慣性の法則・運動方程式・作用反作用の法則。万有引力の法則を加えることもある。熱力学の三法則: 熱力学第1法則(エネルギー保存則)・熱力学第2法則(エントロピー増大の法則)・熱力学第3法則(絶対エントロピーの法則)。電磁気学の基本法則: マクスウェル方程式*6。

答 2 略

答 3

基本法則として、複数の候補があったとき、それらが同程度に有効であるなら、より単純なほうが正しいだろう、という考え方

答 4

- (1) 30×30 で、約 1000 人。正確には 1067 人だそうぞす(2010年Jリーグ発表)。
- (2) $1000/5$ で約 200 人。
- (3) 1 学年の児童は $100000000/100$ で約 100 万人。このうち男子が半分として 50 万人。
- (4) $200/50$ 万で、約 0.0004。つまり 1 万人に 4 人、つまり 2, 3 千人にひとり。

答 5

- (1) 年間国家予算は全借金の $1/10$ 程度。年間国連拠出金は全借金 $1/40000$ 程度。
- (2) 年間国家予算はひとりあたり 100 万円程度。年間国連拠出金はひとりあたり 250 円程度。

答 6

日本の水田に、 1 m^2 あたり 1 年間に必要な水量は、 $0.5 \text{ kg} \times 3000 \text{ kg/kg} = 1500 \text{ kg}$ 。水の密度は約 1000 kg/m^3 だから、これは 1.5 m^3 に相当。これを面積 1 m^2 の地平面に敷くと、厚さは 1.5 m 、つまり 1500 mm になる。一方、日本の平均年間降水量は、 1500 mm なので、なんとか雨だけで足りる(計算上は)*7。

答 7 現実のものや現象を単純化・抽象化してとらえ直し、扱いやすくした近似的概念。

答 8 物体のモデルのひとつであり、質量は持つが大きさは持たない、点状の仮想的(理想的)な物体。

*6 それぞれの基本法則は、別の形で言い換えることもできる。特に、熱力学第2法則やマクスウェル方程式の一部は、別の形や名前前で表現されることがある。

*7 現実には、もっと難しいことがいっぱいあるので、ほとんどの水田で灌漑が必要です。

第2章

力の法則

注: 数学リメディアル教材の第1・第2章を習得しておくこと。

2.1 4つの力

自然界にはさまざまな力が存在するが、根源的には、それらは以下の4つからなる：

- 重力
- 電磁気力
- 強い力（核力など）
- 弱い力（ベータ崩壊など）

その他の力は、いずれもこれらの力から派生するものだ。言い換えると、その他のどのような力も、元をたどればすべてこの4つの力で説明できるのだ。

我々の身近な現象に関与する力は、ほとんどが重力または電磁気力だ。「強い力」「弱い力」は、「重力」や「電磁気力」と同じように、これ自体で科学的な専門用語である。何かの基準よりも強い（または弱い）力を指すのではない。「強い力」は原子核の中で陽子や中性子を同居させる力であり、これがなければ物質（元素）は存在できない。

「弱い力」は、原子核のベータ崩壊（陽子が陽電子とニュートリノを発生して中性子に変わることなど）のときに関与する。その例として、原発事故で漏れ出した放射性セシウム ^{137}Cs が放射性バリウム ^{137}Ba に変わる崩壊がある。また、放射性炭素 ^{14}C が窒素 ^{14}N に変わる崩壊もベータ崩壊である。これは過去の生物遺体の年代測定に使われる。

問9 自然界に存在する、根源的な4つの力とは何か？

2.2 力の一般的な性質

以後しばらく、「物体」は質点と同義語と考えて欲しい。物体の大きさや形を考えねばならないときは、逐次、そのように言及する。

ここで、力の一般的な性質について学んでおこう。ここで述べるのは、その力の起源が重力であれ電磁気力であれ何であれ、例外なく成り立つようなことだ。

- 力には、大きさと向きがある。つまり、力はベクトルである。
- ベクトルの数学に基づいて、複数の力を足し合わせたり、ひとつの力を複数の力に分解して考えてもよい。特に、ある物体に複数の力が働く場合、結果的には、その物体には、それらの力をベクトルとして足し算したもの（合力）のみが働くと考えてよい。
- 物体が静止している場合、その物体に働く力（合力）はゼロである*¹。これを「力のつりあい」という。これは後に述べる「慣性の法則」の特殊な場合だ。
- 2つの物体 A, B において、A が B に力を働くとき、A は B から、同じ大きさで逆向きの力を受ける。これを「作用・反作用の法則」という。

ではこれから、いくつかの具体的な力について学んでいく。

2.3 重力

重力とは、質量を持つ物体に働く力である。万有引力ともいう。質量 M と質量 m をそれぞれ持つ2つの質点が距離 r だけ離れていれば、その間に、お互いが引っ張る向きの力が生じる（図 2.1）。その力の大きさ F は以

*¹ 逆は必ずしも成り立たないことに注意せよ。すなわち、働く力がゼロであっても物体は静止しているとは限らない。力が働かなくても物体は動いていることができるのだ。（詳しくは慣性の法則のところでも述べる）

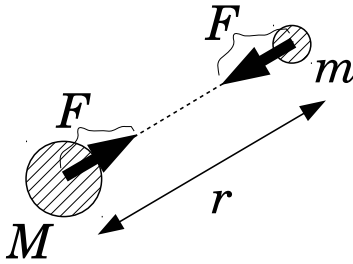


図 2.1 2つの物体の間に働く重力。

下の式を満たす：

重力の法則

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (2.1)$$

これが重力だ。ここで、 G は「万有引力定数」と呼ばれる定数で、

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1} \quad (2.2)$$

である。 G の値は記憶しなくてもよいが、式 (2.1) は記憶せよ。

式 (2.1) は、英国の物理学者アイザック・ニュートンが発見した。どうやって発見したのか？惑星の運行を説明するためにいろいろな数式を試行錯誤したのだ。ニュートンだけでなく、ガリレオ、ティコ・ブラーエ、ケプラー等の学者を含めた、長い苦闘の成果である。

この式よりもさらに重力を一般的に説明する理論が「一般相対性理論」である。しかし一般相対性理論は学類1年生には手に負えない理論なので、我々は式 (2.1) を重力の基本法則（根源的な法則）とみなそう。

ところで質量とはそもそも何だろうか？それは物体に重力を生じさせるような、物体の属性である。では重力とは何か？それは質量を持つ物体どうしに働く力だ。この議論は循環論法だ。質量を定義するのに重力の概念が必要で、重力を定義するのに質量の概念が必要だ！こうして見ると、世の中は全てが論理的にすっきり説明できるものではなく、どこかで「そういうものがあるのだ」と認めねば話がはじまらない。というわけで、物体を特徴づける量として質量というものが存在する、ということを下りに認めよう。

作用・反作用の法則のために、質量 M の物体が質量 m の物体を引く力と、その逆、つまり質量 m の物体が質量 M の物体を引く力は、互いに向きは逆だが、大きさは

同じだ。質量の大きな物体が質量の小さな物体を引く力は、質量の小さな物体が質量の大きな物体を引く力と同じ大きさなのだ。

さて、重力が最も活躍するのは、天体の現象だ。星は、重力によって物を引きつける。地球を含めて球状の星は、重力に関しては、その中心に質量が集中しているとみなして扱える。例えば地球の表面に立つ質量 m の君に地球が及ぼす重力を考えると、 M として地球の質量を、 r として地球の半径を考えればよい。

問 10 地球の半径を $r = 6400 \text{ km}$ 、地球の質量を $M = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ とする。地表において質量 $m = 1 \text{ kg}$ の物体が受ける、地球からの重力が、 9.8 N であることを示せ（有効数字二桁でよい）*2。

ところで、力はベクトル（大きさと向きを持つ量）なのだから、式 (2.1) を、力の大きさだけでなく力の向きまできちんと表現できるような式に書き直すこともできる：

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{G m_1 m_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (2.3)$$

ここで、2つの物体を、物体1と物体2とし、 \mathbf{F}_{12} は物体1が物体2に及ぼす重力（ベクトル）、 m_1, m_2 はそれぞれ物体1と物体2の質量、 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ はそれぞれ物体1と物体2の位置ベクトルである（大学ではベクトルを太字で書き表す）。この式は、式 (2.1) に「物体2から物体1へ向いた単位ベクトル」、すなわち

$$-\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (2.4)$$

を付けた形になっている。*3（図 2.2）

地表にある物体が地球から受ける重力について、式 (2.1) を用いてもう少し考えよう。 m を地表の物体の質量としよう。地球の質量 M と地球半径 r はほぼ一定値とみなせるので、その物体が地球から受ける重力の大きさ F は、実質的には m だけに比例するだろう。そこで、

$$F = mg \quad (2.5)$$

*2 SI 基本単位に変換しないままの数値で計算すると失敗する。地球の半径を km 単位 (6400 km) のままで万有引力の法則に入れても、 9.8 N という量はでてこないで注意。

*3 ベクトル $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ （これは物体1を始点にして物体2まで伸びているベクトルである）をそのベクトルの大きさ $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = r$ で割って得られるベクトル（つまり $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ ）が、「物体1から物体2へ向いた単位ベクトル」を表している。このベクトルをマイナス倍すると向きが逆になり、結局この式は「物体2から物体1へ向いた単位ベクトル」を表すことになる。

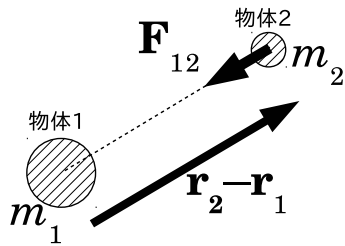


図 2.2 物体 1 が物体 2 に及ぼす重力 F_{12} 。

と書こう。このとき、比例係数 g を「重力加速度」と呼ぶ（記憶せよ）。式 (2.1) との整合性で言えば、

$$g \equiv \frac{GM}{r^2} \quad (2.6)$$

である。ただし、地球の形が完全な球形ではないことや、地球の密度が均一でないこと、地球の自転に起因する遠心力があることなどのために、実際は g の値は場所によって微妙に異なる。これは生物資源学類としては注意が必要なポイントだ。

問 11 化学実験では、試薬を量り取る時に電子天秤を使う。電子天秤で量る重さは、その場の重力加速度に比例する。北大（札幌市）と筑波大で同じ電子天秤を調整せずに使ったら、重さの測定値は何%くらい違うか？ ヒント：「電子天秤の校正 札幌 茨城」などをキーワードにしてインターネットなどで調べよ。

これを意識しないと、北大と筑波大で同じ実験をしたつもりでも、試薬の量が異なってしまう、違う実験結果になりかねない！

さて、なぜ g の呼び方に「加速度」という言葉がついているだろう？ それは、 g の次元を考えればわかる。まず、式 (2.5) より、 $g = F/m$ である。一方、数学リメディアル教材で学んだように、 F の単位は N（すなわち kg m s^{-2} ）、 m の SI 単位は kg なので、 g すなわち F/m の SI 単位は、 $\text{kg m s}^{-2}/\text{kg} = \text{m s}^{-2}$ 。従って、 g は、加速度の次元を持つのだ。実際、前問の結果から、 $m = 1 \text{ kg}$ のとき $F = 9.8 \text{ N}$ だったので、 $g = F/m$ を計算すれば、

$$g = 9.8 \text{ m s}^{-2} \quad (2.7)$$

である（記憶せよ）。

ここでは g が加速度の次元を持つことを示したが、 g は実際に加速度として意味を持っている。君が地表付近で何かの物体を落としたら、その物体はほぼ一定の加速度 g で加速しながら落下するのだ。そのあたりの事情

は、後に詳しく述べる。

問 12 重力加速度とは何か？

問 13 高度 10,000 m の上空を飛ぶ旅客機と、高度 36,000 km の上空を飛ぶ静止衛星には、それぞれ地表での重力の何パーセントの重力がかかるか？ ヒント：式 (2.1) を使う。それぞれの r は地表での r の何倍になるか？

問 14 月の質量は地球の質量の $1/81.3$ 、月の半径は地球の半径の $1/3.68$ である。月の表面で、月から受ける重力は、地球の表面で、地球から受ける重力の何倍か？ ヒント：式 (2.1) を使う。 M と r の両方が変わること注意到。

問 15 地表での平均的な大気圧は、1000 hPa 程度である。1 m^2 の地表面の上空には、どのくらいの質量の大気が存在するか？ ヒント：式 (2.5) を使う。1 m^2 の地表面の上空にある大気の質量を m とすれば、それにかかる重力 mg が、地表面での圧力を生む。なお重力は厳密には高さによって変わるが、ここではその変化を無視してよい。

よくある質問 10 地球の中心に行けたら、万有引力はどのように働くのでしょうか？ ... 全方向からの引力が打ち消しあって 0 になります。要するに「無重力」です。

よくある質問 11 地球の質量は一定ですか？ いろんな反応が起こって絶えず変わっているイメージです。... 地球には隕石等が宇宙から飛来して質量を増やす一方、地球大気から（地球の重力をふりきって）宇宙に飛散する分子や原子もあり、質量を減らす。そんなこんなで、地球の質量は、絶えず微妙に増減しているでしょう。

よくある質問 12 万有引力はどんな物体の間にもはたらいているのですか？例えば人と人の間とか。... 質量を持つ物体ならどんな物体の間にも働いています。もちろん人と人の間にも働いていますよ。

2.4 クーロン力

次に、電磁気力について考えよう。電磁気力とは、「電荷」を持つ物体に働く力のことだ。

物質を構成するのは原子核や原子、イオンなどであり、それらを構成するのは、電子や陽子、中性子、中間子など、「素粒子」と呼ばれる微細な粒子だ。なぜかわからないが、それぞれの素粒子には、電荷という、固有の性質(物理量)がある。電荷の性質として、

- 電荷は正と負という符号のある量である。
- 電子1個と陽子1個は、同じ大きさで逆の符号の電荷を持っている。

ということが知られている。これらがなぜなのかは、根本的にはわかっていない。そのようにこの世界は作られているのだとしか言う他はない。そして、電子1個や陽子1個が持つ電荷の大きさを $-1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ とする(Cというのは電荷の単位であり、「クーロン」と呼ぶ。SI基本単位で表せば、 $1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$ だ)。これを 電荷素量と呼び、 q_e とあらわす。 q_e は、有効数字4桁では、 $q_e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ である(記憶せよ)。電子の電荷を $-q_e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、陽子の電荷を $+q_e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ とする。

原子核や原子、イオン、分子などの粒子や、もっと大きい物体は、それを構成する素粒子の持つ電荷の総和(正の値と負の値を加えて差し引きした量)を電荷として持つ、と約束する。例えば、水素原子は1個の陽子と1個の電子から構成されるが、陽子と電子の電荷は同じ大きさで逆符号なので、その総和は0である。従って、水素原子の持つ電荷は0である、とみなす。正の電荷と負の電荷のどちらかが多いときだけ、その粒子は0以外の電荷を持つことになる。粒子や物体が0以外の電荷を持つときは、その粒子や物体は「帯電している」という。帯電している粒子のことを荷電粒子という。電子や陽子、原子核、イオンなどは荷電粒子だ。荷電粒子のことを電荷ということもある。

さて、電磁気力のひとつを紹介しよう。「粒子1」と「粒子2」という2つの荷電粒子があるとき、それらの間には、電荷に応じて、お互いを引っ張る向きの力(引力)またはお互いを遠ざける向きの力(斥力)が働く。その引力または斥力の大きさを F とすると、 F は以下の式を満たす：

クーロンの法則

$$F = \frac{k q_1 q_2}{r^2} \quad (2.8)$$

ここで、 q_1, q_2 は粒子1と粒子2がそれぞれ持つ電荷、 r は粒子間の距離である。 k は定数で、有効数字4桁では、 $k = 8.987 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ だ。この式(2.8)を、クーロンの法則(Coulomb's law)と呼び、このように記述される電磁気力をクーロン力(Coulomb force)と呼ぶ。クーロンというのは、この法則を見つけた物理学者の名前だ。 k の値は記憶しなくてもよいが、式(2.8)は記憶しよう。

クーロン力は、電荷を持つ物体に働く力だ。一方、重力は、質量を持つ物体に働く力であった。興味深いことに、これらの数学的な表記、すなわち式(2.8)と式(2.3)は、互いによく似ている。従って、重力に関して成り立つ議論、特にその数学的な扱いは、クーロン力にも通用することが多いし、その逆も然りである。

よくある質問 13 性質も似ているのでしょうか? この2つの式は統合できるのでは? ... 地球中心で重力がゼロになるように、一様に帯電した球の中心では電場がゼロになる、などの、よく似た性質があります。しかし、これらの式の統合には、誰も成功していません。

さて、上述のように、電荷には、正電荷と負電荷の二種類がある。 q_1 とか q_2 はプラスやマイナスの値をとり得るのだ。そして、 q_1 と q_2 が同符号(両方ともプラス、もしくは両方ともマイナス)のとき、式(2.8)から F はプラスになり、そのとき、2つの粒子の間には、斥力(互いに遠ざける力)がはたらく。一方、 q_1 と q_2 が異符号(片方がプラスで片方がマイナス)のとき、 F はマイナスになる。力の大きさがマイナスになるのは奇妙で(ベクトルの「大きさ」は0以上しかありえない)、式(2.8)はその点ではうまくできていない。式(2.8)の F がマイナスのときは、2つの粒子の間には、引力(互いに引き合う力)がはたらくのだ*4。つまり、式(2.8)は力の大きさを表す式だと言いながら、力の向きも、中途半端に表現している。このあたりの事情も考慮して、式(2.8)を、きちんと力の向きまで完全に記述できるように書くと、次

*4 ここが重力との大きな違いだ。重力には引力しかない。また、質量にはプラス(またはゼロ)しかない。

式のようになる:

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (2.9)$$

ここで、 \mathbf{F}_{12} は粒子 1 が粒子 2 に及ぼす力 (ベクトル)、 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ はそれぞれ粒子 1 と粒子 2 の位置ベクトルである。このような式の形になる理由は、重力のとき (式 (2.3)) の事情と同様だ。

よくある質問 14 なぜ $q_1 q_2 < 0$ のとき \mathbf{F}_{12} は引力で、 $q_1 q_2 > 0$ のとき \mathbf{F}_{12} は斥力になるのですか? ... 式 (2.9) を見ると、ベクトル \mathbf{F}_{12} が、ベクトル $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ を何倍かした形になっています。その係数 $k q_1 q_2 / |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3$ の正負は $q_1 q_2$ の正負で決まります。これが正のときは、 \mathbf{F}_{12} は $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ と同じ向き、すなわち粒子 1 から粒子 2 までのベクトルと同じ向きです。すなわち、粒子 1 が粒子 2 に及ぼす力は、粒子 2 を押しのける方向に働く、というわけです。 $q_1 q_2 < 0$ のときはその逆。

問 16 クーロンの法則とは何か?

問 17 電荷素量とは何か?

問 18 互いに 1 m 離れたところに存在する 2 個の電子の間には、クーロン力と重力の両方が働く。そのクーロン力を F_e 、重力を F_g とする。

- (1) F_e の大きさを求めよ。
- (2) F_g の大きさを求めよ。ただし、電子の質量 m_e は、 9.1×10^{-31} kg である。
- (3) F_g は F_e の何倍か?

よくある質問 15 「力」って何ですか? ... そういうものが自然には存在する。あえて言えば、物体の運動状態に変化をもたらすもの。

よくある質問 16 N (ニュートン) の定義がわかったようなわからないような... ... kg m s⁻² です。それ以外の何ものでもない。

2.5 電場と磁場

さて、電磁気力には、クーロン力だけでなく、磁気的な力 (磁力) もある。クーロン力は、荷電粒子が静止して、いようが運動していようが、無関係に働く。ところが磁

力は、荷電粒子が運動しているときにのみ働く。それらを含めて正確に言えば、電磁気力とは、荷電粒子の電荷 q に比例するような力であり、それは何らかの 2 つのベクトル \mathbf{E}, \mathbf{B} を用いて、

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.10)$$

と書けることがわかっている (\mathbf{v} は荷電粒子の速度)。このような形で荷電粒子に力を及ぼすようなベクトル \mathbf{E} と \mathbf{B} を、それぞれ 電場 と 磁束密度 と呼ぶ (定義)。ここで \times という記号が出てきた。これはただの掛け算ではなく、ベクトルの「外積」というものである。詳細はそのうち数学で習うだろう。今は「そんなものがあるのか」という程度の理解で OK。そして、ある定数を磁束密度にかけたものを 磁場 という (詳細は割愛する)。

電場と磁場は不可分であり、互いに影響を及ぼしあうから、これらをまとめて語るのだ。その基本法則を「マクスウェル方程式」という。これは本書では扱わない。それを理解するには、「ベクトル解析」という高度な数学*5が必要であり、今の君には難しい。また、特殊相対性理論というものでは、電場と磁場が統一されるのだが、それも難しすぎるので本書では学ばない。

問 19 1 個の電子から 1 m の距離にある点での電場の大きさを求めよ。ヒント: 今は \mathbf{B} を考えなくてよい。

よくある質問 17 高校で磁力を習った時、フレミングの左手の法則というのがありましたが... ... 式 (2.10) があればフレミングの左手の法則は不要です。式 (2.10) はフレミングの左手の法則を包含し、それよりも一般性の高い、強い式なのです。ただしこれを使いこなすには「外積」を理解する必要があります。がんばって数学を勉強してください!

よくある質問 18 磁力は電荷を持った粒子が運動しているときに働くとのことですが、静止した磁石同士にはたらく磁力はどうなんですか? ... 磁石の中では電子のスピンというもののおかげで、電流が流れているのです。それに磁力がかかるのです。

2.6 張力

ここまでは、上で述べた根源的な 4 つの力について学んだ。ここからは、この 4 つの力から派生する力について

*5 ベクトルの微分と積分に関する数学。

て学ぼう。まずは「張力」という力だ。

例として、君が天井から垂れ下がったロープに吊り下がって静止しているとしよう（簡単のため、ロープの質量は無視する）。ロープに1箇所でも弱い部分があればロープは切れて君は落下するだろう。従って、君に働く重力は、ロープの全ての箇所にも働いていることがわかる。

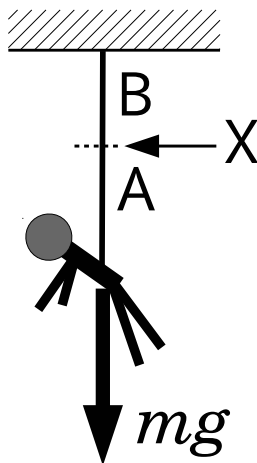


図 2.3 ロープに吊り下がる人

ではロープの任意の1箇所 X を考えよう。そこより下の部分をロープ A、そこより上の部分をロープ B と呼ぼう。本来はロープ A とロープ B は X で繋がっていて1本のロープなのだが、便宜上、そう名づける。

さて、ロープ A はロープ B を下向きに引っ張っている。これは直感的に明らかだ。一方、同時にロープ B はロープ A を上向きに引っ張っている。これは作用・反作用の法則に従えば明らかである（ロープ A を「物体 A」、ロープ B を「物体 B」として考えればよい）。ロープ B がロープ A を上向きに引っ張っているというのがわかりにくければ、次のように考えてもいい：仮にロープ B がロープ A を上向きに引っ張っていないとすると、「君の体とロープ A を合わせた物体」に働く力は重力のみである。しかし今、「君の体とロープ A を合わせた物体」はロープに吊られて「静止」している。静止しているからには、「力のつりあい」が成り立たなくてはならない。従って、ロープ B は X においてロープ A に「君に働く重力と同じ大きさで、反対向き（上向き）の力」を及ぼしていると考えざるを得ない。

これらの考察の結論（「君に働く重力と同じ大きさの力は、ロープの任意の箇所（つまり全ての箇所）にも働いている」「ロープの任意の箇所では、そこを挟んで互いに逆向きで同じ大きさの力が働いている」）から、次のよう

な結論が得られる：すなわち、ロープの端に力が働く場合、それと同じ大きさの力が、ロープの任意の箇所において、その箇所を挟んで互いに逆向きに働く。

このような力を張力と呼び、慣習的に T で表す。張力には以下のような性質がある（というか、以下が張力の定義である）：

- 張力は糸状の物体（ロープなど）に働く。
- 張力は糸の各箇所、糸（の接線）に平行に働く。
- 糸にかかる摩擦力や、糸自体の質量にかかる重力が無視できる限り、張力の大きさは糸のどこでも同じである。
- 張力は、引っ張りの向きにしか働かない。つまり、糸を任意の箇所で2つに分割すると、両者は互いに引き合う力を及ぼす（互いに押し合う力は及ぼさない）。

ところで、不幸にして X が弱かったらどうなるだろう？ ロープは X で重力に耐えきれずに、次第に伸びて、最後には切断されてしまう。そうなると、君に働く重力に抗っていた力は消えてしまい、君は落下してしまうことになる。ただし、その場合でも、ロープが完全に切断される寸前まで張力は存在するのだ。

問 20 図 2.4 のように、片端が壁にとりつけられた綱を力 F で引く場合（上）と、両端を力 F で引く場合（下）では、綱にかかる張力の大きさは、どちらも F で等しい。このことを説明せよ。

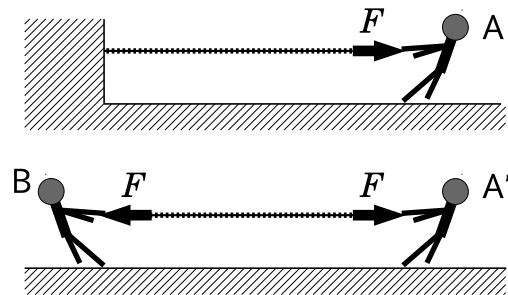


図 2.4 壁対人の綱引き（上）と、人対人の綱引き（下）

問 21 図 2.5 のように、質量 m の君は、天井に吊り下げられた滑車に通されたロープの片端を体に結び、もう片端を手を持って、自らの力で自らの体を持ち上げようとしている。君の手がロープを引く力は $mg/2$ であることを示せ（つまり、体重の半分の力で君は自分を持ち上げることができるのだ）。

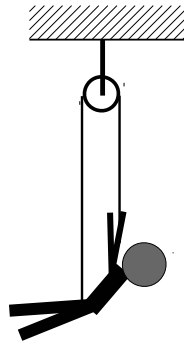


図 2.5 自力で上昇しようとする人

問 22 図 2.6 のように、君は、天井から固定された滑車 A と、自由に上下できる滑車 B (動滑車) を利用して、質量 m の物体をロープで持ち上げようとしている。滑車の質量は無視し、ロープと滑車の間の摩擦は無いものとする。ロープは一端が天井に固定され、滑車 B と滑車 A を通って、もう一端が君の手に握られている。君がロープを引っ張るのに必要な力は、 $mg/2$ であることを示せ。ヒント：ロープにかかる張力を T とすると、滑車 B には上向きに $2T$ の力が働く。

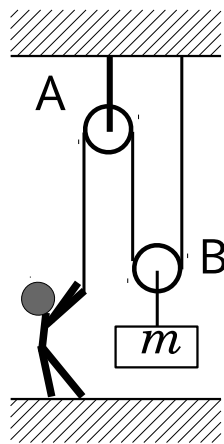


図 2.6 動滑車を使って物を持ち上げる

よくある質問 19 要するに天井と人が半分ずつ引っ張っているということ? ... そうです。

問 22 の考え方を援用すれば、図 2.7 のように、動滑車の数を増やせば増やすほど、小さな力で物を持ち上げることができる、ということがわかるだろう。

問 23 君の手がロープを引っ張るとき、その力の根源は何か?自然界に存在する 4 つの根源的な力に帰着して説明せよ。

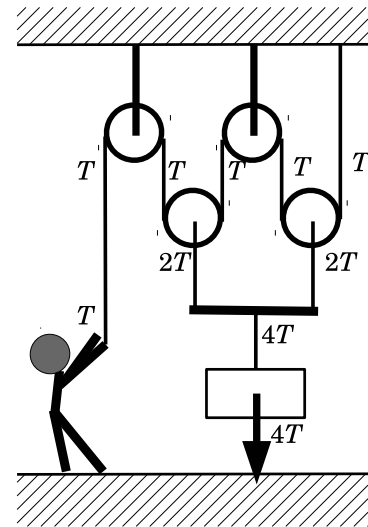


図 2.7 2 個の動滑車を使えば、必要な力は $1/4$ になる。

2.7 弾性力 (フックの法則)

次に、バネについて考えてみよう。バネの自然状態での(力がかってないときの)長さを「バネの自然長」と呼ぶことにする。我々の日常経験から、バネを伸ばせば伸ばすほど強い力が働くことは自明だろう。バネみたいに、変形させると力を生じる物体について、変形(変位) x と力 F の関係を関数 $F(x)$ で書くと、その関数がどんなものなのかはわからなくても、とりあえず微分の定義から、

$$F(x + dx) = F(x) + F'(x)dx \tag{2.11}$$

となる (dx は微小量)。ここで、 $x = 0$ がつりあいの位置(バネの片端を固定し、自然状態に保ったときのもう片端の位置)に来るように座標をとれば、 $x = 0$ では力は働いていないから、 $F(0) = 0$ となる(図 2.8 の上の図)。すると上の式は、

$$F(0 + dx) = F(0) + F'(0)dx \tag{2.12}$$

つまり

$$F(dx) = F'(0)dx \tag{2.13}$$

となる。この式は微小な量 dx にしか厳密には成立しないけど、 x が十分に小さい範囲に限定して、 dx を x と置き換えても近似的に成り立つと仮定すれば、

$$F(x) = F'(0)x \tag{2.14}$$

となる。ここで $F'(0)$ の符号について考えてみよう。バネの力というもの、伸ばせば縮まる方向に、縮めれば伸びる方向に働く。つまり、変形(変位)と逆向きに働

く。従って、 x が正なら F は負、 x が負なら F は正である。従って、式 (2.14) において $F'(0)$ は負であるはずだ。そこで、形式的に $F'(0)$ を $-k$ と書き換えよう。このとき k は正の定数である。すると式 (2.14) は、

フックの法則

$$F = -kx \quad (2.15)$$

となる。ここで、 F は、バネから受ける力、 x はバネの伸び、 k はバネ定数と言われる定数である。これをフック (Hooke) の法則という。

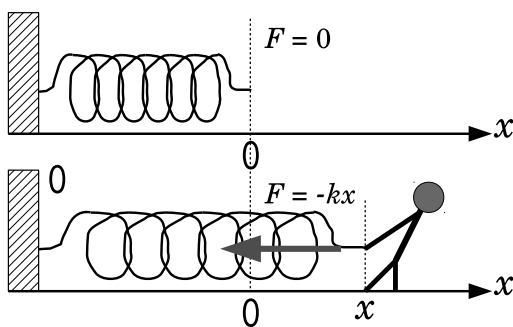


図 2.8 Hooke の法則

このような数学的な考え方を線型近似と言う (数理解りメディアル教材参照)。要するに、フックの法則は、力と変形 (変位) の関数の線型近似式に過ぎず、バネ定数とはその関数の微分係数 (の絶対値) に過ぎない。

式 (2.15) から明らかに、バネが伸びるほど力の大きさは大きくなる。繰り返すが、右辺のマイナスは、バネの伸びの方向 (x の符号) と力の方向 (F の符号) が逆だよ、ということを示す。バネは伸びると (x が正だと)、縮もうとする力、つまりひっぱる力を生じるから F は負になる。一方、バネは縮むと (x が負だと)、伸びようとする力を生じるから F は正になる。

問 24

- (1) フックの法則とは何か?
- (2) バネ定数とは何か?
- (3) バネ定数の SI 単位は?

さて、この「法則」は、万有引力の法則やクーロンの法則よりも、ずっと一般性の低い「しょぼい」法則である。フックの法則は、限定的な例にしか成り立たない経験則に過ぎない。実際、バネをどんどん伸ばすと、まっすぐな針金になってしまって、それ以上は伸びようがない。

無理に伸ばすと、ぶちっと切れてしまう。従って、フックの法則は、バネの伸び (x) がゼロに近いときにしか成り立たない。また、そもそもなぜこのような力が生じるかということ、バネの中の物質を構成する原子や分子どうしが引き合う力 (主に電気力) がその根源にあるからである*6。

式 (2.15) は、バネだけに成り立つのではなく、一般に、多くの物質や物体に成り立つ。例えば橋を構成する鉄骨は、荷重や自重によって伸び縮みする。フックの法則に従うような力を弾性力と呼ぶ。弾性力によって変形する物体を弾性体と呼ぶ。そう考えると、フックの法則は、「法則」というよりもむしろ、弾性力や弾性体の定義である、とも言えるだろう。

問 25 弾性力とは何か? 弾性体とは何か?

問 26 弾性体ではない存在として、「塑性体」というものがある。塑性体とは何か、調べよ。

よくある質問 20 高校ではフックの法則は $F = kx$ で習ったのですが、 $F = -kx$ との考え方の違いは? ... $F = kx$ と書くときは、力の大きさだけを考えていますが、 $F = -kx$ の場合は力の向きまで考えています。

さて、例として、バネ定数 k のバネを天井からつるし、その先端に質量 m の物体を吊り下げて静止させる。バネ自体の質量は無視しよう。では、バネはどのくらい伸びるだろうか?

鉛直下向きに x 軸をとり、物体をつるす前のバネの先端の x 座標を 0 とする。物体をつるしてバネが x だけ伸びたとき、物体にかかるバネの弾性力は $-kx$ 、物体にかかる重力は mg である (ただし g は重力加速度)。前節で述べた、「物体が静止している場合、その物体に働く力 (合力) はゼロである」という法則 (「力のつりあい」) から、この物体が静止するにはこの 2 つの力の和がゼロでなければならない。従って、

$$-kx + mg = 0 \quad (2.16)$$

従って、 $kx = mg$ 、従って、

$$x = \frac{mg}{k} \quad (2.17)$$

である。これがバネの伸びである。

*6 ただし、基本法則からフックの法則を導くのは、簡単ではない。

問 27 同じ物体と同じバネを月面に持って行って同様の実験をするならば、バネの伸びは地球上の何倍になるか? ヒント: 地球上の重力加速度に相当するものは、月面上ではどうなるだろうか?

問 28 図 2.9 左のように、バネ定数 k のバネを 2 本、平行にならべて天井からつるし、その先端をつなげて、そこに質量 M の物体を吊り下げて静止させる。バネは $Mg/(2k)$ だけ伸びることを示せ。この状況で 2 本のバネをあわせて 1 つのバネとみなすとき、そのバネ定数は $2k$ となることを示せ。ヒント: 重力 Mg を、2 本のバネで分担する。バネ定数を求めるには、バネ定数の定義を思い出すこと。(バネの並列)

問 29 図 2.9 右のように、バネ定数 k のバネを 2 本、縦につなげて天井からつるし、その先端に質量 M の物体を吊り下げて静止させる。バネは $2Mg/k$ だけ伸びることを示せ。この状況で 2 本のバネをあわせて 1 つのバネとみなすとき、そのバネ定数は $k/2$ となることを示せ。ヒント: こんどは重力を分担できない。上のバネにも下のバネにも、 Mg の力がかかる。(バネの直列)

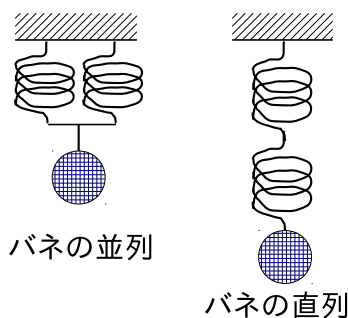


図 2.9 バネの並列と直列

問 30 バネ定数 k のバネを a 本だけ縦につないだものを b 本だけ束ねて大きなバネを作ると、そのバネ定数は bk/a となることを示せ。ヒント: n 本の直列を m 本だけ並列。

断面積 A 、長さ L の棒 X のバネ定数を考える。この棒を、無数の小さい(細くて短い)棒の集合(それぞれが弾性体)と考えれば、棒 X の断面積は、小さい棒の並列の本数に、棒 X の長さは、小さい棒の直列の本数に、それぞれ比例するので、棒 X のバネ定数 k は、 A/L に比例

する。そこで、

$$k = E \frac{A}{L} \quad (2.18)$$

と書く。このとき E をヤング率と呼ぶ。ヤング率は物質に固有の定数(物性値)である。

問 31

- (1) ヤング率の SI 単位は?
- (2) 鉄のヤング率を調べよ(「理科年表」^{*7}などを使え)。
- (3) 長さ 10 m、直径 2 mm の鉄線の先に 10 kg の物体を吊り下げると、鉄線はどのくらい伸びるか?
- (4) (3) で直径を半分(1 mm)にするとどうなるか?
- (5) (3) で鉄のかわりに銅を使うとどうなるか?

ヤング率を使うと、フックの法則は以下のように書ける:

$$F = -E \frac{A}{L} x \quad (2.19)$$

従って、

$$\frac{F}{A} = -E \frac{x}{L} \quad (2.20)$$

左辺の F/A は単位面積あたりの力で、「応力」と呼ぶ。右辺の x/L は単位長さあたりの伸びであり、「ひずみ」と呼ぶ。応力を σ 、ひずみを ϵ と書くと、上の式は、

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.21)$$

と書ける(符号はとりあえず無視した)。これもフックの法則のひとつの表現である。ここで示したフックの法則は、1 方向の伸びと、それと同方向のひずみとの間の関係であったが、それ以外にも、様々な方向の応力と様々な方向の歪みに関しても同様の関係が成り立つ。それを総称してフックの法則と呼ぶ。ただし、それをきちんと表現するには、テンソルという数学(「行列」の拡張版みたいなもの)が必要であり、それは 2 年生以降に学ぶ。

問 32

- (1) 応力の SI 単位は?
- (2) ひずみの SI 単位は?

よくある質問 21 フックの法則はバネだけの話かと思ってい

^{*7} 国立天文台(編)「理科年表」丸善。毎年、最新版が出ているが、基本的なデータはそんなに頻繁には変わらないので、昔の年のものを参照しても大丈夫。

ましたが、もっと一般的なものなんですね。... そう。要するに力と変形の線型近似ですから、ほとんどの物体に成り立ちます。地震の波もフックの法則で説明されます。

2.8 垂直抗力

君が地面に立つとき、君は地球から重力（引力）を受ける。ところが、君が静止しているためには、君にかかる合力はゼロでなければならない。さもなければ君の体は地面にどんどんめり込んでいくはずだ。「力がどうであれ、そこに固い地面があれば、めり込んでいくわけがないだろう」と君は思うかもしれない。しかし、その考え方は物理学ではダメなのだ。物理学には「固いものにめり込んでいくことはできない」というような法則は存在しない。固いものの表面で物体が静止することも、あくまで「力のつりあい」で説明しなければならないし、説明できるものなのだ。

君の足下に、固い岩があったとしよう。その岩は、君の体重のせいで、ごくわずかだが、変形するのだ。その変形をもとに戻そうとする力、つまり弾性力が、君の体を押し返すのだ。それが重力と釣り合って、君の体にかかる合力はゼロになり、君は地上で静止できるのだ。

このように、物体が、固い面に対して垂直に力をかけると、面はほとんど変形せずに（といっても弾性力を発揮する程度には変形するが）、それと等しい大きさで逆向きの力を、面は物体に対して働く。その力を垂直抗力と呼び、慣習的に N で表す。

これは物体と「固い面」との間の「作用・反作用の法則」にすぎないじゃないか、と君は思うかもしれない。それは早計である。仮に垂直抗力が無かったって、作用・反作用の法則は成り立つ。君の体に働く重力は、地球が君を引っ張るのであり、その反作用として君は地球を引っ張る。君の足元に地面があったとしても、その地面がゆるゆるの状態、君を全く支えてくれないならば、君の体は加速度を持って地中に沈んでいくだけだ。それでも作用・反作用の法則は（君の体と地球との間で）成り立っている。

でも、もしそこに固い地面があるならば、その地面が垂直抗力を発揮して君の体を支えるのである。逆に言えば、垂直抗力を発揮してくれるような面のことを「固い面」と言うのだ^{*8}。

^{*8} この例では、君の体に働く力は、地球から受ける重力と、固い地面から受ける垂直抗力である。これらの釣り合いによって君の体は静止する。一方、固い地面（のごく表層）に働く力は、君の

これらを総合して、以下のような例を考えよう。図 2.10 のように、傾斜角 θ のなめらかな斜面上に、質量 m の物体が載っている。この物体には、重力 mg が鉛直下向きに働いている。

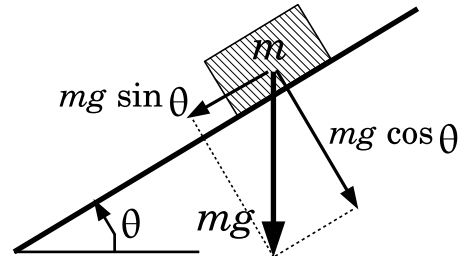


図 2.10 斜面上に載った物体と、それにかかる重力

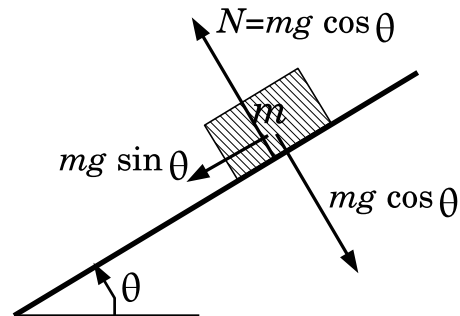


図 2.11 物体は斜面から垂直抗力 N を受ける。

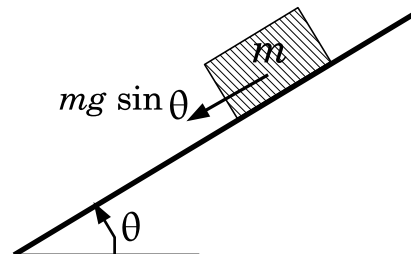


図 2.12 結局、物体は斜面に平行な力だけを受ける。

このとき、図 2.10 のように、鉛直下向きの重力 mg は、斜面上に沿った方向の力と斜面垂直方向の力に分解して考えてもよい。前者の大きさは $mg \sin \theta$ 、後者の大きさは $mg \cos \theta$ である。

と言われても、なぜ、斜面上に沿った方向と斜面垂直方向に分解するのだろうか？ そうするのが便利だからだ。というのも、もし斜面が固ければ、物体が動き得るのは斜面上に平行な向きだけで、斜面に垂直な方向には動けない。従って、斜面に垂直な方向では、物体に働く力は釣

体に働く垂直抗力の反作用と、より下の地面から受ける弾性力である。これらの釣り合いによって、地面も静止する。

り合っているはずだ。それをまずあぶり出せば、物体にかかる合力は求めやすくなる。

さて話を戻すと、物体にはもともと重力の斜面垂直成分 ($mg \cos \theta$) が働いているから、それと同じ大きさで物体を斜面に垂直に押し返す垂直抗力 N があるはずだ (図 2.11)。一方、今考えている斜面はなめらかなので、斜面に沿った方向には斜面は物体に力をおよぼさない (つるつるしている!)。結局、物体に働く重力と斜面から物体が受ける垂直抗力を足し合わせると、物体に働く力として、図 2.12 のように、斜面に沿った重力 $mg \sin \theta$ だけを考えればよいことになる。

問 33 図 2.13 のように、傾斜角 30 度と 60 度の 2 つのなめらかな斜面に、それぞれ質量 3 kg と質量 m の物体が載せられ、滑車を介してロープでつながり、静止している。物体と斜面の間の摩擦は無く、滑車とロープの間にも摩擦は無く、ロープの質量は無視できるほど軽いとする。 m を求めよ。ヒント：ロープにかかる張力の大きさを T とする。まず左の物体が静止する条件から T の大きさが求まる。そしてその T は、右の物体にもかかる。

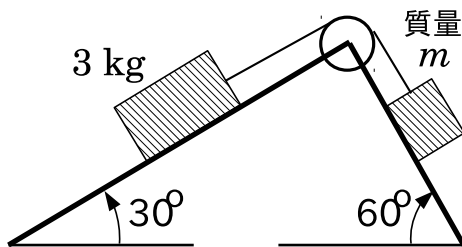


図 2.13 2 つの斜面に載せられ、ロープでつながって静止する 2 つの物体

よくある質問 22 斜面と滑車の問題は、高校時代に挫折したとこです。... 滑車を介したロープはどこでも張力が同じ、というのがポイントです。

2.9 摩擦力（クーロンの摩擦法則）

我々は日常経験から、物体と物体を接触させたまま動かす（ずらす）には力が必要だと知っている。ということは、接触する物体どうしには、それらを「ずらすまい」とする力が働くのだろう。そのような力を、摩擦力という。これは、以下の 2 つの式で表現されることが多い。

まず、 N を、物体どうしが接触面を介して接触面に対して垂直に互いに押し合う力とする。2 つの物体が相対的に静止している場合（ずれない場合）は、摩擦力 F_s は、

$$F_s \leq \mu N \quad (2.22)$$

となる。また、接触面を介して 2 つの物体が相対的に運動している場合（ずれる場合）は、摩擦力 F_m は、

$$F_m = \mu' N \quad (2.23)$$

となる。 F_s を静止摩擦力、 F_m を動摩擦力という。また、 μ, μ' は、それぞれ静止摩擦係数、動摩擦係数とよばれる定数で、接触面の物質や状態に依存する。

これを、クーロンの摩擦法則という。この「クーロン」は電氣的な力の「クーロン力」のクーロンさんと同一人物である。偉い学者は一人でいくつもの法則を発見するので、後世の我々は「クーロンの法則といってもどの法則だ?」と混乱してしまうのだが、まあそれは仕方がない。

さて、式 (2.22) に不等号“ \leq ”が入っているのは、次のような理由による：摩擦力は、接触中の 2 つの物体を「ずらすまい」とする力である。従って、静止中の 2 つの物体の間に、互いをずらそうとする力がそもそも働いていない場合は、あえて「ずらすまい」とする必要はない。そのとき、静止摩擦力はゼロであるべきだ。また、たとえ、「ずらそうとする力」が働いても、それが弱ければ、それを打ち消す程度の摩擦力があれば十分であり、それ以上は必要ない。物体が静止しているからには「力のつりあい」が成り立つはずで、となると静止摩擦力は「ずらそうとする力」と反対の向きに同じ大きさで働いていると考えざるを得ないのだ。従って、静止摩擦力は、ある一定の範囲 (μN 以下) で、「ずらそうとする力」に対応してそれを“ちょうど”打ち消す力を発揮するのである。

さて、多くの場合、 $\mu' < \mu$ である。つまり静止摩擦係数 μ は動摩擦係数 μ' より大きい。つまり、摩擦力は、静止状態の方が、動いている状態よりも強い。それがなぜなのかは、様々な説があるが、決定打は無い。

この「クーロンの摩擦法則」も、一般性の低い「しょぼい」法則である。単なる経験則であり、この法則から外れるような例もある。摩擦力は、結局、物質と物質の間に働く力なので、おそらく電気がその根源なのだろう。しかし、基本法則からクーロンの摩擦法則を導くことには、まだ誰も成功していない。実は、摩擦力の起源や実体は、よくわかっていないのだ。クーロンの摩擦法則は誰もが「しょぼい」と思っているが、誰もそれに代わる法則を見つけ出せないでいる...

よくある質問 23 $\mu' < \mu$ となる理由がわかりません。... 正確な理由は不明。よく言われるのが、静止状態では接触面での微妙な凹凸が互いにかみ合って抵抗が大きいのに対し、動いているとなかなか凹凸がかみあわず、滑りやすくなる、という説明。

よくある質問 24 「車のブレーキは、タイヤを完全に止めるより、少し回しながらのほうが、地面との摩擦が大きくなって早く止まれる」と聞いたことがあります。 $\mu' < \mu$ と関係していますか? ... まさにそうです。それを利用したのが ABS (アンチロック・ブレーキング・システム) です。

問 34

- (1) クーロンの摩擦法則とは何か?
- (2) 摩擦係数とは何か?
- (3) 摩擦係数の次元は?
- (4) アンチロック・ブレーキング・システムを説明せよ。

問 35 傾斜角 ϕ の斜面上に、質量 m の物体が載って、ぎりぎりで静止している。これよりも少しでも傾斜がきつければ、物体は滑り出してしまう。このとき、傾斜角 ϕ と静止摩擦係数 μ の間に、次の関係が成り立つことを示せ (このような ϕ を安息角という)。

$$\mu = \tan \phi \quad (2.24)$$

問 36 図 2.14 のように、摩擦のある斜面 (静止摩擦係数 μ) の上方からバネ (バネ定数 k) で物体 (質量 m) が吊られて静止している。そのような状態が実現できるようなバネの伸び縮みの範囲を求めよ。

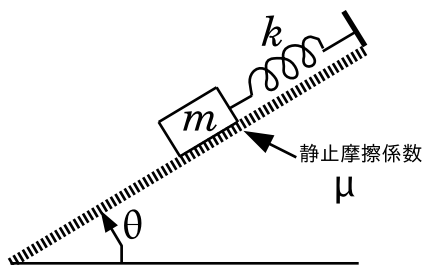


図 2.14 摩擦のある斜面上に、バネで吊るされた物体

2.10 系とは何か?

これまで扱った多くの例や問題では、それぞれで、単純化された状況を考えてきた。例えば図 2.1 では 2 つの物体だけに働く重力だけを考えたし、図 2.14 ではひとつの斜面とその上でバネにつながって静止する物体だけを考えた。実際は世界にはもっとたくさんの物体があるし、たくさんの斜面があるし、たくさんの力がある。バネにつながって静止した物体に、突然上空から隕石が落ちてきて衝突する可能性も 0 ではないのだ。

しかし、科学をやるときは、世界の中のごく一部だけを限定的に切り出して単純化し、それ以外のすべてのものを無視した状況を設定することがよくある。そういう状況設定を「系」(system) という。それは、言ってみれば、当面の問題や議論のためだけに極限まで単純化された「世界のモデル」である。例えば、2 つの物体しかない世界や、バネにつながった物体が斜面上に載っている以外には何も無い世界を考えるのだ。それが系である。

系という言葉は、本書では今後、たくさん出てくるし、化学などでもよく出てくるので、よく理解しておこう!

問 37 系とは何か?

よくある質問 25 黒板を手で押すとき、黒板がわずかに変形してその弾性力が手を押し返すことで手が静止すると聞きました。でも、手と黒板の間に、もし作用・反作用の法則がはたらくなら、黒板は変形しないでも、同じ大きさで逆向きの力が手にはたらくと思います。大きさが同じなら釣り合うんじゃないんですか? ... とても良い質問です。作用・反作用の法則を学ぶとき、多くの人が感じる疑問です。物体が動く (運動状態を変える) かどうかは、「その物体に働く力」が釣り合っているかどうかで決まります。ところが作用・反作用の法則は、「その物体に働く力」と同じ大きさで逆向きに「相手の物体に働く力」があるという話です。なので、「大きさが同じで向きが逆」ということだけを切り出して「ならば力は釣り合うのでは?」と考えるのは早計です。手が物体を押す力と、物体が手を押し返す力が「釣り合っている」としても、そのことは物体の運動にも手の運動にも、直接的には無関係なのです。つまり、作用・反作用の法則と力のつりあいは無関係なのです。

例として、ボール投げを考えましょう。ボール投げの際、手はボールに力をかけますが、その力はボールを加速することに寄与します (これは後に学ぶ運動方程式で説明されます)。一方、ボールは等しい大きさで逆向きに手を押し返します (作用・反作用の法則)。だからボールを投げるときに手は負担を感じるのです (だからピッチャーには体力が必要)。このとき、ボールにかかる力は釣り合っていない。手にかかる力 (ボールから受ける反作用の力と、腕の筋肉が手を押す力) も釣り合っていない。

手が黒板を押すとやがて動かなくなるのは、筋肉（それは肩から手首にかけての部分）が手（手首から先の部分）を押そうとする力と、黒板が弾性力（それは結局は垂直抗力）で手を押そうとする力が釣り合うからです。その弾性力は、黒板がわずかだけ歪むことで発生します。従って、手が黒板を押し始めてから黒板が十分に歪むまでの間は、黒板の弾性力は手が押す力よりも弱いのので、黒板は徐々に押し込まれて変形します。その過程では、手が押す力の「余り」は、黒板の変形を加速することに寄与します（運動方程式）。そして、それらの和、つまり手が押す力と同じ大きさで逆向きの力を手は黒板から受けま（これが作用・反作用の法則）。これは変形の途中でも、変形しきったときでも、同じこと。ところが変形しきったときは、黒板の加速度はゼロになるので、結局、手が押す力と黒板の弾性力は等しい大きさになります。

よくある質問 26 物体に力がかかるとき、ごくわずかでもめり込むなら、かなり長い時間、力をかけていたら、その物体はへこみますか？ ... 力の大きさと素材によりますが、そういう場合も多いでしょう。短時間では弾性的なく変形に比例した反発力を生じ、力が取り除かれると元に戻る）物体も、長時間、それなりの力にさらされ続けられたら、反発力を徐々に失い、変形が戻らなくなったりします。この性質を弾塑性と呼びます。「レオロジー」という学問分野で扱います。

よくある質問 27 人間が地上にいるとき、大気の圧力に押しつぶされないでいられるのは、どのような力が内側からはたっているのですか？ また、もし人間が体ひとつで圧力のあまりかからないものすごく高い場所に行ったとしたら、その人は破裂するのでしょうか？ ... 人体の大部分は水であり、そもそも（液体の）水は圧力がかかってもあまり変形しません。それが「つぶれない」ことのひとつの理由。また、肺に空気がありますが、鼻を介して肺は外気とつながっているためその圧力は基本的に外気の圧力（大気圧）と同じ。従って、肺の空気は大気圧と同じ圧力で押し返すから肺もつぶれない。ただし、人間が体ひとつで潜水する場合は、これが成り立ちません。特に、水圧のために肺の空気が圧縮されます。そのため、ある程度以上の深さに潜ると、人間の体に働く浮力（それは体積に比例する）が小さくなって、人間の体は勝手に沈んでいくそうです（先日、テレビでやっていました）。

逆に気圧の低いところ、特に真空等に行ってしまうと、体液が沸騰します（一般に、圧力が低くなると液体の沸点は下がる）。

2.11 解答

答 9 重力・電磁気力・強い力・弱い力

答 10

略。式 (2.1) に適切に値を代入して計算すればよい。ただし、 r は km で与えられているので、 m に換算すること。つまり、 $r = 6.4 \times 10^6$ m とすること。

答 11 略。

答 12

地表付近にある質量 m の物体が地球から受ける重力は mg と書ける。このときの定数 g が重力加速度*9。

答 13

地球中心から地表までの距離を r_1 、地球中心から旅客機または静止衛星までの距離を r_2 とする。質量 m の旅客機または衛星が仮に地表にあるときの重力を F_1 、それらが上空にあるときの重力を F_2 とすると、式 (2.1) より、

$$F_1 = G \frac{Mm}{r_1^2}, \quad F_2 = G \frac{Mm}{r_2^2}, \quad \text{従って,}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{6400 \text{ km}}{r_2} \right)^2 \quad \text{である.}$$

旅客機の場合、 $r_2 = 6,400 \text{ km} + 10,000 \text{ m} = 6,410 \text{ km}$ を上の式に代入すると、 $0.9969 \dots$ 。従って地表での重力の 99.7 パーセント（ほぼ 100 パーセント）。静止衛星の場合は、 $r_2 = (6400 \text{ km}) + (36000 \text{ km}) = 42000 \text{ km}$ を上の式に代入すると、 $0.023 \dots$ 。従って、地表での重力の約 2 パーセント。

答 14 地球の半径を r_1 、月の半径を r_2 、地球の質量を M_1 、月の質量を M_2 とする。さて、質量 m の物体が地表にあるとき地球から受ける重力を F_1 、月の表面にあるとき月から受ける重力を F_2 とすると、式 (2.1) より、

$$F_1 = G \frac{M_1 m}{r_1^2}, \quad F_2 = G \frac{M_2 m}{r_2^2} \quad \text{従って,}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{M_2}{M_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

$M_2/M_1 = 1/81.3$ 、 $r_2/r_1 = 1/3.68$ を代入すると、

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{81.3} \times 3.68^2 = \frac{1}{6.00} \quad (2.25)$$

従って、 $1/6$ 倍。

答 15 1 m^2 の地表面の上空にある大気の質量を m とし、それにかかる重力を F とする。 $F = mg = 1000 \times$

*9 たまに、重力加速度とは GM/r^2 である、という人がいるが、間違い。なぜなら、この式は、地球を静止した完全な球体とみなしており、この式に従えば地表のどこでも同じ値になってしまうから。実際の g の値は、場所によって微妙に異なる。例えば地下に重いものがある場合は、その直上の地表付近では g は大きくなる。低緯度では地球の自転による遠心力（後に学びます）の影響も g の値に入ってくる。

$10^2 \text{ Pa} \times 1 \text{ m}^2 = 10^5 \text{ N}$ 。従って、

$$m = \frac{F}{g} = \frac{10^5 \text{ N}}{9.8 \text{ m s}^{-2}} \approx 10^4 \text{ kg} \quad (2.26)$$

答 16 電荷 q_1 と電荷 q_2 をそれぞれ持つ粒子が距離 r だけ離れて静止していれば、その間に、以下の式であらわされる力 F が生じる：

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

(k は定数で、 $k = 8.987 \dots \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ である。) これを、クーロンの法則と呼ぶ。

答 17 電子や陽子が持つ電荷の大きさ(ただし符号を考えない)、 $q_e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。

答 18

(1) 式 (2.8) より、

$$\begin{aligned} F_e &= 8.987 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \times \frac{(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(1 \text{ m})^2} \\ &= 2.3 \times 10^{-28} \text{ N} \end{aligned} \quad (2.27)$$

(2) 式 (2.1) より、

$$\begin{aligned} F_g &= 6.7 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \times \frac{(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})^2}{(1 \text{ m})^2} \\ &= 5.5 \times 10^{-71} \text{ N} \end{aligned} \quad (2.28)$$

(3)

$$\frac{F_g}{F_e} = 2.4 \times 10^{-43} \quad (2.29)$$

注：このように、クーロン力は重力よりもはるかに大きい。米国の物理学者リチャード・ファインマンは、これを、「光が陽子 1 個の端から端まで通り過ぎるのにかかる時間と、宇宙の年齢との違いくらい大きい」と表現している。

答 19 その場所に電荷 q の荷電粒子を置くと、かかる力の大きさ F は、式 (2.8) より、

$$F = \frac{k q_e q}{r^2} \quad (2.30)$$

ここで、 $q_e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ は電荷素量、 $r = 1 \text{ m}$ 、 $k = 8.987 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ 。電場の大きさは F/q だから、

$$\frac{F}{q} = \frac{k q_e q}{r^2 q} = \frac{k q_e}{r^2} \quad (2.31)$$

これを計算すると、 $1.44 \times 10^{-9} \text{ N/C}$ 。

答 20

「人対壁」では、人 A がロープを引く力は、ロープの各箇所断面の左側に大きさ F で右向きにかかる。その反作用は、各断面の右側に大きさ F で左向きにかかる(これが張力)。それがロープの左端(壁との接点)まで伝わり、壁との接点では、壁はロープから、大きさ F で右向きの力を受ける。その反作用として、ロープは壁から大きさ F で左向きの力を受ける(この「壁が引く力」がロープの各箇所での左向きの力の源泉であり、そのおかげで「作用・反作用の法則」とつじつまが合う)。これは、壁のかわりに別の人 A がロープを左端で大きさ F の力で左向きに引っばると同じこと。従って、「人対人」でも、「人対壁」でも同じことになる。

答 21

君の体には 2 箇所ロープから上向きに引っばられている。また、ロープの張力 T は、ロープのどこでも等しい。従って、君の体には上向きに $2T$ の力がかかる。一方、重力によって、君の体には下向きに mg の力がかかる。座標軸を、上向きを正にとると、力のつりあいから、 $2T - mg = 0$ 。従って、 $T = mg/2$ 。一方、君の手がロープを引く力は T に等しいので、結局、 $mg/2$ に等しい。

答 22

滑車 B の両端のそれぞれで、ロープの張力 T が滑車 B を上向きに引く。一方、滑車 B には質量 m の物質にかかる重力 mg が下向きにかかる。力のつりあいから、 $2T - mg = 0$ 。従って $T = mg/2$ 。ロープの張力は、ロープのどこでも等しいから、君の手にかかる力も T 、すなわち $mg/2$ である。

答 23

君の手がロープを引く力は、君の手の筋肉の筋繊維の収縮から生じる。この現象は、筋繊維を構成する高分子の変形によって生じる。分子スケールの現象を支配する力は、ほとんどの場合、電気力である。従って、君の手がロープを引く力の根源は電気力である。

答 24

- (1) バネの伸び(変位) x と、バネが押す力 F が比例する、という法則。
- (2) フックの法則を $F = -kx$ と書くときの係数 k 。
- (3) $k = -F/x$ なので、 F の単位(すなわち $\text{N} = \text{kg m s}^{-2}$) を x の単位(すなわち m) で割ればよい。答は、 kg s^{-2} 。

答 25

力と変位が比例する、という、フックの法則が成り立つような力を弾性力という。弾性力だけで変形する物体を弾性体という。

答 26

塑性体とは、変形すると元に戻らない物体である。(弾性体は、力がかかると変形するが、かかる力が無くなれば元にもどる。)

答 27

質量 m の物体が地表にあるとき、バネの伸びが x_0 だったとする。バネの弾性力と(地球からの)重力のつりあいは次式になる:

$$-kx_0 + mg = 0 \quad (2.32)$$

一方、質量 m の物体が月面にあるとき、バネの伸びが x_1 だったとする。月面での(月から受ける)重力は、問 14 より、地表での(地球から受ける)重力の約 $1/6$ なので、バネの弾性力と(月から)の重力のつりあいは次式になる:

$$-kx_1 + mg/6 = 0 \quad (2.33)$$

この2つの式から mg を消去すれば、

$$kx_1 = kx_0/6 \quad (2.34)$$

従って、 $x_1 = x_0/6$ 。従って、月面でのバネの伸びは、地表での約 $1/6$ 倍。

答 28

下向きに座標系をとる。左側のバネを A、右側のバネを B と呼ぶ。バネ A について、バネが下端に働く力を F 、伸びを x とすると、フックの法則より、

$$F = -kx \quad (2.35)$$

である。左右対称なので、まったく同じ式が、バネ B についても成り立つ。一方、質量 M の物体にかかる力は、2つのバネから受ける力、つまり $2F$ と、重力 Mg である。物体が静止するには合力はゼロだから、

$$2F + Mg = 0 \quad (2.36)$$

これらの式から F を消去すると、

$$-2kx + Mg = 0 \quad (2.37)$$

従って、

$$x = \frac{Mg}{2k} \quad (2.38)$$

である。バネが1本だけのときは、 $x = Mg/k$ なので(式(2.17))、この結果は、 k が2倍になったとみなせる。

答 29

下向きに座標系をとる。上のバネを C、下のバネを D と呼ぶ。バネ C について、バネが下端に働く力を F_1 、伸びを x_1 とすると、フックの法則より、

$$F_1 = -kx_1 \quad (2.39)$$

である。バネ D についても同様に、バネが下端に働く力を F_2 、伸びを x_2 とすると、フックの法則より、

$$F_2 = -kx_2 \quad (2.40)$$

である。一方、質量 M の物体にかかる力は、バネ D が下端に働く力、つまり F_2 と、重力 Mg である。物体が静止するには合力はゼロだから(力のつりあい)、

$$F_2 + Mg = 0 \quad (2.41)$$

である。また、バネ D にかかる力は、バネ C が下端に働く力 F_1 と、物体がバネ D を引っ張る力(つまり重力)である。バネ D に関する力のつりあいから、

$$F_1 + Mg = 0 \quad (2.42)$$

これらの式から、

$$Mg = -F_1 = -F_2 = kx_1 = kx_2 \quad (2.43)$$

従って、

$$x_1 = x_2 = \frac{Mg}{k} \quad (2.44)$$

である。2本のバネの伸びの合計 x は、

$$x = x_1 + x_2 = \frac{2Mg}{k} \quad (2.45)$$

バネが1本だけのときは、 $x = Mg/k$ なので(式(2.17))、この結果は、 k が $1/2$ 倍になったとみなせる。

答 30

問 29 と同様に考えれば、バネ定数 k のバネを a 本、縦につなぐと、バネ定数は k/a となる。問 28 と同様に考えれば、バネ定数 k/a のバネを b 本、束ねる(並列につなぐ)と、バネ定数は bk/a となる。

答 31

(1) $E = kL/A$ で、 k の SI 単位は kg s^{-2} 、 L/A の SI 単位は $\text{m/m}^2 = \text{m}^{-1}$ なので、 E の単位は $\text{kg s}^{-2} \text{m}^{-1}$ 。

順番を入れ替えて $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ などでも OK。なんと! これは Pa, すなわち圧力の SI 単位ではないか!

- (2) 約 2.0×10^{11} Pa。
 (3) まずこの鉄線のバネ定数 k を求める。 $L = 10$ m, $A = 3.14 \times (0.002 \text{ m}/2)^2 = 3.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ 。従って, $k = EA/L = 6.2 \times 10^4 \text{ kg s}^{-2}$ 。さて, 質量 m の物体を吊り下げたときの伸び x は,

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{10 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m s}^{-2}}{6.2 \times 10^4 \text{ kg s}^{-2}} = 1.6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

従って, 1.6 mm (約 2 mm) 伸びる。

- (4) 伸びはバネ定数に反比例する。バネ定数は断面積に比例する。従って, 伸びは断面積に反比例する。従って, 直径を半分にすると断面積が $1/4$ 倍になり, 伸びは 4 倍になる。従って, 伸びは 6.4 mm になる。
 (5) 銅のヤング率は 1.3×10^{11} Pa。鉄の約 0.65 倍。伸びはバネ定数に反比例し, バネ定数はヤング率に比例する。従って伸びはヤング率に反比例する。従ってヤング率が 0.65 倍になれば伸びは $1/0.65$ 倍。従って, 2.5 mm 程度になる。

答 32

- (1) $\sigma = F/A$ より, σ の SI 単位は, $\text{kg m s}^{-2}/\text{m}^2 = \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2} = \text{Pa}$ 。
 (2) $\epsilon = x/L$ より, ϵ の単位は, $\text{m}/\text{m} = 1$ 。従って, 単位無し! (無次元)

答 33

3 kg の物体にかかる重力の, 斜面平行方向の大きさは, $(3 \text{ kg}) \times g \times \sin(\pi/6)$ 。質量 m の物体にかかる, 斜面平行方向の力の大きさは, $mg \times \sin(\pi/3)$ 。これらはともにロープの張力と等しい。ロープの張力 T は, ロープのどこでも等しいから, $T = (3 \text{ kg})g \sin(\pi/6) = mg \sin(\pi/3)$ 。従って,

$$m = \frac{(3 \text{ kg})g \sin(\pi/6)}{g \sin(\pi/3)} = \sqrt{3} \text{ kg} \approx 1.7 \text{ kg} \quad (2.46)$$

答 34

- (1) 物体どうしが接触している場合, 静止摩擦力 F_s と動摩擦力 F_m が, $F_s \leq \mu N, F_m = \mu' N$ となること。ここで, N は物体どうしが互いに接触面に垂直に押し合う力。 μ, μ' は, それぞれ静止摩擦係数, 動摩擦係数とよばれる定数。

- (2) クーロンの法則が上の式のようにかける時の, μ や μ' のこと。
 (3) $\mu' = F_m/N$ であり, F_m も N も力なので, その比である μ' は無次元。 μ も同様に無次元。
 (4) 略。

答 35

質量 m の物体に, 斜面に平行にかかる重力 (重力の斜面成分) は $mg \sin \phi$ 。これが静止摩擦力 F_s とつりあっている。いま, 静止摩擦力は上限の状態なので, クーロンの摩擦の法則より, $F_s = \mu N$ 。ここで N は物体と斜面の間に働く, 斜面に垂直方向の力であり, これは重力の斜面垂直成分に等しい: $N = mg \cos \phi$ 。従って, $F_s = \mu mg \cos \phi$ 。斜面に平行な方向の力のつりあいより, $mg \sin \phi = F_s = \mu mg \cos \phi$ 。従って,

$$\mu = \frac{mg \sin \phi}{mg \cos \phi} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan \phi \quad (2.47)$$

答 36

斜面に平行で上向き (上り坂方向) に x 軸をとる。物体をとりつける前のバネの自然長での末端位置を $x = 0$ とし, 物体をとりつけた後のバネの末端位置を x とする。物体にかかる, 摩擦力以外の力は, 重力: $-mg \sin \theta$, 弾性力: $-kx$ の 2 つである。この合力が, 静止摩擦力 F_s と釣り合うのだから,

$$-mg \sin \theta - kx + F_s = 0 \quad (2.48)$$

である。ここで, 垂直抗力は $mg \cos \theta$ なので, $|F_s| \leq \mu mg \cos \theta$ である。従って,

$$|F_s| = |mg \sin \theta + kx| \leq \mu mg \cos \theta \quad (2.49)$$

である。従って,

$$-\mu mg \cos \theta \leq mg \sin \theta + kx \leq \mu mg \cos \theta \quad (2.50)$$

である。従って,

$$-\mu mg \cos \theta - mg \sin \theta \leq kx \leq \mu mg \cos \theta - mg \sin \theta$$

である。従って,

$$\frac{mg}{k}(-\mu \cos \theta - \sin \theta) \leq x \leq \frac{mg}{k}(\mu \cos \theta - \sin \theta)$$

答 37 略。

第3章

仕事とエネルギー

注: この章を理解するには、数学リメディアル教材で「積分」を理解していることが必要。

3.1 仮想仕事の原理

前章で、体を滑車に吊るす話や、動滑車で物を持ち上げる話や、質量の異なる物体を2つの斜面上に置いてロープでつないで静止させる話などを学んで、君は不思議に思わなかっただろうか？ これらの話は、とりあえず力のつりあいや、作用・反作用の法則などは、満足させている。だが、物体をその重さの半分の力で持ち上げられる、というのは不思議だ。我々の日常感覚では、ある物を持ち上げるにはその重さと同じ力が必要では？ と、シンプルに考えてしまう。しかし実際の自然はそうではない。不思議だ。気持ち悪い。この不思議さをうまく説明し、この気持ち悪さから我々を救ってくれるシンプルな法則は無いのだろうか？

それが、ここで学ぶ「仮想仕事の原理」だ。これは「力のつりあい」を、もっと普遍的に述べた物理法則である。「力のつりあい」と等価だが、ある意味、それよりも深く、根源的なものを内包した法則だ。

例 3.1 動滑車で物を持ち上げる話 (問 22) では、滑車やロープや天井などが互いに及ぼす力(張力など)は別とすれば、関与する力は、君がロープを下向きに引く力 T と、物体に下向きにかかる重力 mg だ。ここで、仮想的に、君がロープを、ちょっとだけ引っぱったとしよう (図 3.1)。このとき、滑車 B が Δx だけ持ち上がったとする。すると、当然、物体も同じだけ、つまり Δx だけ持ち上がる。このとき、ロープの動きをたどって考えれば、君がロープを引っ張った長さは $2\Delta x$ であることがわかるだろう*1。

このとき、下向きに座標をとり、それぞれの力と、その力が働く点が動いた距離の掛け算を考え、それを合計し

*1 滑車 B の左右端からそれぞれ長さ Δx だけ上の部分が、引っ張った後には無くなっている。これらの長さの合計は (左右にそれぞれ1つずつあるので) $2\Delta x$ である。

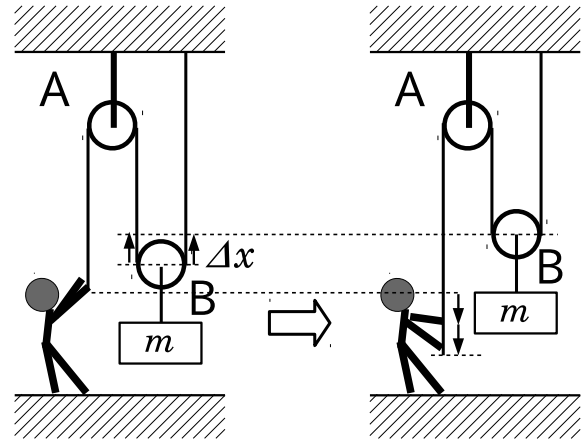


図 3.1 動滑車を使う持ち上げ。物体を Δx だけ上昇させるにはロープを $2\Delta x$ だけひっぱる必要がある。

てみる。

$$T(2\Delta x) + mg(-\Delta x) \quad (3.1)$$

ここで、第二項の $(-\Delta x)$ のマイナスは、座標の向き(下向き)とは逆の上向きに物体が移動することをあらわす。で、だまされたと思って、これを0とおいてみよう：

$$2T\Delta x - mg\Delta x = 0 \quad (3.2)$$

すると、

$$T = \frac{mg}{2} \quad (3.3)$$

という、正しい答えが得られる。これが仮想仕事の原理の例である。(例おわり)

仮想仕事の原理とは以下のようなものである：

——— 仮想仕事の原理 ———

力がつりあっている系では、仮想的な微小変位に伴って外力のなす仕事の総和は0である。

「仮想的な微小変位」とは、上の例で言えば、君がロープを引く $2\Delta x$ や、物体が上に上がる Δx のことだ。「外力」とは、君が引く力と、物体にかかる重力のことだ。そ

して、

仕事の定義

「力と、その力が働く点が“力と同じ向き”に動いた距離との掛け算」を「仕事 (work)」という。

なんで「仕事」とか「仮想的な微小変位」とかの得体の知れぬものを持ち出してこんな「原理」を考えるのだろうか？ それは、こうすればうまく（シンプルに無矛盾に）いろんな物事を説明できるからだ。なぜこんな原理が成り立つのか、その理由は誰も知らない。自然はそうなっているのだ。

この例では、確かに動滑車のおかげで、ロープを引っ張る力は半分になったが、そのかわり、ひっぱる長さは倍になってしまった。つまり、同じ高さだけ持ち上げようとすると、かかる力が半分なら、ひっぱる長さ（距離）を倍にしなければならない。つまり、たとえ必要な力は動滑車などで変えることができても、力と距離の掛け算、つまり仕事は、変えることができない。それが自然の摂理なのだ。だから、仕事という概念が便利なのだ。

もうひとつの例を考えよう。前章で考えた、2つの斜面に物体を置いてロープでつないで静止させる話である。

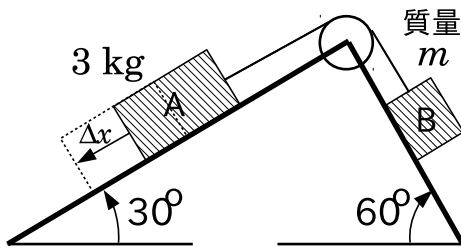


図 3.2 2つの斜面に載せられ、ロープでつながって静止する2つの物体。図 2.13 改変。

例 3.2 前章の問 33 において、物体 A を斜面に沿って左下向きに Δx だけ動かしてみよう（図 3.2）。すると、ロープにつながっている物体 B も、斜面に沿って左上向きに Δx だけ動くはずだ。このとき、物体 A に関して重力がなす仕事は、 $(3 \text{ kg})g\{\sin(\pi/6)\}\Delta x$ である。一方、物体 B に関して重力がなす仕事は、 $-mg\{\sin(\pi/3)\}\Delta x$ である。マイナスがつくのは、物体 B が重力と逆方向（上方向）に移動したからだ。仮想仕事の原理より、

$$(3 \text{ kg})g\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)\Delta x - mg\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)\Delta x = 0 \quad (3.4)$$

ここから、 $m = \sqrt{3} \text{ kg}$ が出てくる。（例おわり）

問 38

- (1) 仕事とは何か？
- (2) 仕事の単位を SI 基本単位による組み立て単位で表せ。それを J (ジュール) と呼ぶ。
- (3) 仮想仕事の原理とは何か？

問 39 君は「てこの原理」を聞いたことがあるだろう。

これは仮想仕事の原理から導くことができる。図 3.3 上のように、支点 S の上に、左右に長さ l_1, l_2 を持つ「てこ」が置かれ、左右それぞれの端にそれぞれ質量 m_1, m_2 の物体 1, 2 が載っている。これを、図 3.3 下のよう

- (1) 左端がもとの状態から h_1 だけ下がり、右端がもとの状態より h_2 だけ上がるとすると、

$$h_1 = l_1 \sin \theta \quad (3.5)$$

$$h_2 = l_2 \sin \theta \quad (3.6)$$

となることを示せ。

- (2) 物体 1 における重力による仮想仕事は $m_1gl_1 \sin \theta$ 、物体 2 における重力による仮想仕事は $-m_2gl_2 \sin \theta$ となることを示せ。
- (3) 仮想仕事の原理より、次式（てこの原理）を導け：

$$m_1l_1 = m_2l_2 \quad (3.7)$$

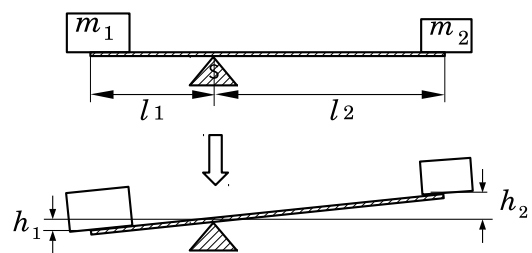


図 3.3 仮想仕事の原理からてこの原理を導く。

前章で述べたように、物体が静止しているとき、「力のつりあい」が実現している。しかし、実は、「大きさを持つ物体」についてはそれに加えて、上述の「てこの原理」に相当する、「モーメントのつりあい」というものも実現する。モーメントとは、簡略に言えば、ある点（支点）からの距離と、それに直交する力との積だ。そして、モーメントのつりあいとは、モーメントの合計が 0 にな

るということだ。高校物理を学んだ人は聞いたことがあるだろう。しかし、これをきちんと正しく記述し、理解するには、数学で「ベクトルの外積」というのを学ばねばならないので、今は詳述しない(後の章で学ぶ)。ただし、ここでは、「仮想仕事の原理は、力のつりあいだけでなく、モーメントのつりあいまでも含んだ、一般性の高い法則だ」ということを認識しておこう。

問 40 図 3.4 のようなジャッキについて、半径 r のハンドルを 1 回転すると、上載物は Δy だけ持ちあがるとする。摩擦は無視する。

- (1) ハンドルをまわすのに必要な力を F とする。ハンドルを 1 回転するときに、君の手がなす仕事は

$$2\pi r F \quad (3.8)$$

であることを示せ。

- (2) 上載物の質量を m とする。ハンドルを 1 回転するときに、重力のなす仕事は

$$-mg\Delta y \quad (3.9)$$

であることを示せ。

- (3) 次式を示せ：

$$2\pi r F - mg\Delta y = 0 \quad (3.10)$$

- (4) 次式を示せ：

$$F = \frac{mg\Delta y}{2\pi r} \quad (3.11)$$

- (5) $m = 1000 \text{ kg}$, $r = 0.2 \text{ m}$, $\Delta y = 0.003 \text{ m}$ のとき、 F はどのくらいか？

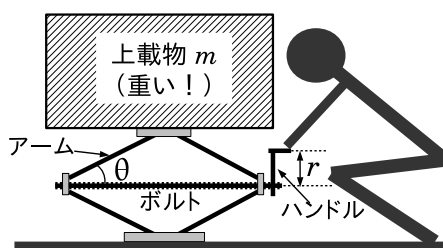


図 3.4 ジャッキで物を持ち上げる。

よくある質問 28 仮想仕事の原理の「仮想的な微小変位」はどうして仮想的である必要があるんですか？ ... 「微小変位」という考え方自体がそもそも仮想的です。バランスしている系に少しでも変化を加えたら、バランスが崩れるかもしれない。でも、「バランスを崩さない程度に小さな変位」というの

が微小変位であって、そもそもそんなの厳密には現実的に無理じゃね?という気持ちがあるから「仮想」なのです。

よくある質問 29 仮想仕事の原理に鳥肌が立ちました。自然の不思議さを感じざるを得ません。... このような原理を見つける旅が、学問としての物理学なのでしょう。

3.2 仕事とエネルギー

さて、仮想仕事の原理では、「仕事」という量が重要な働きをした。それにとどまらず、仕事は、物理学の全般にわたって、重要な役割を果たす概念だ。例として、図 3.1 の例をもういちど考えよう。君がロープを引くことで

$$2T\Delta x$$

という仕事をしたとき、同時に、質量 m の物体にかかる重力が

$$-mg\Delta x \quad (3.12)$$

という仕事をした。このとき、仮想仕事の原理から、両者の和は 0 である。

君がロープを引くことによって君は仕事をし、実際、疲れる。しかしその努力は、重力に逆らって物体が上昇した、という結果(重力による負の仕事)に残っている。この上昇した状態で物体に別のロープとか滑車とかをこをつければ、今度は物体が下がることによって、また別の物体を持ち上げることができるだろう。

このような話は、お金のやりとりには似ていないだろうか？ A 君が B 君に 1000 円を譲渡したとする。なぜそんなやりとりが起きたか、とか、それによって 2 人の関係はどうなるか、という興味もあるが、2 人以外の人にしてみれば、お金のやりとりは 2 人の間で完結している(2 人あわせた収支は 0 である)。そして、A 君からもらった 1000 円で、こんどは B 君が C さんから何かを買うことができる。

物理学における仕事とは、この話の「お金」のような役割をする。A 君、B 君、C さん、... とお金を手渡されていくように、君がロープを引くことでなした仕事は、後々まで、形を変えながら、様々なところに受け渡されるのだ。そのように、仕事を普遍化した量を、物理学では エネルギー という。エネルギーとは、仕事に形を変えた量、もしくは仕事に形を変えることができる量である。エネルギーは仕事と同じ次元を持ち、その単位は、

SI 単位系では J である。

問 41 エネルギーとは何か?

エネルギーには、様々な形態がある。熱もエネルギーだ。なぜか? 例えば気体に熱を加えると膨張し、まわりのものを移動させることができる。つまり、仕事ができる。だから熱はエネルギーである。

光もエネルギーの一形態だ。なぜか? 太陽光を浴びると暖くなる、つまり熱を受け取ることができる。熱はエネルギーなので、光はエネルギーを運ぶのだ。

熱は、後に学ぶ「運動エネルギー」というタイプのエネルギーに帰着させて考えることができる。また、この章の後半で学ぶ「ポテンシャルエネルギー」というタイプのエネルギーもある。物質が化学反応するときに出る熱や光は、物質の分子レベルでのポテンシャルエネルギーの変化によるものである。

さて、仕事について、もう少し、丁寧に数学的に意味づけよう。

さきほど、仕事とは、「力と、その力が働く点が”力と同じ向き”に動いた距離との掛け算」であると述べたが、それが成立するのは、その点の移動中に、力がほとんど変化しないことが必要である(でなければ、どの時点での力を掛け算すればいいのかわからない)。では、移動中に力が次第に変化するような場合は、仕事はどのように定義されるのだろうか?

いま、ある物体に力 F がかかっているとき、それを力の向きに Δx だけ動かす。 Δx だけ動かす間には F は変化しないと考える。すると、その力がする仕事 ΔW は、

$$\Delta W = F\Delta x \tag{3.13}$$

である。これは仕事の定義だ。これをたくさん繰り返すことを考えよう。いま、座標上で、位置 x_0 にある物体を、位置 x_1 まで運ぶとする。この間、物体にかかる力は変化するかもしれないが、 x_0 から x_1 までとはとても近くて、その間の力の変化は無視できるくらいに小さいとする(逆に言えば、力の変化が無視できるくらいに、 x_0 と x_1 を近づける)。つまり、この間の力は F_1 でほぼ一定値とみなせる。このときの仕事 ΔW_1 は、上の式から、

$$\Delta W_1 \doteq F_1\Delta x_1 \tag{3.14}$$

である ($\Delta x_1 = x_1 - x_0$ とする)。位置 x_1 まで来た物体は、こんどは x_1 のすぐ近くの位置 x_2 まで運ばれ、その間、物体にかかる力は F_2 で一定であるとする(ただし

F_2 は F_1 と同じとは限らない)。このときの仕事 ΔW_2 は、同様に、

$$\Delta W_2 \doteq F_2\Delta x_2 \tag{3.15}$$

である ($\Delta x_2 = x_2 - x_1$ とする)。以下同様に、物体をすこしずつ x_3, x_4, \dots, x_n まで順次運び (n は正の整数)、各ステップでは物体に F_3, F_4, \dots, F_n というそれぞれ一定値の力がかかっていると、各ステップでの仕事は、

$$\begin{aligned} \Delta W_3 &\doteq F_3\Delta x_3 \\ \Delta W_4 &\doteq F_4\Delta x_4 \\ &\dots \\ \Delta W_n &\doteq F_n\Delta x_n \end{aligned} \tag{3.16}$$

となる。これらを辺々で合計すれば、

$$\sum_{k=1}^n \Delta W_k \doteq \sum_{k=1}^n F_k\Delta x_k \tag{3.17}$$

となる。左辺は、物体を x_0 から x_n まで運ぶときの全体の仕事であり、これを W と書こう:

$$W \doteq \sum_{k=1}^n \Delta W_k \doteq \sum_{k=1}^n F_k\Delta x_k \tag{3.18}$$

ここで n を十分大きくとって、 x_1, x_2, \dots, x_n の分割を十分に細かくすれば、すなわち、式 (3.18) の極限として、

$$W = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n F_k\Delta x_k \tag{3.19}$$

を考えれば、「数学リメディアル教材」の積分の定義より、次式が成り立つ:

— 仕事の定義 (力が一定でない場合) —

物体を位置 a から位置 b まで運ぶときの仕事は、

$$W = \int_a^b F(x) dx \tag{3.20}$$

ここで x_0 を a に、 x_n を b に、改めて書き換えた。 $F(x)$ は x の各点で物体が受ける力だ。この式 (3.20) は、仕事の定義式 (3.13) を、「力が次第に変化する場合」に拡張した(つまり、より一般性の高い)仕事の定義式である。

例 3.3 質量 m の物体が、地表付近で mg という大きさの重力を受けて、高さ h_0 から h_1 まで変化する。重力のなす仕事を求めよう。座標軸を上向きにとると、重力は、式 (2.5) より、

$$F = -mg \tag{3.21}$$

である。ここで右辺のマイナスは、重力が座標軸の向きとは逆向きであることを表す*2。従って、式 (3.20) より、

$$\begin{aligned} W &= \int_{h_0}^{h_1} (-mg) dx \\ &= -mg(h_1 - h_0) = mg(h_0 - h_1) \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる。もし $h_0 > h_1$ なら(つまり物体が下がる時)、 $W > 0$ である。もし $h_0 < h_1$ なら(つまり物体が上がる時)、 $W < 0$ である。つまり、重力に逆らって動く場合は、重力のする仕事はマイナスである、ということになる。(例おわり)

よくある質問 30 例 3.3 で、座標軸は下向きじゃダメですか? ... いいですよ。その場合、 $F = mg$ となり、 $W = mg(h_1 - h_0)$ 。これは本文の結果とは符号が逆のように見えますが、今の場合は h が大きいと低いので、結局、物体が下がる時 $h_0 < h_1$ となり、そのとき W は正になる。という結論は変わりません。本文で座標を上向きにとったのは、「高いところほど h が大きい」ほうが、我々の空間認識では直感に素直だからです。

例 3.4 質量 m の物体が、質量 M の物体から万有引力を受けながら、物体 M からの距離が R_0 から R_1 まで変化する。このとき万有引力のなす仕事を求めよう。座標軸を物体 M から物体 m の向きにとると、万有引力は、式 (2.1) より、

$$F = -\frac{GMm}{x^2} \quad (3.23)$$

である。ここで右辺のマイナスは、万有引力が座標軸の向きとは逆向きであることを表す*3。式 (3.20) より、

$$\begin{aligned} W &= \int_{R_0}^{R_1} \left(-\frac{GMm}{x^2}\right) dx = \left[\frac{GMm}{x}\right]_{R_0}^{R_1} \\ &= GMm\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0}\right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

となる。(例おわり)

問 42 バネ定数 k のバネについて物体を、バネの自然状態を原点として位置 x_0 から位置 x_1 まで動かすと

きに、バネの弾性力がなす仕事 W は、

$$W = -\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_0^2) \quad (3.25)$$

となることを示せ。ヒント: 式 (2.15) より $F = -kx$ とし、式 (3.20) を使う。

問 43 気体を膨張させたり圧縮したりするときの仕事を考えよう。ある気体が、断面積 A のシリンダー(筒状の容器)に入っており、上面がピストンで蓋してある。鉛直上向きに x 軸をとり、シリンダーの底面で $x = 0$ とする。ピストンは x 軸にそって上下に動くことができる。最初、ピストン(つまり蓋)は $x = h$ にあって静止しているとする(図 3.5)。ピストンは十分に軽いとし、重力を無視する。気体の圧力を P とする。

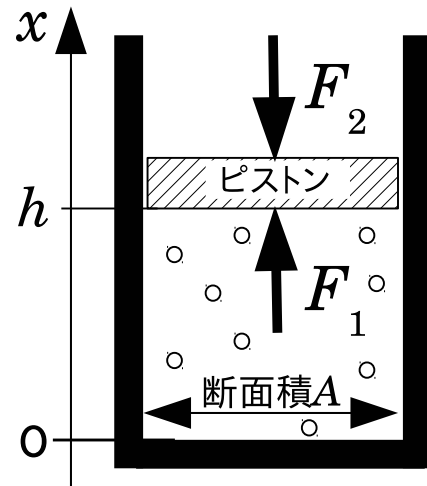


図 3.5 気体が入ったシリンダー。

- (1) 気体の体積 V は、 $V = Ah$ と表せることを示せ。
- (2) 気体がピストンに及ぼす力 F_1 は、

$$F_1 = PA \quad (3.26)$$
 となることを示せ。
- (3) 外部からピストンにかかる力(それを外力という*4)を F_2 とすると、

$$F_2 = -PA \quad (3.27)$$
 となることを示せ。
- (4) 次に、ピストンをゆっくり動かして、 $x = h + dh$ の

*2 式 (2.5) では力の向きを考えず、力の大きさだけを考慮していたことに注意せよ。

*3 式 (2.1) では力の向きを考えず、力の大きさだけを考慮していたことに注意せよ。

*4 この外力が具体的に何によるものかは、ケースバイケースであり、ある場合は誰かが手で押さえているのかもしれないし、ある場合はシリンダー外部に充満する気体の圧力によるものかもしれない。この問題ではその詳細は気にしない。

位置に移動させることを考えよう。 $dh > 0$ なら、気体は膨張し、 $dh < 0$ なら気体は圧縮される。 dh は微小であり、ピストンが $x = h$ から $x = h + dh$ まで動く間に F_1 や F_2 はほとんど一定であるとみなす。このとき、外力がなす仕事 dW は、

$$dW = F_2 dh = -PA dh \quad (3.28)$$

となることを示せ。

- (5) 体積の変化を dV とする。すなわち、ピストンの移動後に気体の体積は $V + dV$ になったとする。次式を示せ:

$$dV = A dh \quad (3.29)$$

- (6) 式 (3.28)、式 (3.29) より次式を示せ:

$$dW = -P dV \quad (3.30)$$

- (7) ピストンを大きく動かし、体積が V_1 から V_2 になるまで変化させることを考えよう。この間に外力がなす仕事 W は次式のようになることを示せ:

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV \quad (3.31)$$

- (8) ここで、気体は理想気体であるとしよう。つまり、理想気体の状態方程式:

$$PV = nRT \quad (3.32)$$

が成り立つとする (n はモル数、 R は気体定数、 T は絶対温度)。次式が成り立つことを示せ:

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV \quad (3.33)$$

- (9) ここでさらに、ピストンの移動は十分にゆっくりであり、その過程では温度 T は一定であるとする、次式が成り立つことを示せ:

$$W = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} \quad (3.34)$$

- (10) 1 モルの理想気体を摂氏 0 度 (一定) で体積を半分まで圧縮するとき外力がなす仕事を求めよ。

式 (3.30) は、化学や熱力学で、非常によく出てくる式だ。ここでは外力がなす仕事を考えたが、気体 (の圧力) がなす仕事を考えると、それは外力がなす仕事の符号を逆にしたものである (なぜなら気体がピストンにおよぼす力は外力がピストンにおよぼす力の逆だから)。それを dW' とすると、 $dW' = -dW$ なので、

$$dW' = P dV \quad (3.35)$$

となる。この式もよく使われるので、式 (3.30) との違いをよく理解しておこう*5。

3.3 ポテンシャルエネルギー

さて、式 (3.20) をみると、仕事 W は、始点 a と終点 b の関数だ。特に、始点 a をどこかに固定して (それを基準点と呼ぼう)、 W を b だけの関数とみなし、改めて b を x と書けば、 W は x の関数 $W(x)$ だ。その意味は、「基準点から点 x まで物体を運ぶときの仕事」である。この $W(x)$ の符号を変えたものを ポテンシャルエネルギー*6 という。すなわち、

ポテンシャルエネルギーの定義 (1)

$$U(x) = -W(x) \quad (3.36)$$

で定義される関数 $U(x)$ を、「ポテンシャルエネルギー」という。ここで $W(x)$ は、物体を基準点から点 x まで運ぶときに、物体にかかっている力がなす仕事である。

例 3.5 上の例 3.3 で、地面を基準点とすれば、 $h_0 = 0$ となり、 h_1 を改めて h とおけば、 $W(h) = -mgh$ である。このとき、ポテンシャルエネルギーは、式 (3.36) から、

$$U(h) = mgh \quad (3.37)$$

である。(例おわり)

つまり、物体を高く持ち上げるほど、重力によるポテンシャルエネルギーは、大きくなる。で、持ち上げられた物体は、てこや滑車を使えば、別の物体を持ち上げる「仕事」をすることができる。つまり、ポテンシャルエネルギーとは、力を受けている物体が、ある位置にあることによって持つエネルギー、つまり位置に付随するエネルギーである。

問 44 ポテンシャルエネルギーとは何か?

ところで、式 (3.36) の右辺の $W(x)$ は、物体にかかっている力がなす仕事だ。例えば例 3.5 では、重力がなす仕事にそれが相当する。ところが、現実的には、重力がかかっている物体が、ひとりてに重力に逆らって

*5 化学や熱力学では、教科書によって、外力のなす仕事を dW とするものと、気体がなす仕事 (すなわちここで dW' とあらわしたものを) dW とするものがあるので、気をつけよう。

*6 「位置エネルギー」とか、単に「ポテンシャル」と言うこともある。

上に移動したりはしない。誰かが重力に逆らう力をかけて、その物体を持ち上げねば、物体は上に移動しない。そのような「誰かの力」がなす仕事 $W'(x)$ を考えると*7、それは重力のなす仕事とは同じ大きさでありながら符号が逆である（力の向きが逆だから）。すなわち、 $W'(x) = -W(x)$ だ。それを使うと、ポテンシャルエネルギーは以下のように定義することもできる：

ポテンシャルエネルギーの定義 (2)

$$U(x) = W'(x) \quad (3.38)$$

で定義される関数 $U(x)$ を、「ポテンシャルエネルギー」という。ここで $W'(x)$ は、物体を基準点から点 x まで運ぶときに、かかっている力に逆らって誰かがなす仕事である。

例 3.5 では、物体を地面から高さ h まで君が持ち上げるとすれば、君は物体に上向きに mg という大きさの力をかけ、上向きに h だけ移動させねばならないので、そのとき君がなす仕事は $W'(h) = mgh$ だ。従ってポテンシャルエネルギーは、式 (3.38) から、 $U(h) = mgh$ となり、それは式 (3.37) に一致する（つじつまが合っている）。

式 (3.36) と式 (3.38) は、互いに等価であり、どちらの定義を採用してもかまわない。これらの 2 つの定義は、教育的な意味で、「わかりやすさ」に一長一短があるのだ。前者は、右辺にマイナスが出てくるのがちょっと不自然でわかりにくい。後者は、そこに実在している力とは別の力を誰かが発揮すると想定するという点でわかりにくい。そこで、これらの欠点を解消した第 3 の定義がある。すなわち、

ポテンシャルエネルギーの定義 (3)

$$U(x) = W''(x) \quad (3.39)$$

で定義される関数 $U(x)$ を、「ポテンシャルエネルギー」という。ここで $W''(x)$ は、物体を点 x から基準点まで運ぶときに、物体にかかっている力がなす仕事である。

例 3.5 で、物体が高さ h から地面（基準点）まで落下することを考えれば、下向きに mg という大きさの重力がかかって、下向きに h だけ移動するので、そのとき重

力がなす仕事は $W''(h) = mgh$ である。従ってポテンシャルエネルギーは、式 (3.39) から、 $U(h) = mgh$ となり、それは式 (3.37) に一致する（つじつまが合っている）。

もちろん、式 (3.36)、式 (3.38)、式 (3.39) は、互いに等価であり、どれを定義として採用してもかまわない（ちょっと考えれば、 $W''(x) = W'(x) = -W(x)$ であることがわかるだろう）。教科書や学者によって、どの定義を採用するかは、様々だ。しかし、物理学の実体としては、どれも同じことだ。

問 45 バネ定数 k のバネについての物体を考える。バネの自然状態を原点かつ基準点として、物体が位置 x にあるとき、バネの弾性力によるポテンシャルエネルギー $U(x)$ は次式のようになることを示せ。また、関数 $U(x)$ をグラフに描け。

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.40)$$

問 46 質量 m の物体が、質量 M の物体から距離 R だけ離れているときの、万有引力によるポテンシャルエネルギー $U(R)$ を考える。無限遠 ($R = \infty$) を基準点とすると、 $U(R)$ は次式のようになることを示せ。また、関数 $U(R)$ をグラフに描け。

$$U(R) = -\frac{GMm}{R} \quad (3.41)$$

問 47 以下の値をそれぞれ求めよ。必要な数値は、各自、調べよ。

- (1) 地上 10 m の高さにある、質量 2 kg の物体に関する、重力のポテンシャルエネルギー。
- (2) 長さ 10 m、直径 2 mm の鉄線を 1 mm 伸ばしたとき、鉄線の弾性力のポテンシャルエネルギー。
- (3) 月に関する、地球の重力のポテンシャルエネルギー。

問 48 傾斜角 θ の滑らかな斜面に沿って、質量 m の物体を、斜距離 L だけ運びあげた。かかった仕事は？ また、ポテンシャルエネルギーの変化は？

ここでひとつ注意。ポテンシャルエネルギーという考え方は、物体にかかる力が 保存力 (conservative force) という、ある種の力についてのみ、成り立つ。保存力とは、物体をある位置から別の位置に運ぶときにその力がなす仕事は、移動の経路によらずに一定である、という

*7 ここで $W'(x)$ のダッシュは「微分」という意味ではない。単に $W(x)$ と区別するための印である。

ような力である。

そもそも、ポテンシャルエネルギー $U(x)$ とは、ある特定の位置（基準点）から位置 x まで物体を運ぶときに力がなす仕事を用いて定義された。力が保存力でなければ、この $W(x)$ が移動の経路によってまちまちの値をとりうるので、 $W(x)$ の値が x で一意的に定まらない。つまり、 $U(x)$ の値が一意的に定まらないのだ。

我々が考える力の多くは保存力である。数少ない例外は、摩擦力だ。摩擦力は保存力ではない。

問 49 保存力とは何か？

問 50 摩擦力が保存力でないことを証明しよう。

- (1) 物体を位置 x_0 から位置 x_1 に運ぶときの仕事を W_{01} とし、その逆戻り、つまり物体を位置 x_1 から位置 x_0 に運ぶときの仕事を W_{10} とする。もし力が保存力なら、 $0 = W_{01} + W_{10}$ となることを示せ（ヒント：物体を x_0 から x_0 まで運ぶ経路には、「何も動かさない」とか「 x_0 から x_1 までを往復する」などがある。）
- (2) 摩擦力では、上の式が成り立たないことを示せ。

問 51 傾斜角 θ の、動摩擦係数 μ' の斜面に沿って、質量 m の物体を、斜距離 L だけ運びあげた。かかった仕事は？ また、重力のポテンシャルエネルギーの変化は？

3.4 仕事率

単位時間あたりになされる仕事のことを、仕事率 という。すなわち、時間 Δt の間に、仕事 ΔW が行われた場合、仕事率 P は、

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (3.42)$$

と定義される。ここで、仕事率が時々刻々と変わるような場合についても対応できるように、 Δt として十分に短い時間をとると、

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (3.43)$$

となる。つまり、仕事率は、仕事を時刻で微分したものである、と言ってもよい。

例 3.6 質量 m の物体を、 Δt の時間をかけて高さ Δh まで持ち上げる場合を考えよう。仕事 ΔW は $mg\Delta h$ と

なる。仕事率 P は、

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} \quad (3.44)$$

となる。 Δt を 0 に近づけると、

$$P = mg \frac{dh}{dt} \quad (3.45)$$

となる。 dh/dt は物体を持ち上げる速度だ。これを v とおくと、

$$P = mgv \quad (3.46)$$

となる。(例おわり)

数学リメディアル教材で学んだように、仕事率の単位は、SI 単位系で表すと、 $\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$ 、もしくは、同じことだが J s^{-1} だ。この単位をワットといい、 W とあらわす。

問 52 質量 2.0 kg の物体を、地表付近で、 3.0 m/s の速さで持ち上げる時の仕事率を求めよ。

式 (3.42) を見ると、ぶっちゃけ言えば仕事率は「仕事を時間でわったもの」であることがわかる。この関係を逆転すると、仕事率に時間をかけたら仕事になる、ということがわかる*⁸。なので、仕事の単位として、「仕事率かける時間」という単位を使うこともできる。特によくあるのが、仕事率を W 、時間を h で表す、 $W h$ （ワット時）という単位だ。これは仕事の単位、すなわちエネルギーの単位だ。1 W の仕事率を 1 時間続けたときの仕事が、1 $W h$ だ。

問 53 1 $W h$ のエネルギーを、 J を単位として書きなおせ。

3.5 電位・電位差・電圧

小中学校理科で、よく「電圧」とか「ボルト」というのが出てきた。しかし実は、電圧の定義は、小学生や中学生が理解できるようなものではないのだ。あのときは電圧は「水路の高さ」とか「その差」とかいう喩え話で教えられたが、ここで本当の定義を君に教えよう。その前に以下の問題をやって欲しい！

問 54 原点に電荷 Q を持つ物体 1 があり、位置 x に、電荷 q を持つ物体 2 があるときの、クーロン力によ

*⁸ 正確には、仕事率を時刻で積分したものが仕事になる。

るポテンシャルエネルギー $U(x)$ は次式になることを示せ:

$$U(x) = \frac{kQq}{x} \quad (3.47)$$

ただし、無限遠を基準点とする。 k は式 (2.8) に現れる定数である。

前問のように、電気的な力 (クーロン力) によるポテンシャルエネルギーは、電荷に比例する。そこで、電気的なポテンシャルエネルギーについては、それをその場所の電荷で割った値で表現することが多い。それを 電位 と呼ぶ。つまり、電位とは「その場所の単位電荷あたりのポテンシャルエネルギー」と定義するのだ。

電位の単位は、SI 単位系では J C^{-1} である。これを V と書き、「ボルト」と呼ぶ。

空間の 2 点の間の、電位の差を 電位差 という。電位差の SI 単位は電位と同じく V である。

問 55 問 54 の続き。

- (1) 物体 1 が位置 x に作る電位を式であらわせ。
- (2) 100 年ほど前の理論 (ボーアの原子模型という) では、水素原子は、陽子から $0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ の付近に電子があると考えられていた。その付近の電位は何 V か?

空間の 2 つの点の間を仮想的に荷電粒子を移動させるとき、かかる仕事を電荷で割ったもの (単位電荷あたりの仕事) を、その 2 点間の 電圧 とか 起電力 という (定義)。電圧や起電力の SI 単位も V である。

多くの場合、電位差と電圧 (起電力) は同じだ。ただし、電位差と電圧が異なることもある。それは、電気的な力がクーロン力だけでなく、磁場の時間的変化によってもたらされる場合である。その場合は、電気的な力は保存力ではなくなる (経路によって仕事が変わる)。その詳細については、君の現在の数学力では理解できないので、本書では述べない。とりあえず、そういう場合は、電位差よりも電圧や起電力という言葉が用いられる、ということの頭の片隅に置いておこう。

問 56

- (1) 電位とは何か?
- (2) 電圧とは何か?
- (3) 電位の単位を SI 単位系で述べよ。
- (4) 2 V の電位に 0.3 C の電荷があるときのポテンシャルエネルギーを求めよ。

- (5) 1 V の電位に電子が 1 個あるときのポテンシャルエネルギーを求めよ。

問 56(5) で考えた、 1 V の電位にある電子 1 個のポテンシャルエネルギーの絶対値である $1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$ は、 1 eV と呼ばれる。eV は エレクトロン・ボルト という新たな単位であり、電子や原子や分子の様々な形のエネルギーを表現するのによく使う。特に化学でよく使う。

問 57 原子核崩壊で出る放射線に、 α 線、 β 線、 γ 線というのがある。 α 線はヘリウム原子核が飛んでくるもの、 β 線は電子が飛んでくるもの、そして γ 線は光の一種 (ただしとても波長が短い) だ。ヘリウム原子核の質量を m_{He} とし、電子の質量を m_e とする。

- (1) m_{He} を求めよ。ヒント: He の質量数は 4。つまり 1 mol の He の質量は 4 g だ。He 原子核は He 原子よりも、電子 2 個ぶん軽い、その差は無視してよい。
- (2) 放射性元素プルトニウム 239 の崩壊で発する α 線のエネルギーは、 α 粒子 1 個あたり 5.5 MeV である。このときの α 粒子の速さを求めよ。
- (3) 放射性元素セシウム 137 の崩壊で発する β 線のエネルギーは、電子 1 個あたり 510 keV である。このときの電子の速さを求めよ。なお $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ である。

ヒント: ここでいう「エネルギー」は運動エネルギーである。

3.6 電流・電力・電力量

P.12 で、電荷とは何かを学んだ。ここでは「電流」を学ぼう。導線の中などで、ある場所を多くの荷電粒子が次々と通り過ぎるとき、通り過ぎた荷電粒子の電荷の総量を、それにかかった時間でわったものを 電流 という (定義)。すなわち、単位時間あたりに通り過ぎる電荷が電流である。

定義から、電流は、 C/s (クーロン毎秒) という単位で表現できることがわかる。 C/s という単位を A (アンペア) という*9。

電気的な力によって行われる仕事の仕事率 (単位時間

*9 A は SI 基本単位のひとつなので、本来は $\text{C} = \text{A s}$ が C の定義なのだが、君は $\text{A} = \text{C/s}$ が A の定義だと思っておくほうがわかりやすいだろう。

あたりの仕事) を 電力 という (定義)。特に、電圧 V の 2 点間を電流 I が流れているときの仕事率は VI となる。なぜか? 電荷 q が電圧 V の 2 点間を移動するときの仕事は qV である (それが電圧の定義!)。それを時間 Δt で行ったなら、仕事率は $qV/\Delta t$ だ。ところが、 $q/\Delta t$ は、移動した電荷を時間で割ったものだから、それは電流 I である。従って、仕事率は VI 。

V の単位は V 、つまり J/C であり、 I の単位は A だから、 VI の単位は $J A/C$ である (ここで出てきた、斜字体の V と立体の V は、互いに意味が違うことに君は気づいているだろうか? 数学リメディアル教材で学んだように、斜字体は変数、立体は単位を表す約束だった!)。ここで、 $C=A s$ であることを思い出すと、 $J A/C$ は結局、 J/s 、つまり W (ワット) になる。うまくつじつまが合っているのではないか!

電気的な力によって行われる仕事を電力量という。電力量を時間で微分したもの (単位時間あたりの電力量) が電力である。電力を時間で積分すると電力量になる。電力量は仕事なので、その SI 単位は J (ジュール) である。しかし、一般社会では、先述の Wh (ワットアワー) という単位がよく使われる。

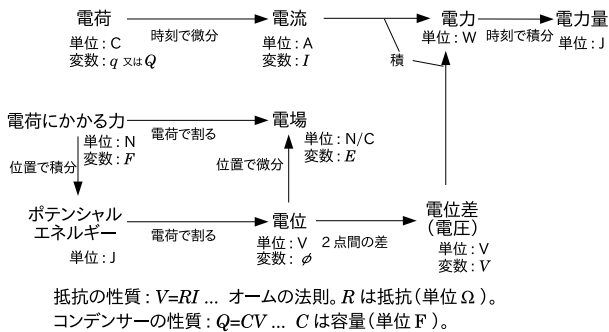


図 3.6 電気に関する概念の関係図。斜字体と立体の区別にご注意せよ。斜字体は変数を、立体は単位を表す。変数には、よく使われる記号を示すが、人によって例外もあることに注意せよ。単位の読み方は、A: アンペア, C: クーロン, F: ファラド, J: ジュール, N: ニュートン, V: ボルト, W: ワット, Ω : オーム

問 58 電流・電力・電力量を、それぞれ簡潔に説明せよ。また、それぞれの SI 単位を述べよ。

問 59 電池の容量 (電荷) を表すのに、 Ah という単位がよく使われる。ある自動車のバッテリー (8000 円くらい) は、 $36Ah$ の容量だった。

- (1) このバッテリーが流すことのできる電荷の総量を求めよ。
- (2) このバッテリーができる仕事の総量を求めよ。ただし、このバッテリーも含めて、自動車のバッテリーはほとんどが電圧 $12V$ である。
- (3) ある車はこのバッテリーを積んでいる。この車のヘッドランプは LED であり、片方が $23W$ の消費電力である。左右両方のヘッドランプをつけっぱなしにしたら、どのくらいの時間でバッテリーは空っぽになるか?

3.7 解答

答 38

- (1) 力と、その力が働く点が力と同じ向きに動いた距離との、積。
- (2) $J = N m = kg m^2 s^{-2}$ 。
- (3) 力がつりあっている系では、仮想的な微小変位に伴って外力のなす仕事の総和は 0 である。

答 39

- (1) 略 (ヒント: 直角三角形の高さを三角関数で表す)。
- (2) 物体 1 について、重力は鉛直下向きで m_1g である。その重力が働く点である物体 1 の、重力方向 (鉛直下向き) への変位^{*10}は h_1 であり、それは前問より $l_1 \sin \theta$ である。従って、重力が物体 1 にした仕事は

$$m_1gh_1 = m_1gl_1 \sin \theta \tag{3.48}$$

物体 2 については、重力は鉛直下向きで m_2g である。物体 2 の重力の方向 (鉛直下向き) への変位は $-h_2$ である (マイナスがつくのは、重力とは逆向きだから)。それは前問より $-l_2 \sin \theta$ である。従って、重力が物体 2 にした仕事は

$$-m_2gh_2 = -m_2gl_2 \sin \theta \tag{3.49}$$

- (3) 仮想仕事の原理より、前問の 2 つの仕事の和は 0 だから、

$$m_1gl_1 \sin \theta - m_2gl_2 \sin \theta = 0 \tag{3.50}$$

従って、

$$m_1l_1 = m_2l_2 \tag{3.51}$$

*10 位置の変化量のことを変位 (displacement) という。

答 40

- (1) ハンドルをまわす距離は $2\pi r$ 。ハンドルを回す力は、ハンドルの移動（回転）の方向と常に一致しており、その大きさは F 。したがって、ハンドルを 1 回転させるときに回す手がなす仕事は、 $2\pi rF$ 。
- (2) ハンドルが 1 回転するとき、上載物は Δy だけ持ち上がる。このとき、上載物にかかる重力は、下向き（上載物の移動とは逆方向）に mg の大きさでかかるから、重力のなす仕事は、 $-mg\Delta y$ となる。
- (3) ハンドルが 1 回転することを微小な変位であるとみなせば、仮想仕事の原理より、ハンドルを回す手がなす仕事と重力がなす仕事の和は 0 である。従って与式が成り立つ。
- (4) 前小問の式を $F =$ のように変形すればよい。
- (5) 前小問の式に各数値を代入して、23 N。これは約 2 kg の物体にかかる重力、つまり、2 リットル入りのペットボトルを直接持ち上げる程度の力である。ジャッキを使えば、それで 1000 kg の上載物を持ち上げることができるのだ。

答 41 仕事 が形を変えた量、もしくは仕事に形を変えることができる量。

答 42 仕事の定義式 (3.20) で $F(x) = -kx$ とすれば、

$$W = \int_{x_0}^{x_1} (-kx) dx = -\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_0^2) \quad (3.52)$$

答 43

- (1) シリンダーの内部は、底面積 A 、高さ h の筒形の空間である。従ってその体積は $V = Ah$ 。
- (2) 気体は圧力 P でピストンを押し上げようとする。一般に、一定の圧力がかかる面には、圧力かける面積という大きさの力がかかる。従って、この場合は気体はピストンを PA という力で押し上げようとする。いま、座標軸を鉛直上向きにとっているのだから、上向きが正。従って、 $F_1 = PA$ 。
- (3) ピストンは静止しているのだから、ピストンにかかる力はつりあっていなければならない。従って F_1 を打ち消す力が外から働いているはずである。従って外力は $F_2 = -F_1 = -PA$ 。
- (4) ピストンの移動がゆっくり（つまりほとんど静止しているということ）なので、力のつりあいは維持されると考えてよい。外力がなす仕事 dW は、力 F_2

と変位 dh の積である。従って、

$$dW = F_2 dh = -PA dh \quad (3.53)$$

- (5) 変化前の気体の体積は $V = Ah$ 、変化後の気体の体積は $V + dV = A(h + dh)$ である。これらの式より、 $dV = A dh$ を得る。
- (6) 略。
- (7) 略。（式 (3.30) を積分すればよい。）
- (8) 状態方程式より、 $P = nRT/V$ 。これを前小問の結果に代入すれば与式を得る。
- (9) 温度一定なので、前小問の式より、

$$\begin{aligned} W &= -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT \left[\ln |V| \right]_{V_1}^{V_2} \\ &= -nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} \end{aligned} \quad (3.54)$$

注：体積 V_1, V_2 はいずれも正なので、対数の中の絶対値記号は結局は不要になる。

- (10) $n = 1 \text{ mol}$, $R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $T = 273 \text{ K}$, $V_1/V_2 = 2$, $\ln 2 = \log_e 2 \doteq 0.693$ を前小問に代入し、 $W = 1570 \text{ J}$ 。（有効数字 3 桁）

答 44 ある基準点から任意の点 x まで物体を運ぶときの仕事を $W(x)$ とするとき、 $U(x) = -W(x)$ で定義される関数 $U(x)$ をポテンシャルエネルギーという。

答 45 式 (3.25) で、 $x_0 = 0$, $x_1 = x$ とおきなおせば、

$$U(x) = -W(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.55)$$

グラフは図 3.7 のようになる。

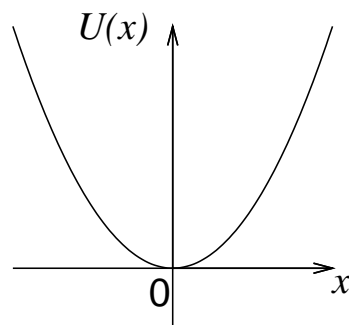


図 3.7 バネのポテンシャルエネルギー

答 46 式 (3.24) で、 $R_0 = \infty$, $R_1 = R$ とおきなおせば、

$$U(R) = -W(R) = -\frac{GMm}{R} \quad (3.56)$$

グラフは図 3.8 のようになる。

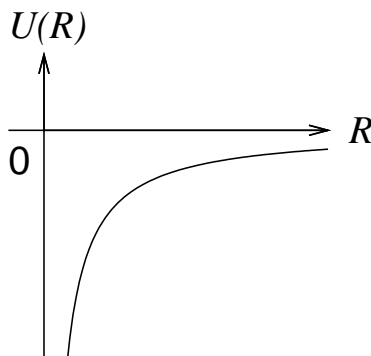


図 3.8 万有引力のポテンシャルエネルギー

答 47

- (1) 式 (3.37) において, $m = 2 \text{ kg}$, $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, $h = 10 \text{ m}$ とすれば, $U = 196 \text{ J} \approx 200 \text{ J}$
 (2) 問 31(3) より, バネ定数 k は, $k = 6.2 \times 10^4 \text{ kg s}^{-2}$.
 また, $x = 0.001 \text{ m}$ として, これらを式 (3.40) に代入すれば, $U = 0.031 \text{ J}$.
 (3) 地球の質量を M , 月の質量を m , 地球と月の距離を x とすれば,

$$\begin{aligned} G &= 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \\ M &= 6.0 \times 10^{24} \text{ kg} \\ m &= 7.3 \times 10^{22} \text{ kg} \\ x &= 4.0 \times 10^8 \text{ m} \end{aligned}$$

これらを式 (3.41) に代入して, $U = -7.3 \times 10^{28} \text{ J}$.
 (ただし無限遠を基準点とする。)

答 48 物体にかかる重力を, 斜面に垂直な方向と, 斜面に平行な方向に分解して考える。前者は斜面から受ける垂直抗力と釣り合って打ち消しあう。後者は

$$mg \sin \theta \quad (3.57)$$

となる (θ は傾斜角)。誰かがこれと等しい大きさの力を斜面に平行で上向きにかけると物体が斜距離 L だけ移動する。そのとき「誰か」が行った仕事は,

$$mgL \sin \theta \quad (3.58)$$

となる。これはポテンシャルエネルギーの変化にも等しい。

答 49 保存力とは, 物体をある位置から別の位置に運ぶときにその力がなす仕事, 移動の経路によらずに一定である, というような力である。

答 50

- (1) 物体を位置 x_0 から位置 x_1 に運んで位置 x_0 に戻す, という移動も, 物体を位置 x_0 に置いたまま動かさない, というのも, とともに, 「物体を位置 x_0 から位置 x_0 に移動する」経路である。前者の仕事は $W_{01} + W_{10}$ であり, 後者の仕事は 0 である (移動距離が無いから)。従って, もし力が保存力なら, $W_{01} + W_{10} = 0$ である。
 (2) 動摩擦力の大きさを F_m とし, x_0 と x_1 の間の距離を X とすると, $W_{01} = -F_m X$ である。ここでマイナスがつくのは, 力の向きが移動方向と逆だからである。同様に, $W_{10} = -F_m X$ である。従って, $W_{01} + W_{10} = -2F_m X$ となり, 前小問の式は成り立たない。従って摩擦力は保存力でない (背理法)。

答 51 問 48 とほぼ同様だが, この場合, 物体には, 斜面平行・下向きに, $\mu' mg \cos \theta$ という摩擦力もかかる。そのぶん「誰か」はがんばらねばならない。結果的に, 「誰か」が斜面に平行で上向きにかける力は,

$$mg \sin \theta + \mu' mg \cos \theta \quad (3.59)$$

となる。物体は斜距離 L だけ移動するので, 「誰か」が行った仕事は,

$$mgL \sin \theta + \mu' mgL \cos \theta \quad (3.60)$$

となる。ところが, 摩擦力は保存力ではないので, ポテンシャルエネルギーの増減には関与しない。従って, ポテンシャルエネルギーの増加は, $mgL \sin \theta$ 。

答 52 式 (3.46) に, $m = 2.0 \text{ kg}$, $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, $v = 3.0 \text{ m s}^{-1}$ を代入すると, 有効数字 2 桁で $P = 59 \text{ W}$ 。

答 53 $1 \text{ W h} = 1 \text{ J s}^{-1} \times 3600 \text{ s} = 3600 \text{ J}$

答 54 原点に電荷 Q を固定し, x 軸上に電荷 q を動かす。位置 x に電荷 q があるとき ($0 < x$ とする), それに働く力 F は, 式 (2.8) より,

$$F = \frac{k Q q}{x^2} \quad (3.61)$$

である。無限遠から位置 x まで電荷 q を動かすときに, この力がなす仕事は,

$$W = \int_{\infty}^x F dx = \int_{\infty}^x \frac{k Q q}{x^2} dx = \left[-\frac{k Q q}{x} \right]_{\infty}^x = -\frac{k Q q}{x} \quad (3.62)$$

となる。式 (3.36) より、

$$U(x) = -W = \frac{kQq}{x} \quad (3.63)$$

となる (証明終わり)。

注: 式 (3.62) で、積分変数 x (つまり dx の x) と、積分区間の上端の x (つまり \int_{∞}^x の x) が「かぶっている」が、これは別物と解釈する。すなわち積分変数 x は、ほんとうは X とか s とか、何か適当に x 以外の記号で置くのが数学的には正しいところだが、それはめんどくさいしわかりにくくなるので、横着して x のままにしておくのだ。このような書き方は物理学でよく出てくる。

答 55

(1) 式 (3.47) を位置 x における電荷 q で割ればよい。

$$\frac{U(x)}{q} = \frac{kQ}{x} \quad (3.64)$$

(2) $x = 0.529 \times 10^{-10}$ m とする。陽子の電荷は電荷素量なので $Q = 1.602 \times 10^{-19}$ C。また、式 (2.8) より、 $k = 8.987 \times 10^9$ N m² C⁻²。これらを式 (3.64) に代入すると、27.2 V。

答 56

- (1) 単位電荷あたりのポテンシャルエネルギー
- (2) 空間の 2 つの点の間を仮想的に荷電粒子を移動させるとき、かかる仕事を電荷で割ったもの。多くの場合、2 点間の電位の差 (電位差)。
- (3) J C⁻¹, 言い換えると, V。
- (4) 0.6 J
- (5) 電子の電荷は -1.602×10^{-19} C なので、それが 1 V の電位にあると、 -1.602×10^{-19} J。

答 57

- (1) $m_{\text{He}} = 4 \text{ g} / (6.0 \times 10^{23}) = \dots = 6.7 \times 10^{-27}$ kg。
- (2) α 線のエネルギーを E , 速さを v とすると、 $\frac{1}{2}m_{\text{He}}v^2 = E$ 。従って、 $v = \sqrt{2E/m_{\text{He}}} = \dots = 1.6 \times 10^7$ m s⁻¹。
- (3) β 線のエネルギーを E , 速さを v とすると、上と同様に、従って、 $v = \sqrt{2E/m_e} = \dots = 4.2 \times 10^8$ m s⁻¹。

注: eV を J に直して計算しないと、正しい答にはならない。単位を埋め込んで計算すれば、それに気がつくはず!

答 58 略。

答 59

- (1) $36 \text{ A h} = 36 \text{ (C/s)} \times 3600 \text{ s} = 130000 \text{ C}$ 。
- (2) $12 \text{ V} \times 36 \text{ A h} = 12 \times 36 \times 3600 \text{ V A s} = 1.6 \times 10^6 \text{ J}$ 。
- (3) 左右両方で 46 W。12 V の電圧では、 $46 \text{ W} / (12 \text{ V}) = 3.8 \text{ A}$ の電流が流れる。 $36 \text{ A h} / (3.8 \text{ A}) = 9.4 \text{ h}$ 。およそ 9 時間で空になる。これが LED でなく、普通の八口ゲンランプなら、もっと短い時間 (数時間) で空になってしまう。

よくある質問 31 本当なのかなーって疑いたくなる値が答えだったり、物理ってなんなんだー... 皆さんの既成概念を壊すために、そういうのを狙って問題を作ってます。

よくある質問 32 代入する値がほしいです。... そのうち、文字 (変数) だけの答えにも慣れますよ。そっちのほうが、いろんな量どうしの関係がわかりやすい。

よくある質問 33 「示せ」という問題は文も必要ですか? 言葉での説明が苦手です。... 言葉の定義をしっかりと把握してください。その上で、まずは自分自身で納得できる説明を探すことが重要。

よくある質問 34 なんとなくわかるけど、問題解くときにわけわからなくなります。... だから問題演習は大事。しっかり考えて、わからなければ解答を読んで、また考えて下さい。

第4章

運動の三法則

注: この章を理解するには、数学リメディアル教材で「微分」「ベクトル」「微分方程式」を理解していることが必要である。

4.1 位置・速度・加速度

これから我々は物体の運動に関する物理学を学ぶ。「物体の運動」とは、物体の位置や向きや形状が時刻とともに変化する様子である。とは言うものの、我々は物体を質点としてモデル化するので、物体の向きや形状はとりあえず考えない(あとで考える)。従って、質点の位置を時刻の関数としてあらわすことが、「物体の運動に関する物理学」の当面の目標だ。それには、ベクトル、微分、積分という3つの数学を駆使する。まずその準備をしよう。

質点の位置は、3次元空間の中の座標 (x, y, z) の3つの数値の組み合わせで表すことができる。原点からこの位置に至るベクトルを「位置ベクトル」というので、質点の位置は位置ベクトルで表すことができる、とも言える。

位置を時刻で微分したものを速度という(定義)。また、速度を時刻で微分したものを加速度という(定義)。これらを数式で表現してみよう:

時刻を t とし、質点の位置を

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (4.1)$$

とし、質点の速度を

$$\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \quad (4.2)$$

とし、質点の加速度を

$$\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) \quad (4.3)$$

とすると、速度と加速度の定義は、それぞれ

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) \quad (4.5)$$

となる。式(4.4)を各成分にわけて書き改めると、以下のようになる:

$$v_x(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad (4.6)$$

$$v_y(t) = \frac{d}{dt} y(t) \quad (4.7)$$

$$v_z(t) = \frac{d}{dt} z(t) \quad (4.8)$$

また、式(4.5)を各成分にわけて書き改めると、以下のようになる:

$$a_x(t) = \frac{d}{dt} v_x(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) \quad (4.9)$$

$$a_y(t) = \frac{d}{dt} v_y(t) = \frac{d^2}{dt^2} y(t) \quad (4.10)$$

$$a_z(t) = \frac{d}{dt} v_z(t) = \frac{d^2}{dt^2} z(t) \quad (4.11)$$

以下では、これらの式の (t) を省略することが多い。

さて、数学リメディアル教材の「積分の応用」の章で学んだように、任意の関数 $f(t)$ について、

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(t) dt \quad (4.12)$$

が成り立つ(積分区間の上端の t と積分変数の t が「かぶっている」ことについては答54の解説を参照しよう)。この式を $x(t)$ と $v(t)$ のそれぞれについて考えると、

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t) dt \quad (4.13)$$

$$v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x(t) dt \quad (4.14)$$

が成り立つ。同様の式が y 成分と z 成分についても成り立つので、まとめて以下の式が成り立つ:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt \quad (4.15)$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{a}(t) dt \quad (4.16)$$

これらの式を駆使して、いくつかの典型的な運動を表してみよう。

4.2 等速直線運動

まず最もシンプルな運動を考えよう。

速度 \mathbf{v} が (向きも含めて) 一定であるような運動*1を「等速直線運動」という (定義)。この場合、 v_x は t によらない定数である。この場合は式 (4.13) の積分は簡単にできて、

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v_x dt \\ &= x(0) + [v_x t]_0^t \\ &= x(0) + v_x t \end{aligned} \quad (4.17)$$

となる。同様のことが y 成分、 z 成分でも言えるので、

$$x(t) = x(0) + v_x t \quad (4.18)$$

$$y(t) = y(0) + v_y t \quad (4.19)$$

$$z(t) = z(0) + v_z t \quad (4.20)$$

となる。これらをまとめて、

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}t \quad (4.21)$$

と書くこともできる。この式から、 \mathbf{r} が、点 $\mathbf{r}(0)$ を通り、方向ベクトルが \mathbf{v} であるような直線を描くことがわかる。すなわち、等速直線運動は、確かに「直線」の上を運動する。

ここで、速度が $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ で一定の状況を考えよう。その場合も「速度一定」なのだから等速直線運動なのだが、実際は質点は静止している。つまり、「静止状態」は「等速直線運動」の一例なのだ。

4.3 等加速度直線運動

次にシンプルなのは、速度は変わるが加速度は一定、という運動である。そのような運動を「等加速度直線運動」という (定義)。

この場合、 a_x は t によらない定数である。式 (4.14) の積分は簡単にできて、

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_x(0) + \int_0^t a_x dt = v_x(0) + [a_x t]_0^t \\ &= v_x(0) + a_x t \end{aligned} \quad (4.22)$$

*1 ここではあえて教育的に「向きも含めて」と書いたが、そもそも速度は、大きさと向きを持つベクトルなので、「速度が一定である」と言えば、向きも含めて一定であることを自動的に意味する。

となる。これを式 (4.13) に代入すると、

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v_x(t) dt \\ &= x(0) + \int_0^t (v_x(0) + a_x t) dt \\ &= x(0) + \left[v_x(0)t + \frac{1}{2}a_x t^2 \right]_0^t \\ &= x(0) + v_x(0)t + \frac{1}{2}a_x t^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

となる。すなわち、加速度一定の運動は、時刻の2次関数で表されるのだ。この具体例を、後ほど学ぶ。さて上の式と同様のことが y 成分、 z 成分でも言えるので、まとめて、

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}t \quad (4.24)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \quad (4.25)$$

と書くこともできる。ではもっと複雑な運動は？ それは加速度が時間とともに変わるような運動である。それを理解するには、次の話が欠かせない。

4.4 運動の三法則

前々章で、力に関する法則について述べた。ではそもそも力とは何なのだろうか？ 力は自然界に何をもちこたすのだろうか？ 端的に言えば、力は、物体の運動に変化をもたらし得るものだ。それを支配するのが以下の、ニュートンの「運動の三法則」だ。これらは必ず記憶しなければならない。

運動の三法則

- 第一法則：質点に働く合力が0のとき、質点は等速直線運動をする。(慣性の法則)
- 第二法則：質量 m の質点に合力 \mathbf{F} がかかると、質点は次式に従って運動する(運動方程式)：

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (4.26)$$

ここで、 \mathbf{a} は質点の加速度である。

- 第三法則：2つの質点 A, B において、A が B に力を及ぼすとき、A は B から、同じ大きさで逆向きの力を及ぼされる。(作用・反作用の法則)

この「運動の三法則」も、物理学における基本法則 (根源的な原理) であり、なぜ成り立つのかは、誰も知らない。しかし、運動の三法則は、歴史的にも理論体系としても、科学の根幹である。運動の三法則が発見されたと

き、人類は科学の扉を大きく開いたのだ。これは知識人の教養である。

第2章では、「物体が静止している場合、その物体に働く力(合力)はゼロである」と学んだ。注意して欲しいのは、その逆は必ずしも成り立たない、ということだ。すなわち、「物体に働く力がゼロなら物体は静止する」は成り立たないことがある。例えば、宇宙空間を飛んでいる隕石は、何かに引かれたり押されたりして飛んでいるわけではなく、それにかかる力が0でありながら、そのまま飛び続ける。そのように、「働く力がゼロ」でも物体が運動するケースがあるのだ。それを包含するのが、この第一法則(慣性の法則)だ。第一法則によれば、「働く力がゼロ」のときに実現するのは「等速直線運動」だ。前節で述べたように、静止状態は等速直線運動の一例に過ぎない(速度0での等速直線運動)。

問60 「物体が静止している」を条件A, 「物体が等速直線運動をしている」を条件B, 「その物体に働く力(合力)はゼロである」を条件Cとする。

- (1) AはCの必要条件? 十分条件? 必要十分条件? いずれでもない?
- (2) BはCの必要条件? 十分条件? 必要十分条件? いずれでもない?
- (3) BはAの必要条件? 十分条件? 必要十分条件? いずれでもない?

ヒント: 必要条件や十分条件がわからない人は、数学リメディアル教材の「論理・集合・記号」の章を見よう!

第一法則は中学校で習うが、これを正確に理解するのは簡単ではない。特に、

「力がかからなくても物体は動く」…… (*)

と言うと、多くの人が驚いた顔をする。これは多分に言葉の解釈の問題である。というのも、「動く」には、

- 「(止まっていたものが) 動き始める」
- 「動いている状態にいる」

という2つの解釈がある。前者の意味に解釈すると、確かに(*)はおかしい、間違った命題だ。止まっている物体が動き始めるには、力が必要だ。第一法則が言っているのは、後者の意味だ。既に運動状態にある物体は、さらに押したり引いたりしてあげなくても、放つとしてもその運動状態(それは等速直線運動)を続けるのだ。

ここで注意。例えば一定の速さで円運動するような

ケースは、速度の大きさ(つまり速さ)は一定でも速度の方向が時々刻々と変化するので、「一定の速度」ではない。従って等速直線運動ではなく、従って第一法則の適用対象ではない。実際、円運動をする物体には、必ず力がかかっている。

問61 エスカレーターで「手すりにおつかまり下さい」と言われるのはなぜか? 慣性の法則の観点で説明せよ。ヒント: 手すりを持たないと、上りよりも下りの方が危ない。

さて、等速直線運動以外の運動も扱うのが次の第二法則だ。第二法則(運動方程式)は、君が1学期の物理学で学べき最も重要な法則だ。君はその威力を、これから少しずつ実感するだろう。

式(4.26)で \mathbf{F} と \mathbf{a} はベクトルである。つまり大きさと方向を持つ。成分で書いて、

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) \quad (4.27)$$

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad (4.28)$$

とすれば、方程式(4.26)は、

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z \quad (4.29)$$

という3つの方程式と同じことだ。

式(4.26)は、左辺と右辺を入れ替えて次式のように表されることもあるが、正直、どちらでもよい:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (4.30)$$

よくある質問35 高校の先生は、 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ではなく $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ だ、と言っていました。。。... そういう人はいます。曰く、物理学では等号の左辺と右辺で意味は違うのだ、とのこと。でもそのような約束はその人が自分の世界観や物理観をもとに勝手に作ったものに過ぎません。数学では等号は左右を入れ替えても成り立つと約束されているし(等号の公理)、物理学の法則は数学で記述されるのだから、 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ と $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ は厳密に同じであり、どちらも正しいです。

方程式(4.26)は、式(4.5)を使って、以下のように表されることも多い:

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (4.32)$$

式(4.26)から、力は質量(SI単位はkg)と加速度(SI単位は m s^{-2})の積と同じ単位を持たねばならぬ。だから、力のSI単位が kg m s^{-2} になるのであり、この単

位を N (ニュートン) と呼ぶのだ (このことは数学リメディアル教材でも述べた)。

さて、式 (4.31)(4.32) を見ると、運動方程式は、位置や速度に関する、微分方程式 (関数の微分を含む方程式) だとわかる。一般に、微分方程式は、未知の関数の方程式であり、それを「解く」ことによって未知だった関数が具体的に求まる。今の場合は、力 F と初期値 (ある時刻における位置と速度) が具体的にわかっていれば、運動方程式を「解く」ことによって、速度 $v(t)$ や位置 $r(t)$ という、時刻 t に関する関数 (ベクトル値関数) が、全ての時刻 t において具体的に求まる。つまり、質点の運動の全てが数学的に決まってしまう。つまり、運動方程式は、あらゆる質点の運動を予測する能力を秘めているのだ^{*2}。

ところで、式 (4.26) で $F = 0$ と置いてみよう。すると、 $0 = ma$ となる。質量 m が 0 でなければ、結局、 $a = 0$ だ。 a は速度の微分なので、それが 0 ということは、速度が (向きも含めて) 時間によらず一定だ、ということだ。つまり、働く力がゼロなら質点は等速直線運動をする、ということだ。これは第一法則 (慣性の法則) と整合する。つまり、質点に力がかかる場合とかけられない場合のどちらの場合も、第二法則で表現することができるわけだ。ということは、1章で学んだ「オッカムの剃刀」に従って、第一法則は削ってしまうべきではないだろうか? (運動の「二」法則の方が、「三」法則よりシンプルだ!) いや、それでもなお、第一法則は削ってはならないのだ。このあたりは、いずれ「慣性系」という概念を学ぶときに詳述する^{*3}。

また、第三法則 (作用・反作用の法則) は、既に述べた。運動の三法則や万有引力の法則は、ニュートンが発見した。これらの法則から導かれる物理学 (力学) を、ニュートン力学という。

以上で、力学の根源的な法則は終わりだ。あとは、これらの法則から導出される派生的な法則である。

問 62 運動の三法則を 3 回書いて記憶せよ。(それぞれの名前だけでなく内容を! F と a は太字であることに注意!)

ところで、唐突だが、ここで 運動量 というものを以下のように定義する:

^{*2} そのため、運動方程式は人類に運命論的な世界観を突きつけることになった。

^{*3} 藤原邦男「物理学序論としての力学」東大出版, p. 36-37 参照。

運動量の定義

m を質点の質量, v を質点の速度とすると,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (4.33)$$

を質点の運動量と呼ぶ。

すると、 m を定数とみなせば、運動方程式 (4.26) は、

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (4.34)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (4.35)$$

などともあらわされる。これらはもちろん、全て互いに同じ方程式である^{*4}。運動量という概念は、後に大変重要な働きをする。

問 63 運動量の定義を 5 回書いて記憶せよ。(p と v は太字であることに注意!)

よくある質問 36 運動量の定義について。「 p を運動量, m を質量, v を速度とする。 $p = mv$ が成り立つ」と書いたら、なんかダメっぽいことを言われました。なんで? ... これは、「成り立つ」がダメなのです。そこを「とする」とか「と定義する」と書けば OK でした。

「成り立つ」は「そうなる」ということです。ところが、ここでは定義を聞いています。 $p = mv$ は「そうなる」のではなく、「そうする」「そう決める」「そう約束する」「そう定義する」ものなのです。運動量 p の意味や正体が、この式によって初めて定まるのです。

こういうところで「成り立つ」を使ってしまうと、あたかも運動量 p が別のところで別の意味として定義され、そしてそれが、何かの理論や奇跡によって、 mv と等しいことが確かめられた! みたいに受け取られます。

言葉尻を捉えているように思うかもしれませんが、これは大事なことです。科学を体系的に理解する時、定義 (約束)、基本法則 (理由なく認めざるを得ない自然現象のルール)、定理 (定義や基本法則から理論的に導かれるもの) を、はっきりと区別しなければなりません。その際、まず重要なのは、それが「成り立つ」ようなもの (だとしたら基本法則か定理) なのか、それとも「そう約束する」ようなものなのか (だとしたら定義) です。

では、以下、具体的な運動について運動方程式を解いてみよう。なお、この章で出てくる問はすべて一直線上の運動なので、力や位置や速度や加速度の向きは正と負

^{*4} ただし、 m が一定でないような場合 (光速に近い高速運動など) は、 $F = ma$ は成り立たなくても $F = dp/dt$ は成り立つ。従って、 $F = ma$ より $F = dp/dt$ のほうが、より一般性の高い記述である。

だけを考えればよい(あえて3成分のベクトルとして考える必要はない)。次章以降ではベクトルとして考える必要が出てくる。

4.5 自由落下

重力に任せて落ちていく運動を自由落下という。

問 64 地表付近で重力だけを受けて上下運動をする, 質量 m の質点の運動を考える。重力加速度を g , 時刻を t とする。地表から鉛直上向きに x 軸をとる。時刻 t における質点の位置, 速度, 加速度を, それぞれ $x(t), v(t), a(t)$ とする。初期条件は

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0 \quad (4.36)$$

とする。空気抵抗は考えない。

- (1) この質点に関する運動方程式は,

$$-mg = ma \quad (4.37)$$

となることを示せ。

- (2) 式 (4.37) より, 鉛直方向の加速度は, $-g$ という一定値をとる。従って, この運動は, 等加速度直線運動である。次式を示せ:

$$v(t) = v_0 - gt \quad (4.38)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2 \quad (4.39)$$

ヒント: 式 (4.22), 式 (4.23)

- (3) 特に, 初期位置 0, かつ初速度 0 の場合,

$$v(t) = -gt \quad (4.40)$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (4.41)$$

となることを示せ。

この結果は, 質点の質量 m に無関係であることに注意せよ。つまり, 重力による力を受けて行う運動は, 質点の質量には依存しない。

問 65 地表付近で, 初速度 0 で質点を投下し, 自由落下させる。空気抵抗は働かないとする。地面と質点の間には十分な空間があって, いま考える範囲では質点は地面には激突しないとする。

- (1) 投下の 10 秒後には, 質点はどれだけの距離を落ち, どのくらいの速度になっているか?
 (2) 投下後, 何秒たったら質点の速度は音速 (1 気圧, 常

温で約 340 m s^{-1}) を超えるか? そのとき, 質点は初期位置からどのくらいの距離を落下しているか? (実際はそうなる前に空気抵抗がだいぶ働くが)

問 66 野球投手が初速度

$$v_0 = 40 \text{ m s}^{-1} \quad (4.42)$$

(約 140 km h^{-1} に相当) でボールを真上に投げ上げる。鉛直上向きに x 軸をとる, ボールの初期位置を $x = 0$ とする。ボールの運動を, 横軸 t , 縦軸 $x(t)$ のグラフに描け。ボールは最大でどのくらいの高さまで届くか? ヒント: $x_0 = 0 \text{ m}$, $v_0 = 40 \text{ m s}^{-1}$ として, 式 (4.39) を考え, この $x(t)$ の最大値を求める。 t に関する二次関数とみなして平方完成すればよい。

問 67 カーリングというスポーツでは, 目標地点にうまく停止するように氷の上で石 (ストーン) を滑らせる。いま, 君は氷の上で, 質量 m のストーンを初速度 v_0 で滑らせて手放そうとしている。ストーンを手放す位置を原点とし, ストーンの進行方向に x 軸をとる。時刻を t とし, ストーンを手放す時点を $t = 0$ とする。ストーンは質点とみなしてよい。

- (1) ストーンと氷面の間に働く動摩擦力の大きさを F_m とし, ストーンの位置 $x(t)$ に関する運動方程式を立てよ。
 (2) その運動方程式を解いて, 関数 $x(t)$ を求め, グラフにかけ。動摩擦力は位置や速度によらず一定とする。注: 速度が 0 になった時点でストーンは停止する。
 (3) $v_0 = 1.5 \text{ m s}^{-1}$ のとき, ストーンは 20 m 進んで停止した。ストーンは 20 kg であった。 F_m の大きさを求めよ。
 (4) このときの動摩擦係数の値を求めよ。
 (5) 次に, ストーンを $x = 25 \text{ m}$ の位置で停止させたいと思う。そのためには v_0 をどのくらいにすればよいか?
 (6) 同じ氷上で質量 30 kg のストーン (ただし 20 kg のストーンと同じ底面材質のもの) を同様に $x = 25 \text{ m}$ の位置で停止させるには, v_0 をどのくらいにすればよいか?

4.6 空気抵抗

問 68 質量 m の物体 (質点とみなす) が, 速度 v_0 で x 軸上を正の向きに等速直線運動している。しかし突然, この物体にとりつけられたパラシュートが開き, 物体は空気から受ける力 (空気抵抗) のために減速をはじめた。その力を $-\alpha v$ とする。 α は適当な定数である。パラシュートが開いた位置を原点 ($x = 0$) とする。時刻を t とし, パラシュートが開いた時点 $t = 0$ とする (図 4.1)。

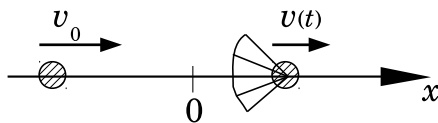


図 4.1 等速直線運動している物体に突然空気抵抗がかかる。

- (1) $t < 0$ では, 次式が成り立つことを示せ:

$$0 = m \frac{dv}{dt} \quad (4.43)$$

- (2) $0 < t$ では, 次式が成り立つことを示せ:

$$-\alpha v = m \frac{dv}{dt} \quad (4.44)$$

- (3) 上の式は, 関数 $v(t)$ に関する微分方程式だ。数学リメディアル教材を参考にして, この微分方程式を解け。結果は次式のようになるはずである:

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \quad (4.45)$$

- (4) 関数 $v(t)$ のグラフを描け。

このように, 空気や水などの流体^{*5}の中で物体が速度に比例して受ける抵抗を 粘性抵抗 という。しかしながら, 物体が大きかったり速度が速いとき, 速度の 2 乗に比例する抵抗をより強く受ける。それを 慣性抵抗 という^{*6}。

問 69 粘性抵抗とは何か? 慣性抵抗とは何か?

問 70 問 68 において, パラシュートによる空気抵抗が粘性抵抗でなく慣性抵抗ならどうなるだろう? いま, 空気抵抗が $-\beta v^2$ であるとする (β は適当な定数)。

- (1) パラシュートが開いてから物体が停止するまでの間, 次式が成り立つことを示せ:

$$-\beta v^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (4.46)$$

- (2) 上の微分方程式を変数分離すると, 次式のようになることを示せ:

$$\beta dt = -\frac{m dv}{v^2} \quad (4.47)$$

- (3) これを不定積分すると, 次式のようになることを示せ (C は積分定数):

$$\beta t = \frac{m}{v} + C \quad (4.48)$$

- (4) 以下の式が成り立つことを示せ。

$$C = -\frac{m}{v_0} \quad (4.49)$$

- (5) 以下の式が成り立つことを示せ。

$$v(t) = \frac{mv_0}{v_0 \beta t + m} \quad (4.50)$$

- (6) 関数 $v(t)$ のグラフを描け:

よくある質問 37 問 68 で, なぜ最初は力 0 なのですか? 力がないと進まないのでは? ... 物体は, 力がなくても動き続けるのです。等速直線運動をするのです。それが慣性の法則です。「力がないと物体は進まない」というのは間違いです。思い込みです。止まっている物体を動き出させるためには, 確かに最初に力をかけてやる必要がありますが, いったん動き出せば, 力をかけなくても物体は勝手に動き続けるのです。

よくある質問 38 物体が力を受けなくても等速で動くのなら止まっている物体は力を受けて止まっているのですか? ... いいえ。「止まっている」も「等速で動く」ことの一つで, 働く力は 0 です。

問 71 雨粒の落下を考えよう。雨粒は重力を受けて加速しながら落下するが, 同時に空気抵抗も受けるので, 際限なく加速することはあり得ない。また, 雨粒が十分小さければ, 空気抵抗は粘性抵抗とみなすことができる。いま, 鉛直上向きに座標軸をとる。質量 m の雨粒が鉛直方向に直線的に落下するとし, 時刻 t における雨粒の落下速度を $v(t)$ とする。 $v(0) = 0$ とする。雨粒にかかる空気抵抗 (粘性抵抗) を $-\alpha v$ とする (α は適当な正の定数)。注: 落下は下向きだから v は負であり, 空気抵

*5 気体と液体をまとめて流体と呼ぶ。

*6 このあたりの法則は, 流体力学という物理学で説明されるが, 流体力学のほとんどはニュートン力学を基本法則とする。

抗 $-\alpha v$ は v にマイナスがかかっているから正、つまり上向きである。

- (1) 雨粒に関する運動方程式は以下のようになることを示せ：

$$-mg - \alpha v = m \frac{dv}{dt} \quad (4.51)$$

- (2) これを変数分離すると次式になることを示せ：

$$\frac{dv}{g + \alpha v/m} = -dt \quad (4.52)$$

- (3) これを両辺を積分すると次式になることを示せ (C は積分定数)：

$$\frac{m}{\alpha} \ln \left| v + \frac{gm}{\alpha} \right| = -t + C \quad (4.53)$$

- (4) これを v について解き、特に $v(0) = 0$ に注意して、次式を示せ：

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} \left\{ \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) - 1 \right\} \quad (4.54)$$

- (5) $v(t)$ のグラフを描け。
 (6) 時間が十分にたつて速度が一定になったときの速度を終端速度という。この場合、終端速度は

$$v = -\frac{mg}{\alpha} \quad (4.55)$$

となることを示せ。

雨が降る時、雨粒は地表面に衝撃を与える。地表を植生が覆っていれば、葉やリター(落ち葉等)で雨滴衝撃を吸収してくれるが、地表に植生が無い場合は、雨滴衝撃で土壌侵食を起こすことがある。これは農地や、間伐が不十分なスギ・ヒノキ人工林などで問題になっている。

粘性抵抗を受ける落下の問題は、微粒子(穀物の粉とか、大気汚染源の粉塵など)の運動を議論する上で基礎的なものだ。また、微粒子の大きさを計測する上でもこの理論がよく利用される。

4.7 運動の三法則と哲学

本章の最後に、ちょっと哲学っぽいことを考えよう。運動の三法則は、物体の運動を正確に予測することができる、ということの世界に示した。それは、未来を占うのにオカルト的な力が必要だと信じていた人に、ちょっとしたショックを与えただろう。そこで生まれたのが「ラプラスの悪魔」という概念である。

問 72 「ラプラスの悪魔」とは何か? それは近代の宗教や思想にどのような影響を与えただろうか? それは物理学的にはどのように反駁(はんぱく)されたか?

4.8 解答

答 60

- (1) AはCの十分条件。必要条件ではない。静止していれば合力はゼロだが、合力がゼロであっても静止していない場合(0以外の速度での等速直線運動)があり得る。

- (2) BはCの必要十分条件。

- (3) BはAの必要条件。十分条件ではない。静止は等速直線運動の一種(速度0での等速直線運動)。

答 61 略。ヒント: エスカレーターが突然停止したらどうなるか?

答 62 略。

答 63 質量(m)と速度(v)の積 mv 。

答 64

- (1) 式(2.5)より、質点には鉛直下向きに大きさ mg の重力がかかる。座標系は鉛直上向きを正にとっているので、この重力 F は

$$F = -mg \quad (4.56)$$

と書ける*7。重力以外の力は働いていない。従って運動方程式より、

$$-mg = ma \quad (4.57)$$

- (2) 式(4.22)、式(4.23)で、 a_x を $-g$ 、 v_x を v とすれば、与式を得る。

- (3) $x_0 = 0$ 、 $v_0 = 0$ とすればよい。

答 65 初期位置を原点とし、鉛直上向きに x 軸をとる。時刻 t における位置と速度をそれぞれ $x(t)$ 、 $v(t)$ とする。

- (1) 式(4.40)、式(4.41)で $t = 10$ sとすれば、 $v = -98$ m s⁻¹、 $x = -490$ m。従って落下距離は490 m。

- (2) 加速度が $-g$ の等加速度直線運動なので、 $v(t) = -gt$ 。従って $t = -v(t)/g$ 。いま、 $v(t) =$

*7 式(2.5)は力の向きは考えず力の大きさだけを考えていたことに注意せよ。

-340 m s^{-1} なので, $t = 340 \text{ m s}^{-1}/(9.8 \text{ m s}^{-2}) = 35 \text{ s}$ 。従って約 35 秒後。式 (4.41) で $t = 35 \text{ s}$ とすれば, $x = -6000 \text{ m}$ 。従って, 約 6000 m 落下する。

答 66

式 (4.39) で, $x_0 = 0$ とすれば,

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = -\frac{1}{2} g \left(t^2 - \frac{2v_0}{g} t \right) \quad (4.58)$$

$$= -\frac{1}{2} g \left(t - \frac{v_0}{g} \right)^2 + \frac{v_0^2}{2g} \quad (4.59)$$

従って, $t = v_0/g$ のとき, 最高高度 $v_0^2/(2g)$ に到達する。ここで $v_0 = 40 \text{ m s}^{-1}$ とすると, 最高高度は,

$$\frac{(40 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \times 9.8 \text{ m s}^{-2}} = 82 \text{ m} \quad (4.60)$$

すなわち, 約 80 m の高さまで届く。(グラフは省略。)

答 67

(1) 手放された後のストーンに働く力は, 氷面からうける動摩擦力 F_m と, 重力である。重力は氷面から受ける垂直抗力と打ち消し合う。また, 摩擦力 F_m は x 軸の逆方向に働く。従って, ストーンに働く力の総和 F は, $F = -F_m$ となる。加速度を a とすると, 運動方程式は,

$$-F_m = ma \quad (4.61)$$

(2) 前小問より, $a = -F_m/m$ となるが, これは時刻によらない一定値。すなわちこれは等加速度直線運動である。式 (4.22), 式 (4.23) で, a_x を $-F_m/m$, 速度 v_x を v とすれば,

$$v = v_0 - \frac{F_m}{m} t \quad (4.62)$$

$$x = v_0 t - \frac{F_m}{2m} t^2 \quad (4.63)$$

となる。ここで $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$ を用いた。グラフは図 4.2 のようになる。

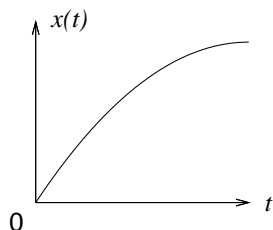


図 4.2 カーリングのストーンの運動。

(3) ストーンが停止した時刻を t , そのときの位置を x とすると, そのとき速度 dx/dt は 0 になるから, 式 (4.62) より,

$$0 = -\frac{F_m}{m} t + v_0 \quad (4.64)$$

従って, $t = mv_0/F_m$ 。これを式 (4.63) に代入すると,

$$x = \frac{mv_0^2}{2F_m} \quad (4.65)$$

従って,

$$F_m = \frac{mv_0^2}{2x} \quad (4.66)$$

ここで, $x = 20 \text{ m}$, $m = 20 \text{ kg}$, $v_0 = 1.5 \text{ m s}^{-1}$ とすれば, $F_m = 1.1 \text{ N}$ 。

(4) クーロンの摩擦法則 (式 (2.23)) より, 動摩擦係数 μ' について,

$$F_m = \mu' N \quad (4.67)$$

が成り立つ。ここで N はストーンと氷の接触面に垂直に働く力であり, 今の場合 $N = mg$ である。従って, $F_m = \mu' mg$ である。従って, 上の結果から, $\mu' = F_m/(mg) = 5.7 \times 10^{-3}$ 。(無次元なので単位は不要)

(5) 式 (4.65) より, 停止するまでの距離 x は, 初速度 v_0 の 2 乗に比例する。 x を 20 m から 25 m にするとき, x は 1.25 倍になるが, そのためには v_0 が $\sqrt{1.25} = 1.12$ 倍になればよい。従って, v_0 は $\sqrt{1.25} \times 1.5 \text{ m s}^{-1} = 1.68 \text{ m s}^{-1}$ 。つまり, 約 1.7 m s^{-1} にすればよい。

(6) 式 (4.65) と式 (4.67) で F_m を消去し, $F_m = \mu' mg$ を使えば,

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu'g} \quad (4.68)$$

となる。従って x は質量に依存しない。従って, 30 kg だろうが何 kg だろうが, 摩擦の条件 (氷の表面状態とストーンの底面材質) が同じなら, 前小問で求めた初速度 (約 1.7 m s^{-1}) でよい。

よくある質問 39 問 67(6) に驚きました。重い物体が, 軽い物体と同じ初速度で同じ距離で止まるのですか? ... そうです。不思議ですね。これは, 力が摩擦力だからです。この場合の摩擦力は, 重力に比例します。重い物体にはそのぶん, 垂直効力が大きくなるため, 大きな摩擦力がかかるのです。つまり

$F = ma$ の左辺の F が m に比例するため、右辺の ma の m と打ち消し合って、結果的に質量の影響は無くなるのです。

答 68

- (1) $t < 0$ では等速直線運動をしているから、慣性の法則より、働く力(の総和)は0である。従って、運動方程式より、式 (4.43) が成り立つ。
- (2) $0 < t$ ではパラシュートによる空気抵抗力 $F = -\alpha v$ がかかる。従って、運動方程式より、式 (4.44) が成り立つ。
- (3) 式 (4.44) を変数分離すると、

$$-\alpha dt = m \frac{dv}{v} \quad (4.69)$$

さて、上の式を両辺、積分すると (C は積分定数)、

$$-\alpha t = m \ln |v| + C \quad (4.70)$$

(C' は C とは別の定数) 従って、

$$v = \pm \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t + C'\right) = \pm \pm C' \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \quad (4.71)$$

ここで $t = 0$ のとき $v = v_0$ だから、

$$\pm \exp C' = v_0 \quad (4.72)$$

従って、

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \quad (4.73)$$

- (4) 図 4.3 のようになる。

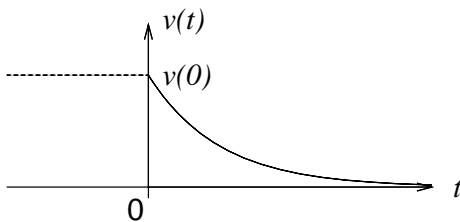


図 4.3 粘性抵抗を受けて減速する物体の運動。

答 69

粘性抵抗とは、流体の中で、物体が速度に比例して受ける抵抗力。慣性抵抗とは、物体が流体の中で速度の二乗に比例して受ける抵抗力。

答 70

- (1) $0 < t$ ではパラシュートによる空気抵抗力 $F = -\beta v^2$ がかかる。従って、運動方程式より、式 (4.46) が成り立つ。

(2) 略。

(3) 略。

- (4) 式 (4.48) で、 $t = 0$ とすれば、 $0 = m/v(0) + C$ 。従って $C = -m/v(0)$ 。

- (5) 式 (4.49) を式 (4.48) に入れて v についてとけば、式 (4.50) が成り立つ。(各自、計算してみよ)

- (6) 図 4.4 のようになる。

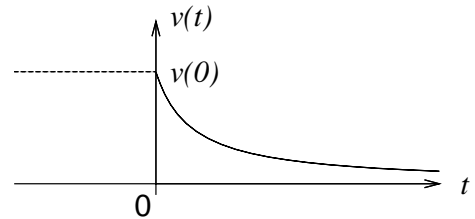


図 4.4 慣性抵抗を受けて減速する物体の運動。

答 71

- (1) 雨粒にかかる力は、重力 ($-mg$) と粘性抵抗 ($-\alpha v$) の和。従って、運動方程式より、式 (4.51) が成り立つ。

- (2) 式 (4.51) の両辺を m で割ると、

$$-g - \frac{\alpha v}{m} = \frac{dv}{dt} \quad (4.74)$$

両辺に dt をかけ、さらに両辺を $g + \alpha v/m$ で割ると、

$$-dt = \frac{dv}{g + \alpha v/m} \quad (4.75)$$

この左辺と右辺を入れ替えると、式 (4.52) を得る。

- (3) 式 (4.52) の両辺に積分記号 \int をつける:

$$\int \frac{dv}{g + \alpha v/m} = - \int dt \quad (4.76)$$

この左辺の不定積分は、

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{(\alpha/m)(v + gm/\alpha)} &= \frac{m}{\alpha} \int \frac{dv}{v + gm/\alpha} \\ &= \frac{m}{\alpha} \ln \left| v + \frac{gm}{\alpha} \right| + C_1 \end{aligned}$$

となる (C_1 は積分定数)。右辺の不定積分は、 $-t + C_2$ となる (C_2 は積分定数)。これらをまとめて、

$$\frac{m}{\alpha} \ln \left| v + \frac{gm}{\alpha} \right| + C_1 = -t + C_2 \quad (4.77)$$

となる。 C_1 を右辺に移項し、 $C_2 - C_1 = C$ とおけば、式 (4.53) を得る。

(4) 式 (4.53) より,

$$\ln\left|v + \frac{gm}{\alpha}\right| = -\frac{\alpha}{m}(t - C) \quad (4.78)$$

従って,

$$v + \frac{gm}{\alpha} = \pm \exp\left[-\frac{\alpha}{m}(t - C)\right] \quad (4.79)$$

従って,

$$v = \pm \exp\left[-\frac{\alpha}{m}(t - C)\right] - \frac{gm}{\alpha} \quad (4.80)$$

ここで $t = 0, v = 0$ とおけば,

$$0 = \pm \exp\left[\frac{\alpha}{m}C\right] - \frac{gm}{\alpha} \quad (4.81)$$

従って,

$$\pm \exp\left[\frac{\alpha}{m}C\right] = \frac{gm}{\alpha} \quad (4.82)$$

となる (左辺の \pm も含めて右辺のように決まる)。

これを式 (4.80) に代入して,

$$v = \frac{gm}{\alpha} \exp\left[-\frac{\alpha}{m}t\right] - \frac{gm}{\alpha} \quad (4.83)$$

これを整理すると式 (4.54) を得る。

(5) 図 4.5 のようになる。

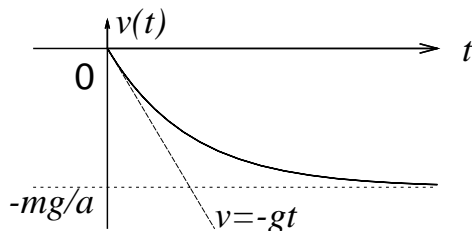


図 4.5 粘性抵抗を受ける落下。

(6) 式 (4.54) において t の ∞ への極限で, v は $-mg/\alpha$ に近づく。あるいは, 終端速度では速度は時間とともに変わらないから, 式 (4.51) の右辺を 0 とおけば, 同じく $v = -mg/\alpha$ を得る。

答 72

略 (各自, 調べよ)。

よくある質問 40 摩擦のない面に 10 t くらいの物体がのって静止しているとします。摩擦がなければ, この物体を面と平行な方向に動かし始めるには, ほんの少し力をかけてやるだけで良いのでしょうか。イメージできない。... はいそうです。実際, 小惑星探査機「はやぶさ」は 500 kg ほどですが, それを

動かすイオンエンジンは 1 円玉を持ち上げるくらいの力しかなかったらしいですよ。

よくある質問 41 ラプラスの悪魔にびっくりしました。... 私も若い頃, ラプラスの悪魔を知って, 自分の人生はもう決まってるのかと, 一瞬, 凹みました。

よくある質問 42 解答をみるとわかるんですけど, 一から自分で解答を作り出せません。... 基本から丁寧に理解することが重要で, 必ずしも「一から作り出す」ことにはこだわらなくていいです。受験勉強じゃないんだし, 新しいことを学んでいるのだから。

第5章

さまざまな運動

注: この章を理解するには、数学リメディアル教材で三角関数を理解していることが必要である。

5.1 単振動

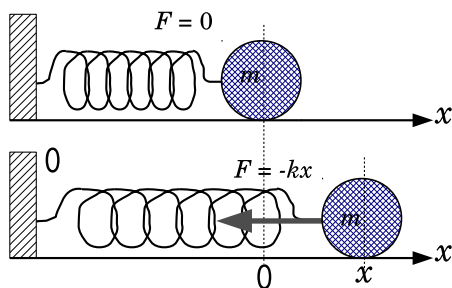


図 5.1 パネにつけられて振動する物体

図 5.1 のように、壁に一端が固定されたバネの、もう一端に質量 m の物体がとりつけられた系を考えよう。物体と床面の間に摩擦は無いものとする。バネ定数を k とし、バネ自体の質量は無視する。バネはこの図の左右方向にのみ伸び縮みし、物体もこの図の左右方向にしか動かないとする。バネが自然長にあるときの物体の位置を原点とし、左右方向に沿って x 軸をとる。バネの伸びる方向を x 軸の正の方向とする。

この物体を、右か左から指で弾いたり、右か左に少し動かして放すと、物体は左右に振動しはじめることは、君の日常経験から明らかだろう。ただし、日常経験だけで考えると、この振動運動はいつか止まってしまうように思われる。しかし、ここでは「物体と床面の間に摩擦は無い」と仮定しているので、他に何らかの外力が働かない限り、この振動運動は永遠に続く。この運動を物理的に考えよう。

物体の運動を考えると、いつでも運動方程式 (4.26) から出発する。運動方程式は、質量 m が一定であれば、力のベクトルと加速度のベクトルの関係式だ。従って、運動方程式を考えるということは、 x 方向、 y 方

向、 z 方向の各方向について、力と加速度の関係を考えるということだ。

ところが、いま考えている物体は左右方向しか動かないので、上下方向や奥行き方向について運動方程式を考える必要は無い*¹。そこで、左右方向の運動方程式だけを考える: いま、バネが自然長にある (伸びも縮みもない状態) では、バネが物体に及ぼす力は 0 だ (図 5.1 の上図)。このときの物体は原点にある。物体が座標 x にあるとき、バネの伸びも x なので、フックの法則により、物体にはバネから $-kx$ の力がかかる (図 5.1 の下図。 k はバネ定数)。従って、 x 方向の運動方程式は以下のようになる:

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (5.1)$$

これを变形すれば、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (5.2)$$

となる。

この微分方程式 (5.2) を数学的に解けば、その解 $x(t)$ が、時刻 t における物体の位置を与えてくれる。つまり物体の運動が決まるわけだ。ただし、それには大学レベルの数学力*²が必要だ。残念ながら、我々の数学の勉強は、まだそこまで進んでいない。

しかし我々は、この物体が振動運動するということを体験的に知っている。そこで、この物体の運動が、次式

*¹ とは言うものの、念のため、上下方向の運動も考えておこう: 物体に上下方向 (鉛直方向) に働く力は、重力 (下向き) と、床からの垂直抗力 (上向き) だ。これらは同じ大きさで逆向きだから互いに打ち消しあう。従って、物体に働く上下方向の力 (合力) は 0 だ。従って、物体が最初に床にあって上下方向に運動していない限り、慣性の法則に従って、物体は床 (高さ 0) にあり続ける。従って上下方向の加速度は 0 だ。従って、上下方向の運動方程式は、 $0 = 0$ となるにすぎない。

*² 「二階の線型常微分方程式」の理論。複素数の関数や行列などの基礎が必要。

のように書けると仮定しよう：

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (5.3)$$

ここで A と ω は適当な (未知の) 正の定数である*3。この式 (5.3) のグラフは、図 5.2 のようになる。いかにも

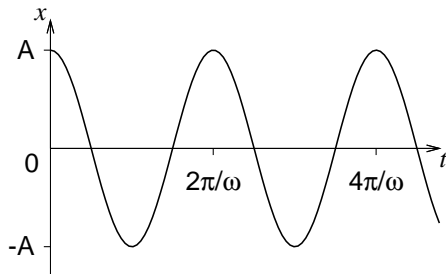


図 5.2 式 (5.3) のグラフ。

振動してそうなグラフではないか! このグラフを見ると、 A は振動の幅 (振幅) を表している。また、振動は、時間が $2\pi/\omega$ だけ経過するごとに同じパターンで繰り返す。この ω を 角速度 とか 角振動数 と呼ぶ**4。また、繰り返しの時間間隔を 周期 と呼んで T と表すことが多い。両者の関係はよく出てくるので、覚えておこう：

単振動の角速度 ω と周期 T の関係

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.4)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (5.5)$$

角速度は時間の逆数の次元を持ち、通常、 s^{-1} 、つまり「毎秒」という単位であらわされる。「毎秒」のことを「ヘルツ」とよび、Hz と書くこともある (記憶せよ)。

さて、式 (5.3) が式 (5.2) を満たすのではないかといい希望を持って、式 (5.3) を式 (5.2) に代入してみよう。すると、式 (5.2) の左辺は

$$-A\omega^2 \cos \omega t \quad (5.6)$$

となり、右辺は

$$-A \frac{k}{m} \cos \omega t \quad (5.7)$$

となる。これらが任意の時刻について一致する (つまり式 (5.2) が恒等的に成り立つ) には、 $A = 0$ か、 $\omega^2 = k/m$ であればよい*5。

$A = 0$ のときは、式 (5.3) が恒等的に 0 となる、つまり物体は原点でじっと静止したままだ。今は振動運動を考えているのでこれは除外しよう。

$\omega^2 = k/m$ のときは、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.8)$$

となる (A の値はなんでも構わない)。式 (5.8) が成り立てば、式 (5.3) は運動方程式 (5.2) の解になる、つまり「運動の法則」を満たすのだ。従って、式 (5.3) はこの系で実現可能な運動 (のひとつ) である。

式 (5.8) が成り立つならば、式 (5.3) 以外にも、以下のような関数もそれぞれ式 (5.2) の解であることは、代入してみれば簡単にわかるだろう：

$$x(t) = A \sin \omega t \quad (5.9)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (5.10)$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (5.11)$$

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (5.12)$$

(A, B, ϕ は任意の定数で、各々の式で違ってかまわない。)

式 (5.2) の解として、こんなにたくさんの関数があることはわかったが、よくよく考えると、現実の運動は単純な振動運動のはずだから、解としてそんなに多くの可能性は無いはずだ。実は、これらの関数の中には、「重複」があるのだ。

実際、例えば、式 (5.12) で $B = 0$ とおけば式 (5.3) になるし、式 (5.12) で $A = 0$ とおいて改めて B を A と置き換えれば式 (5.9) になる。つまり、式 (5.3) や式 (5.9) は、式 (5.12) の特殊なケースに過ぎない。

また、式 (5.10) において、 $\phi = \phi' - \pi/2$ とおけば、 \cos の性質*6 から、

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi' - \frac{\pi}{2}) = A \sin(\omega t + \phi')$$

となって、 ϕ' を改めて ϕ と置けば式 (5.11) の形になるし、式 (5.11) において、 $\phi = \phi' + \pi/2$ とおけば、 \sin の性質*7 から、

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi' + \frac{\pi}{2}) = A \cos(\omega t + \phi')$$

となって、 ϕ' を改めて ϕ と置けば式 (5.10) の形になる。つまり、式 (5.10) と式 (5.11) は、同じ関数を違った形で

それは t が特定の値、例えば $t = \pi/(2\omega)$ や $t = 3\pi/(2\omega)$ などをとるときに限られるので、式 (5.2) が恒等的に成り立つとは言えない。

*6 任意の角 θ について、 $\cos(\theta - \pi/2) = \sin \theta$

*7 任意の角 θ について、 $\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$

*3 ω はギリシア文字の「オメガ」の小文字。数学リメディアル教材参照。

*4 角速度の正確な定義は、「単位時間あたりに進む位相」である。

*5 ほかに、 $\cos \omega t = 0$ となるときにも式 (5.2) は成り立つが、

表現しているに過ぎない。

また、式 (5.12) に「三角関数の合成」(数学リメディアアル教材参照) を適用すれば、式 (5.11) の形に式変形できるし、逆に式 (5.11) や式 (5.10) に三角関数の加法定理を適用すれば式 (5.12) のように式変形できる。つまり、式 (5.10)、式 (5.11)、式 (5.12) の 3 つは、数学的には互いに等価である(もちろん、各々で A や ϕ の値は違う)。

このような、三角関数で表現できる周期的な振動現象のことを、「単振動」とか「調和振動」という。

ここで、代表的に、式 (5.12) に着目し、これで単振動を統一的に表現することを試みよう。まず、時刻 $t = 0$ での位置は $x(0)$ なので、式 (5.12) より、

$$x(0) = A \quad (5.13)$$

である。また、式 (5.12) を微分すると、

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \quad (5.14)$$

である。時刻 $t = 0$ での速度は $x'(0)$ なので、

$$x'(0) = B\omega \quad (5.15)$$

である。従って、式 (5.12) は、

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{x'(0)}{\omega} \sin \omega t \quad (5.16)$$

となる。この式は、図 5.1 のような系で起きる、あらゆる振動運動を、初期条件(つまり $x(0)$ と $x'(0)$ の値)だけで統一的に表現する(ただし ω は式 (5.8) を満たさねばならない)。

さて、式 (5.2) は、式 (5.8) を使うと、次式のようになる:

単振動の微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (5.17)$$

このような方程式で表される現象は、どんなものであっても、単振動である。その例は、「バネについた物体」以外にも、以下のように様々である:

- 振り子(振幅が十分に小さいとき)
- コイルとコンデンサーからなる電気回路(電波を受けるアンテナ)
- 安定した大気の中で発生する、プラント・パイサラ振動
- 大気よりも遙か上空の電離層で起きるプラズマ振動

今のところ君はこれらの中身を詳しく知る必要は無い。単振動という現象は、いろんなところにある、という実感を持ってくれたら、とりあえずそれで十分だ。

問 73 図 5.1 のような系で、物体の質量を 2 倍にすると、角速度は何倍になるか? 振動の周期は何倍になるか?

問 74 図 5.1 のような系で、 $t = 0$ で物体を $x = X_0$ の位置に持ってきて、静かに(初速度 0 で)離すと、どのような運動になるか? その解を書き、そのグラフを描け。ヒント: 式 (5.16)。

問 75 図 5.1 のような系で、 $t = 0$ で物体を $x = 0$ の位置のまま、指でピンと弾いて初速度 V_0 を与えたら、どのような運動になるか? その解を書き、そのグラフを描け。

ここで、微分方程式 (5.17) について、もうすこし考えてみよう。これは、 t に関する二階微分を含む方程式(二階微分方程式)だから、それを解く、つまり微分を含まない形の関数(方程式)を得るには、微分の逆操作である、不定積分に相当することを 2 回やらねばならない。普通、不定積分を 1 回やると、積分定数と呼ばれる「任意の定数」が 1 つ現れる。従って、不定積分を 2 回やると、積分定数に相当する「任意の定数」が 2 つ現れるはずだ。従って、二階微分方程式を解くと、その一般解(どんな解もその形式で表されるような解)は、任意の定数を 2 つ含む。微分方程式 (5.17) の場合は、それが式 (5.12) における A, B である。で、それは (5.16) でわかったように、初期条件、つまりある時刻における位置と速度を与えることで、具体的に決まる。

もっと一般的に言うと、運動方程式 $F = ma$ は、位置 x に関する二階微分方程式なので、その一般解は 2 つの任意定数を含む。任意定数の値は、位置と速度に関する初期条件によって定まる^{*8}。

5.2 斜め投げ上げ

これまでは、ほとんど直線上に限って運動を考えてきた。しかし、運動の法則は、平面的な運動や空間的な運動にも成り立つ。といっても難しいことは何もない。座

^{*8} このように、初期条件を適切に与えることで、微分方程式の解を一意的に定めることを、「微分方程式の初期値問題」という。

標系を適切に設定して、 x, y, z の各方向について運動方程式を考えるだけだ。

次のような問題を考えよう：

問 76 君は地表のある点から、空に向かって、斜め方向に質量 m のボールを投げ上げる (図 5.3)。君の位置を原点とし、水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとる。時刻を t とし、君がボールを手放した瞬間を $t = 0$ とする。 $t = 0$ のときにボールの速度は x 軸から角 θ の方向で、その大きさは v_0 であったとする。

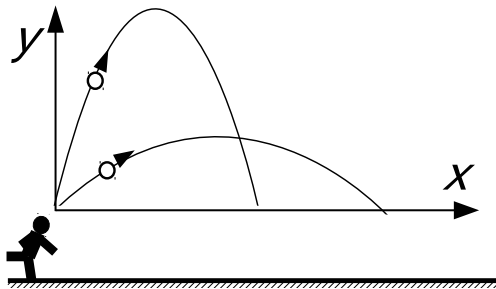


図 5.3 ボールの斜め投げ上げ

時刻 t におけるボールの位置と速度をそれぞれ $\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)$ とする。重力加速度を g とする。

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

とする。

- (1) $\mathbf{r}(0) = (0, 0), \mathbf{v}(0) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ であることを示せ。
- (2) 空気抵抗を考えないとき、ボールが手を離れてから地上に落ちるまでのボールの運動方程式は、次式のようになることを示せ：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad (5.18)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg \quad (5.19)$$

- (3) 上の微分方程式 (5.18), (5.19) を解くと、解はそれぞれ次式のようになることを示せ：

$$x = (v_0 \cos \theta)t \quad (5.20)$$

$$y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.21)$$

- (4) 前問の結果から t を消去して次式を示せ：

$$y = (\tan \theta)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (5.22)$$

- (5) 前問の結果を、横軸 x 、縦軸 y のグラフに描け。こ

れがボールの軌跡だ。

- (6) 投げ上げたボールが着地する場所の x 座標を X とすると、次式を示せ：

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (5.23)$$

- (7) v_0 が一定の時、投げ上げの角 θ がどのくらいのとき、 X は最大になるか？

問 77 ハンマー投は、ハンマー（ワイヤーの先に質量 7.26 kg の金属球がついたもの）を振り回して投げ上げ、飛ばした距離を競うスポーツである。世界記録は 86.7 m である。投げ上げの角度が、前問で求めた角に一致していたと仮定して、世界記録樹立時のハンマーの初速度を推定せよ。

5.3 円運動

一定の速さで円周上を一方向に動く運動のことを、等速円運動という。

平面内の円運動を考えてみよう。 xy 座標系の中に質量 m の質点があり、何かの機構によって、原点の方向に、一定の大きさ F の力でひっぱられているとしよう (図 5.4)。うまく条件が揃えば、この質点は、原点を中心とす

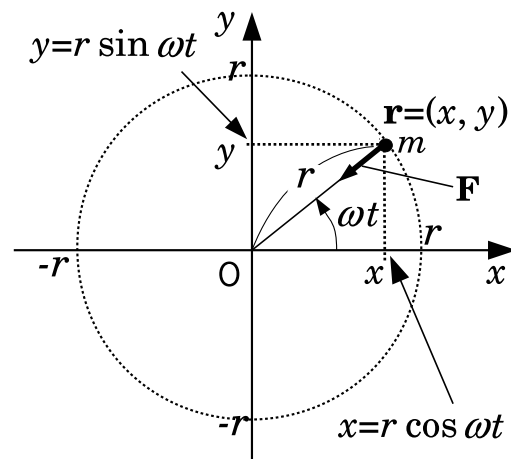


図 5.4 等速円運動

る半径 r の円周上を等速円運動する。そのことを証明しよう。

まず、時刻 t における質点の位置、速度、加速度をそれ

ぞれ

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad (5.24)$$

$$\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t)) \quad (5.25)$$

$$\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t)) \quad (5.26)$$

とし^{*9}, $t = 0$ で質点は x 軸上の点 $(r, 0)$ にあるとする。すなわち,

$$\mathbf{r}(0) = (x(0), y(0)) = (r, 0) \quad (5.27)$$

である。

問 78 (1) 質点がいかにこの円周上を一定の角速度 ω で回転するならば次式が成り立つことを示せ (ヒント: 極座標):

$$\mathbf{r}(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t) \quad (5.28)$$

$$\mathbf{v}(t) = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t) \quad (5.29)$$

$$\mathbf{a}(t) = (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t) \quad (5.30)$$

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t) \quad (5.31)$$

(2) 時刻 t のとき質点に働く力 $\mathbf{F}(t)$ は, 次式になることを示せ:

$$\mathbf{F} = (-F \cos \omega t, -F \sin \omega t) \quad (5.32)$$

(3) 質点の運動方程式は, 次式のようになることを示せ:

$$-F \cos \omega t = ma_x(t) \quad (5.33)$$

$$-F \sin \omega t = ma_y(t) \quad (5.34)$$

(4) 式 (5.30) で表される $a_x(t), a_y(t)$ は, 次式が成り立つときに限って上の運動方程式を満たす, ということを示せ。

$$F = mr\omega^2 \quad (5.35)$$

(5) 質点の速度 \mathbf{v} の大きさ v は次式となることを示せ。

$$v = r\omega \quad (5.36)$$

(6) 式 (5.35) は, 次式のようにもできることを示せ:

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad (5.37)$$

(7) 質量と半径はそのまま, 速度の大きさ v が 2 倍になると, 力は何倍になるか?

(8) 質量と速度はそのまま, 半径 r が $1/2$ 倍になると, 力は何倍になるか?

問 79 前問の最後の結果から, 車を運転する時に, な

ぜカーブの手前で減速せねばならないか, 述べよ。

実は, 単振動と円運動は, 密接な関係がある。等速円運動の方程式のひとつである式 (5.31) を考えよう:

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$$

この左辺は $d^2\mathbf{r}/dt^2$ であり, さらに, $\mathbf{r} = (x, y)$ とおけば, 上の式は,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (5.38)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y \quad (5.39)$$

となる。これらは, 式 (5.17) と同じ形, すなわち単振動の微分方程式だ。従って, 等速円運動は, 2 つの単振動 (x 軸方向と y 軸方向) の組み合わせと考えることができる。実際, 等速円運動

$$(x(t), y(t)) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t) \quad (5.40)$$

について, その x 座標だけを取り出した関数

$$x(t) = r \cos \omega t \quad (5.41)$$

は, 式 (5.3) にそっくりだし, y 座標だけを取り出した関数

$$y(t) = r \sin \omega t \quad (5.42)$$

は, 式 (5.9) にそっくりだ。従って, 角速度, 周期などの概念は, 円運動と単振動で共通だ。ただし, 「角速度」の「角」は, 円運動の場合は幾何学的な意味が直感的にわかりやすい。

問 80 ハンマー投の世界記録樹立時 (問 77 参照) に, 投擲者の腕にはどのくらいの力がかかっただろうか? それは何 kg の物体を持ち上げる力に相当するだろうか? 回転の半径を 1.5 m と仮定せよ (有効数字 2 桁で十分)。ヒント: 式 (5.37)。 m や v の値は問 77 から流用する。

問 81 太陽のまわりをまわる地球の円運動を考えよう。地球を質点とし, 地球の公転軌道を半径 r の円とし (厳密には楕円だが), その中心に太陽があると, 太陽は動かないと仮定する。太陽と地球の質量をそれぞれ M, m とする。万有引力定数を G とする。

(1) この円運動を維持するために地球が太陽から受ける力の大きさを, r, ω, m であらわせ。

(2) この力は万有引力によって実現される。このことが

*9 前章でも述べたが, 位置ベクトルは, \mathbf{r} と書くことも多い。

ら、次式を示せ。ただし ω は角速度である。

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \quad (5.43)$$

- (3) この円運動の周期 T は、次式のようになることを示せ：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \quad (5.44)$$

- (4) r, G, M に具体的な数値を代入して ω の値を求め、周期を求めよ。それは何日に相当するか？（計算に必要な数値は、各自、調べよ）

問 82 以下の宇宙飛行体は、それぞれ何時間で地球のまわりを一周するか？地球の半径を 6400 km とし、地球や以下の飛行体を質点とみなす。（ ）内は地表から飛行体への距離である。

- (1) 国際宇宙ステーション（約 400 km）
- (2) 気象衛星ひまわり（約 36000 km）

気象衛星ひまわりは、赤道上空の宇宙空間を、地球の自転と同じ角速度で地球のまわりをまわっているので、常に地表の同じ場所の雲の様子を時々刻々と観測できる。

よくある質問 43 自然界には、円運動だけでなく楕円運動もあるのですか？もしあるなら、やはり運動方程式で表せるのですか？... はい。惑星の公転は、一般には円ではなく楕円であり、やはり運動方程式に従います。特に火星の楕円軌道は、「天体は真円運動をする」というオカルト的な中世の思い込みから脱皮してニュートン力学が生まれるための、重要な手がかりでした。また、GPS 衛星を補完して測量精度を上げるための「みちびき」という日本の人工衛星（その信号が農地のトラクターの自動運転などで使われている）は、気象衛星ひまわりの近くだけ楕円の軌道を動いています。

よくある質問 44 公式がごちゃごちゃになってしまいます。。... どの式がどの法則から派生するのか、という体系性を意識することが重要。物理学は公式の羅列ではなく、法則の体系ですから。

よくある質問 45 高校の物理の先生が「物理ができるかどうかは絵が上手に描けるかどうかで決まる」と言っていました。確かに絵が上手に描けるとちょっとやる気もです。。... 絵

や文など、自分を表現するツールを豊かに持っている人は、知的な成長が早いと思います。

5.4 解答

答 73 $\omega = \sqrt{k/m}$ より、質量 m が 2 倍になると、角速度 ω は $1/\sqrt{2} \approx 0.71$ 倍になる（つまり振動はゆっくりになる）。また、周期を T とすると、 $T = 2\pi/\omega$ だから、 T は $\sqrt{2} \approx 1.4$ 倍になる。

答 74 式 (5.16) で、 $x(0) = X_0, x'(0) = 0$ とすると、 $x(t) = X_0 \cos \omega t$ 。グラフは図 5.5 のようになる。

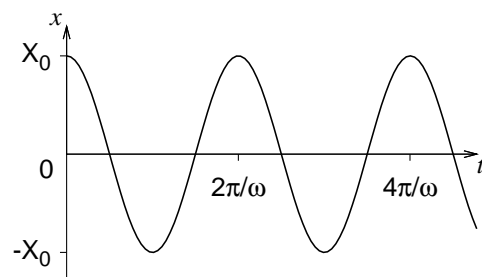


図 5.5 単振動する質点の位置の経時変化

答 75 式 (5.16) で、 $x(0) = 0, x'(0) = V_0$ とすると、

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t \quad (5.45)$$

となる。グラフは図 5.6 のようになる。

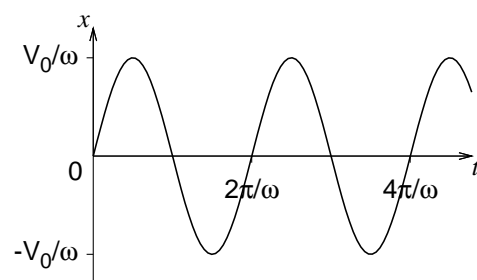


図 5.6 単振動する質点の速度の経時変化

答 76 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ となることに注意せよ。

- (1) ボールは時刻 $t = 0$ で原点（君の位置）にあるから $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$ 。また、 $|\mathbf{v}(0)| = v_0$ で、 $\mathbf{v}(0)$ が x 軸からなす角が θ であることから、

$$\mathbf{v}(0) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta) \quad (5.46)$$

- (2) x 方向には力が働かないので、式 (5.18) が成り立つ。
 y 方向には重力つまり $-mg$ が働くので、式 (5.19) が成り立つ。

- (3) 式 (5.18) を 2 回積分すると、

$$x(t) = C_1 t + C_2 \quad (5.47)$$

となる。ここで C_1, C_2 は積分定数。 $x(0) = 0$ より $C_2 = 0$ 。 $x'(0) = v_0 \cos \theta$ より、 $C_1 = v_0 \cos \theta$ 。従って、

$$x(t) = (v_0 \cos \theta)t \quad (5.48)$$

式 (5.19) を 2 回積分すると、

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4 \quad (5.49)$$

となる。ここで C_3, C_4 は積分定数。 $y(0) = 0$ より $C_4 = 0$ 。 $y'(0) = v_0 \sin \theta$ より、 $C_3 = v_0 \sin \theta$ 。従って、

$$y(t) = (v_0 \sin \theta)t - \frac{gt^2}{2} \quad (5.50)$$

- (4) 略 (各自計算せよ)。

- (5) 図 5.7

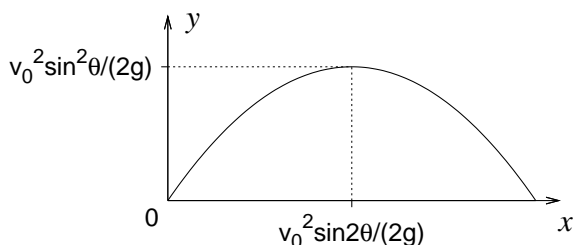


図 5.7 斜めに投げ上げられたボールの軌跡

- (6) 略 (式 (5.22) で $y = 0$ となるのは、 $x = 0$ と式 (5.23) の場合であり、前者は投げ上げの瞬間、後者は着地の瞬間に対応する。 $2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$ に注意せよ。)
- (7) 式 (5.23) が最大になるのは、 $\theta = \pi/4$ 、つまり 45 度のとき。

答 77 前問より、 $\theta = \pi/4$ が、ハンマー投擲の最適角度。このとき式 (5.23) は $X = v_0^2/g$ となる。従って $v_0 = \sqrt{gX}$ 。 $X = 86.7 \text{ m}$ 、 $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ とすれば、 $v_0 = 29.1 \text{ m s}^{-1}$ 。

答 78

- (1) 略 (数学リメディアル教材参照)

- (2) 原点から質点へのベクトル (つまり質点の位置ベクトル) は

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (r \cos \omega t, r \sin \omega t) \\ &= r(\cos \omega t, \sin \omega t) \end{aligned} \quad (5.51)$$

だから、原点から質点へ向かう単位ベクトルは $(\cos \omega t, \sin \omega t)$ 。問題の仮定より、質点にかかる力の方向は、質点から原点へ方向である。その方向の単位ベクトルは、前述の単位ベクトルの逆向きだから、 $(-\cos \omega t, -\sin \omega t)$ 。力の大きさは F なので、結局、力をあらわすベクトルは、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= F(-\cos \omega t, -\sin \omega t) \\ &= (-F \cos \omega t, -F \sin \omega t) \end{aligned} \quad (5.52)$$

となる。

- (3) 略 (x, y 各方向の運動方程式を考えればよい)。
- (4) 式 (5.30) で表された $a_x(t), a_y(t)$ を式 (5.33)、式 (5.34) に代入すれば、

$$-F \cos \omega t = -mr\omega^2 \cos \omega t \quad (5.53)$$

$$-F \sin \omega t = -mr\omega^2 \sin \omega t \quad (5.54)$$

となる。前者の両辺を $-\cos \omega t$ で割ったり、後者の両辺を $-\sin \omega t$ で割ったりすれば、 $F = mr\omega^2$ 、すなわち式 (5.35) が成り立つ。逆に、式 (5.35) が成り立てば、上記の式が成り立つのは明らかだ。

- (5) 略 (式 (5.29) を使って (v_x, v_y) の大きさを求めるだけ)。
- (6) 略 (式 (5.36) と式 (5.35) から ω を消去)。
- (7) 式 (5.37) より、4 倍。
- (8) 式 (5.37) より、2 倍。

答 79 普通、タイヤは高速で転がっていても、地面との接触面は常に地面と噛み合っているため、接触面ではタイヤと地面は静止しているため、摩擦力は静止摩擦力である。

さて、車がカーブに入ると、その回転運動を維持するには、前問の結果から、速度の二乗に比例した横向き力を、車のタイヤと地面の間での摩擦力で実現しなければならない。従って、高速度でカーブに入ると、激しく大きな静止摩擦力が要求される。それに耐えきれないと、タイヤと地面の間で滑りが起き、突然、摩擦力は静止摩擦力から、より小さな動摩擦力に代わるので、車はカーブを続けることができなくなる。カーブに入ってから慌てて急ブレーキを踏むと、さらに大変なことになる。ブレーキによってタイヤの回転が急に止まるので、地面

とタイヤの間での滑りが、より早い段階（車が減速する前）で起きてしまう。そのような事態になっては遅い。それを避けるには、カーブへ進入する前に十分に減速する必要がある。万一、高速度でカーブに入ってしまったら、タイヤがスリップしないように気をつけてブレーキをじんわり踏みながら、幸運を祈るしかない。

答 80 投擲者がハンマーを手放す直前まで、ハンマーは回転運動している。その速度を v とすると、式 (5.37) より、 $F = mv^2/r$ の力が投擲者の腕にかかったはずである。問 77 の問題文と結果より、 $m = 7.26 \text{ kg}$ 、 $v = 29.1 \text{ m s}^{-1}$ 。 $r = 1.5 \text{ m}$ とすると、 $F = 4100 \text{ N}$ 。これに相当する重力を受ける物体の質量は、この値を $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ で割って、約 420 kg 。つまり約 420 kg の物体を地上で持ち上げるのに必要な力に相当する。

答 81

- (1) 式 (5.35) より、 $mr\omega^2$
 (2) 万有引力は GMm/r^2 。従って、

$$mr\omega^2 = \frac{GMm}{r^2} \quad (5.55)$$

これを ω について解けば与式を得る。

- (3) $T = 2\pi/\omega$ より与式を得る。
 (4) $G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ 、 $M = 1.9891 \times 10^{30} \text{ kg}$ 、 $r = 1.4960 \times 10^{11} \text{ m}$ とすると、 $\omega = 1.99125 \times 10^{-7} \text{ Hz}$ 。周期は、 $2\pi/\omega = 3.15539 \times 10^7 \text{ s} = 365.207 \text{ 日} = 365.21 \text{ 日}$ 。注: 実際の公転周期 365.25 日 と少しずれたのは、地球は厳密には楕円軌道をしているため。これを補正するには r の値に修正が必要。注: 与えられた数値は有効数字 5 桁であっても、途中計算は 1 桁余分にとって行い、最後に 5 桁に丸める。

答 82 式 (5.44) において M を地球の質量とすればよい。

- (1) $r = 6800 \text{ km}$ とすると、 $T = 5580 \text{ s} \approx 1.6 \text{ 時間}$ 。
 (2) $r = 42000 \text{ km}$ とすると、 $T = 87000 \text{ s} \approx 24 \text{ 時間}$ 。

第6章

力学的エネルギー保存則(1)

6.1 運動エネルギー

運動の第二法則によれば、質量 m の質点が力 F を受けて直線 (x 軸) 上を運動するとき、その運動は、どんなものであっても、以下のような運動方程式に従う：

$$F = ma \quad (6.1)$$

a は質点の加速度である (運動が 1 次元に限定されているので、 F と a は細字で書いた)。加速度は速度を時刻で微分したもののなので、この式は、以下のように書くこともできる：

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (6.2)$$

t は時刻、 v は質点の速度である。式 (6.1) と式 (6.2) は、加速度の表現が形式的に違うだけで、いずれも互いに等価な方程式であり、式 (4.26) を直線運動 (1 次元の運動) に書き直したものだ。以下、式 (6.2) を議論の出発点としよう。

いま、直線 (x 軸) 上を、力 $F(t)$ を受けて、質量 m の質点が、時刻 t_0 から t_1 の間で何らかの運動をしている状況を考えよう。この運動は、もちろん式 (6.2) に従うので、式 (6.2) を解いて、位置と速度を時々刻々と追跡すれば、運動の全体像が判明する。でも、微分方程式を解くのは、場合によっては、結構めんどうくさいのだ。

そこで、もっと楽ができないだろうか、考えてみよう。たとえば、運動の経過の詳細に立ち入ることなしに、運動の最初 ($t = t_0$) と最後 ($t = t_1$) の間に何らかの関係を見いだせないだろうか？ 実は、式 (6.2) をうまく数学的に変形すれば、そのような関係を見出すことができるのだ。

まず、時刻 t と、そこからほんのちょっと経過した時刻 $t + dt$ における位置や速度を考える。すなわち、微分 (導関数) の定義と、速度の定義 (速度とは位置を時刻で

微分したもの) から、

$$\begin{aligned} x(t + dt) &= x(t) + x'(t) dt \\ &= x(t) + v(t) dt \end{aligned} \quad (6.3)$$

である。右辺の $x(t)$ を左辺に移項すれば、次式になる：

$$x(t + dt) - x(t) = v(t) dt \quad (6.4)$$

この左辺は、時間 dt の間に起きた、位置の変化である。それを dx としよう。つまり、 $x(t + dt) - x(t) = dx$ とする。するとこの式は、

$$dx = v dt \quad (6.5)$$

となる。

さて、式 (6.2) の両辺に dx をかけてみよう：

$$F dx = m \frac{dv}{dt} dx \quad (6.6)$$

この右辺の dx を、式 (6.5) で書き換えれば、

$$F dx = m \frac{dv}{dt} v dt \quad (6.7)$$

となる。

ここで、時刻 t_0 から t_1 までの運動を、たくさんの短い断片に分割し、それぞれの断片で式 (6.7) を考えて足し合わせる。つまり、時刻 t_0 から t_1 までの間で、式 (6.7) を積分すると、

$$\int_{x_0}^{x_1} F dx = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{dv}{dt} v dt \quad (6.8)$$

となる。 $x_0 = x(t_0)$ 、 $x_1 = x(t_1)$ とした。ここで置換積分によって右辺の積分変数を t から v に変換すると*1、

$$\int_{x_0}^{x_1} F dx = \int_{v_0}^{v_1} mv dv \quad (6.9)$$

となる。 $v_0 = v(t_0)$ 、 $v_1 = v(t_1)$ とした。この左辺は、質点が x_0 から x_1 に移動する際に力がなす仕事 W_{01} であ

*1 形式的には右辺の dt を約分することに相当する。

る(わからない人は式(3.20)を見よ)。一方、右辺は、

$$= \left[\frac{1}{2} mv^2 \right]_{v_0}^{v_1} = \frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 \quad (6.10)$$

となる。以上より、

$$W_{01} = \frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 \quad (6.11)$$

である。ここで、右辺を見やすくするために、次式で定義される速度の関数 $T(v)$ を考える：

— 1次元運動における運動エネルギーの定義 —

質量 m の質点が速度 v で運動するとき、

$$T(v) = \frac{1}{2} mv^2 \quad (6.12)$$

をその質点の運動エネルギー (kinetic energy) と
いう。

すると、式(6.11)は、

$$W_{01} = T(v_1) - T(v_0) \quad (6.13)$$

あるいは、同じことだが、

$$T(v_1) = T(v_0) + W_{01} \quad (6.14)$$

となる。この式は味わい深い。何らかの力に従って行われた運動では、力がなした仕事は、質点の運動エネルギー T の変化に等しい。つまり、仕事がされるぶんだけ、 T が増えるのだ。そう考えると、運動エネルギー T は、仕事と等価な物理量である、つまり「エネルギー」の名にふさわしい。実際、運動エネルギーは、「質量を持つ物体の運動」という姿をまとったエネルギーである。定義から明らかのように、運動エネルギーは、質量と速度だけに依存する。速度が大きいほど運動エネルギーは大きい。

ここで、運動エネルギーの定義式(6.12)をもういちどよく見てみよう。 $T(v)$ の中に、速度 v は2乗の形で入っている。従って、 $T(v)$ は、 v の符号(つまり方向)によらず、 v の大きさ、つまり「速さ」だけで決まる*2。質点がどのような方向に進んでいようが、運動エネルギーは速さ(と質点の質量)だけで決まるのだ。

問 83 運動エネルギーの定義を10回書いて記憶せよ。

さて、式(6.11)は、運動方程式を距離で積分したもの

*2 速度の大きさ(絶対値)のことを速さと呼ぶのだった。

にすぎない*3。しかし、その有用性はハンパではない。式(6.11)を使えば、運動の過程を気にすることなく、運動の最初の状態から最後の状態を直接的に導くことができるのだ。以下の例でそれを学ぼう。

問 84 質量 m の質点が、一定の力 F を受けて、一定の加速度 a で直線 (x 軸) 上を運動している。時刻 t における位置と速度をそれぞれ $x(t), v(t)$ とする。

- (1) 時刻 t_0 から時刻 t_1 の間に、力 F がなした仕事 W_{01} は次式のようになることを示せ：

$$W_{01} = F\{x(t_1) - x(t_0)\} \quad (6.15)$$

- (2) 次式を示せ：

$$W_{01} = ma\{x(t_1) - x(t_0)\} \quad (6.16)$$

- (3) 以上と式(6.11)より、次式を示せ*4：

$$v(t_1)^2 - v(t_0)^2 = 2a\{x(t_1) - x(t_0)\} \quad (6.17)$$

問 85 カーリングの問題(問67)をもう一度考えてみよう。初速度 v_0 で放されたストーンが距離 x だけ進んで停止したとすると、

- (1) ストーンが放されてから止まるまでの間に摩擦力がした仕事は $-F_m x$ であることを示せ。
(2) ストーンが放されてから止まるまでの間の運動エネルギーの変化は

$$0 - \frac{1}{2} mv_0^2 \quad (6.18)$$

であることを示せ。ヒント：止まったとき速度は0。

- (3) 以上より、次式を導け：

$$F_m = \frac{mv_0^2}{2x} \quad (6.19)$$

これは式(4.66)に一致する。

- (4) ストーンの到達距離が、初速度の二乗に比例することを示せ。

*3 高校物理では式(6.11)を「エネルギーの原理」と呼ぶらしいが、大学の物理ではそのような呼び方はほとんどしない。

*4 これは高校物理で「 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ 」と言われる公式だ。高校物理では暗記させられたが、このように簡単に導出できる、たいしたことない公式なので、暗記する必要は無い。本当に重要で記憶すべきなのは運動の三法則だ。もしも、式(6.17)のような公式を覚えていながら運動の三法則を言えないという人がいたら、その人は、物理学の学びかたを根本的に間違っている。

問 86 地球のはるか遠方に静止している質量 m の隕石が、地球の重力に引かれて徐々に加速しながら一直線に地球に向かってきたとする。我々は、隕石を迎撃する計画を立てねばならない。そのためには、隕石が地球に衝突する直前の速度 v_1 を求めねばならない。地球の質量を M 、半径を R とし、万有引力定数を G とし、隕石を質点とみなす。

- (1) 隕石が、無限遠方から、地球の表面（中心から距離 R ）まで、地球の重力に引かれてやってくる時、地球の重力がなす仕事 W は、

$$W = \frac{GMm}{R} \quad (6.20)$$

となることを示せ。

- (2) 隕石が無限遠方から地球表面までやってくる時、隕石の運動エネルギーの変化は次式であることを示せ。

$$\frac{mv_1^2}{2} \quad (6.21)$$

ヒント：初速度は 0 である。

- (3) このことから、地球衝突直前の隕石の速度 v_1 は次式のようになることを示せ：

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (6.22)$$

- (4) 上の式の定数に、適切な数値を代入し、 v_1 の値を求めよ。

6.2 力学的エネルギー保存則

前節の式 (6.13)、式 (6.14) で、「運動エネルギー T は、される仕事のぶんだけ増える」ことを学んだ。さて、ここで以前学んだ、ポテンシャルエネルギーを思い出そう：ある特定の位置（基準点）から位置 x まで質点を運ぶときに保存力がなす仕事を $W(x)$ とすると、ポテンシャルエネルギー $U(x)$ は、 $U(x) = -W(x)$ と定義された。ここで、 $W(x_1)$ は、基準点からまず x_0 まで運んだときの仕事 $W(x_0)$ と、そこからさらに x_1 まで運ぶときの仕事 W_{01} の総和である、と考えれば、

$$W(x_0) + W_{01} = W(x_1) \quad (6.23)$$

である。従って、

$$W_{01} = W(x_1) - W(x_0) \quad (6.24)$$

である。ところが、ポテンシャルエネルギーの定義から、

$$W(x_0) = -U(x_0), \quad W(x_1) = -U(x_1) \quad (6.25)$$

とできるので、結局、

$$W_{01} = -U(x_1) + U(x_0) \quad (6.26)$$

である。これを式 (6.11) に代入すれば、

$$-U(x_1) + U(x_0) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (6.27)$$

となる。これを整理すると、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) = \frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1) \quad (6.28)$$

となる。あるいは、運動エネルギー $T(v)$ を使って書き換えれば、

$$T(v_0) + U(x_0) = T(v_1) + U(x_1) \quad (6.29)$$

となる。これらの式は味わい深い。左辺は質点が x_0 にあるときの、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和であり、右辺は質点が x_1 にあるときの、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和である。これらが等しいということは、つまり、「運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和」（これを「力学的エネルギー」という）は運動の初めから終わりまで一定である、ということである（ x_0 や x_1 は運動の最中のどこの位置を選んでもよいことに注意せよ）。これを「力学的エネルギー保存則」と呼ぶ。ただし、既に述べたように、仕事とポテンシャルエネルギーの変化がきちんと対応するのは、働く力が「保存力」のときだけだ。摩擦のような非保存力が働く場合は、仕事とポテンシャルエネルギーの変化が対応しないために、力学的エネルギー保存則が成り立つ保証は無い。まとめると、

力学的エネルギー保存則

保存力だけが働く場合（非保存力が働かない場合）、力学的エネルギー（運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和）は運動の初めから終わりまで常に一定である。

問 87

- (1) 力学的エネルギーとは何か？
- (2) 力学的エネルギー保存則とは何か？
- (3) 力学的エネルギー保存則が成り立たないのはどういう場合か？

問 88 鉛直線上を自由落下する質点の運動 (空気抵抗無し) を例にとって、力学的エネルギー保存則が成り立つことを確かめよう。問 65 の状況を考える。 $t = 0$ で $v = 0$, $x = 0$ とすると、

$$v(t) = -gt \quad (6.30)$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (6.31)$$

である。

- (1) 時刻 t のときの質点の運動エネルギー T と (重力による) ポテンシャルエネルギー U はそれぞれ、

$$T = \frac{1}{2}mg^2t^2 \quad (6.32)$$

$$U = -\frac{1}{2}mg^2t^2 \quad (6.33)$$

となることを示せ。

- (2) 力学的エネルギー保存則を使わないで、次式が恒等的に成り立つことを示せ：

$$T + U = 0 \quad (6.34)$$

問 89 バネにつけられて振動する質点の運動 (単振動) を例にとって、力学的エネルギー保存則が成り立つことを確かめよう。前章の図 5.1 の状況を考える。 $t = 0$ で $v = 0$, $x = x_0$ とすると、

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad (6.35)$$

である。ここで $\omega = \sqrt{k/m}$ である。

- (1) 時刻 t のときの質点の速度 $v(t)$ は次式になることを示せ (ヒント: $x(t)$ を t で微分):

$$v(t) = -x_0\omega \sin \omega t \quad (6.36)$$

- (2) 時刻 t のときの質点の運動エネルギー T と (バネの力による) ポテンシャルエネルギー U はそれぞれ、

$$T = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t \quad (6.37)$$

$$U = \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2 \omega t \quad (6.38)$$

となることを示せ。ただしポテンシャルエネルギーの基準点として、ばねが自然状態のときの質点の位置 (つまり $x = 0$) を考える。ヒント: $U = kx^2/2$ の x に $x(t)$ の式を代入。

- (3) 力学的エネルギー保存則を使わないで、次式が恒等

的に成り立つことを示せ：

$$T + U = \frac{1}{2}kx_0^2 \quad (6.39)$$

問 88, 問 89 では、力学的エネルギー保存則が成り立つことが確認された。そうなのは、これらの間で働く力が保存力だけだったからだ。しかし、以下のように、非保存力が働くような場合は力学的エネルギー保存則が成り立たない:

問 90 カーリングの問題, すなわち問 67, 問 85 で、力学的エネルギー保存則が成り立たないことを示せ。成り立たないのはなぜなのだろうか?

問 91 夏休みに南の島に行った君は、なぜか筑波大生の勇気を証明するために、そこでバンジージャンプをする羽目になった。深い渓谷の上にかけられた橋から、ゴムバンドが垂れ下がっている。橋から渓谷の底までの高さは 50 m, ゴムバンドの長さ L は 20 m くらいあるようだ。ゴムバンドは十分に軽いとする。さて、ゴムバンドの先端が、体重 60 kg の君の体につけられたとき、君の脳裏に、「こんなにゴムバンドが長ければ、自分の体は途中で止まらずに渓谷の底に叩きつけられるのではないか?」という不安がよぎった。

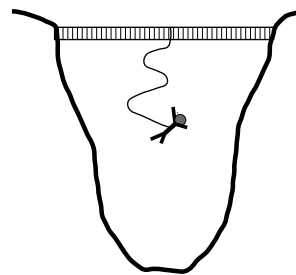


図 6.1 問 91 のバンジージャンプ。

そこで本番前に、試しに、このゴムバンドを 1 m だけ橋から出して、静かに自分の体を吊り下げたら、0.2 m だけ伸びた。

- (1) この 1 m のゴムバンドのバネ定数 k_0 は?
 (2) 20 m のゴムバンドは均一の素材・太さであるとする、20 m のゴムバンドのバネ定数 k は?

橋から初速度 0 で飛び降りるとき、君の運動エネルギー T は 0 だ。重力のポテンシャルエネルギー U も 0 であるとする (つまり、飛び降りる地点を基準点とす

る)。このとき、当然ながら力学的エネルギー E_0 は 0 だ。また、橋から高さ x だけ落ちたとき、速度は v であり、重力のポテンシャルエネルギーは $-mgx$ である。

- (3) 落下距離 x がゴムバンドの長さ未満のとき、力学的エネルギー E_1 は、

$$E_1 = \frac{mv^2}{2} - mgx \quad (6.40)$$

であることを示せ。このとき、ゴムバンドには全く力がかかっていないことに注意せよ。

- (4) 落下距離 x がゴムバンドの長さを越えたら、力学的エネルギー E_2 は、

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} - mgx + \frac{k(x-L)^2}{2} \quad (6.41)$$

であることを示せ。

- (5) 君の体が運よく谷底の手前で停止したとするなら、停止の瞬間の力学的エネルギー E_3 は

$$E_3 = -mgx + \frac{k(x-L)^2}{2} \quad (6.42)$$

であることを示せ。

- (6) 以上を利用し、力学的エネルギー保存の法則 ($E_0 = E_3$) から、停止点までの落下距離 x を求めよ。この結果から、君はこのバンジージャンプを安全と判断するか？（注：実際に実験したいと思った人へ：やめとけ。）

6.3 物理学における保存則

力学的エネルギー保存則は保存力だけが関与するような運動に限って成立するが、実は、「エネルギー保存則」は、もっと一般的・普遍的な法則である。たとえば、氷上を滑るカーリングのストーンは、氷とストーンの間の摩擦力（非保存力）の仕事によって、いずれ停止してしまうが、このとき力学的エネルギーは一定ではない。ストーンの運動エネルギーはポテンシャルエネルギーに転換されないのだ。しかし、そのかわりに、ストーンの運動エネルギーは氷とストーンの界面の摩擦によって熱に変わる。熱はエネルギーのひとつの形態だ。そして熱エネルギーとストーンの運動エネルギーの合計は、運動の最初・途中・最後のどの時点でも一定である。つまり、力学的エネルギーだけでは一定でないが、「力学的エネルギー + 熱エネルギー」は一定なのだ。

熱エネルギー以外にも、化学エネルギーや電氣的・磁氣的なエネルギーなど、様々なエネルギーの形態がある。

実は質量もエネルギーの形態のひとつだ。ここでは詳述しないが、

$$E = mc^2 \quad (6.43)$$

という式が、質量とエネルギーの関係を表す（ E はエネルギー、 c は光の速度）。それらをすべて勘案すれば、エネルギーは決して無くなることはない。これをエネルギー保存則という。エネルギー保存則は、ニュートン力学だけでなく、様々な物理法則に対して成り立つ、普遍的な法則である。

物理学では、エネルギーのように、様々な複雑な運動や反応の過程で最初から最後まで一定であるような量をとても大切にす。万物流転、栄枯盛衰の世にあって、変わらない何かを求めようとするのは人間の普遍的な心理なのかもしれないが、実際、自然現象の中には、そのような「総和は変わらない（どこかで減った分はどこかで増えるような）特別な量」（不変量）というものが、いくつが存在する。そのような事実（法則）を「保存則」と呼ぶ。エネルギー保存則はその例だが、それ以外にも、以下のような例がある（理由や背景は今は理解しなくてもよい。そのようなものがある、ということの頭の片隅に留めておこう）：

- 質量保存則
- 電荷保存則
- 運動量保存則
- 角運動量保存則

ただし、非保存力が働くときに力学的エネルギー保存則が破れるのと同様に、これら保存則の中には、条件次第で「破れる」ものもある^{*5}。

なぜ物理学では保存則を大切にするのか？ それは、君が勉強を進めて、保存則の持つ威力を知るに従って、おのずと明らかになるだろう。

問 92 自動車の運転免許講習では、ことあるごとに「スピードを控えめに」と言われるが、なぜだろう？ ひとつは、高速での運動は制御が難しい、ということだ。運転者が危険を察知してからブレーキを踏んだりハンドルを切ったりするまでには時間がかかり、その間にも車は進んでしまう、というやつだ。しかしそれだけではない。スピードを控えめにすべき理由を、エネルギー保存

^{*5} 例えば質量保存則は、核分裂や核融合等の反応では成り立たない。その過程では質量がエネルギーに変わってしまうのだ。ただし、質量保存則をエネルギー保存則と組み合わせてしまえば、その場合でも保存則は成り立つ。

則の観点で説明せよ。

6.4 解答

答 83 式 (6.12) で定義される T のこと (レポートではその式をきちんと書くこと!)

答 84

(1) 質点が受ける力は一定値 F なので、

$$W_{01} = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} F dx = \left[Fx \right]_{x(t_0)}^{x(t_1)} = F\{x(t_1) - x(t_0)\}$$

(2) $F = ma$ を上の式に代入すればよい。

(3) 式 (6.11) を用いて W_{01} を消去する:

$$\frac{1}{2}mv(t_1)^2 - \frac{1}{2}mv(t_0)^2 = ma\{x(t_1) - x(t_0)\}$$

両辺を 2 倍して m で割れば、与式を得る。

答 85 注意: 手放されて滑っているストーンにかかる力は、重力と、氷面から受ける垂直抗力、そして動摩擦力だ。このうち、重力と、氷面から受ける垂直抗力は互いに逆向きで同じ大きさであり、打ち消しあう。従って、ストーンの運動には、動摩擦力だけを考えれば良い。

(1) 摩擦力 (動摩擦力) はストーンの動く向きと逆方向で、 $-F_m$ 。これを F として問 84(1) の結果に入れれば、仕事は $-F_mx$ 。

(2) ストーンが放たれた直後の運動エネルギーは $mv_0^2/2$ であり、停止時には 0。従って与式が成り立つ。

(3) 式 (6.11) によれば、小問 (1) の式と小問 (2) の式は互いに等しい。従って与式を得る。

(4) 小問 (3) の結果から、

$$x = \frac{mv_0^2}{2F_m} \quad (6.44)$$

従って、 x は v_0^2 に比例する。

答 86

(1) 式 (3.24) で、 $R_0 = \infty$, $R_1 = R$ とすればよい。

(2) 略。

(3) 式 (6.13) より、式 (6.20) と式 (6.21) が等しい。従

って、

$$\frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (6.45)$$

従って、

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (6.46)$$

(4) $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$,

$M = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$,

$R = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$ とすると、

$v_1 = 1.12 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ 。これは約 40000 km/h。

注: これを第二宇宙速度という。

答 87

(1) 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和を力学的エネルギーという。

(2) 力学的エネルギーは運動の初めから終わりまで一定である、という法則。ただし、力は保存力に限る。

(3) 例えば摩擦力は保存力ではないから、摩擦力が関与する運動では力学的エネルギー保存則は成り立たない。

答 88

(1) 式 (6.12) に式 (6.30) を代入すると、式 (6.32) を得る。また、式 (3.37) で、 h を x と書き換えると、 $U(x) = mgx$ である。この式に式 (6.31) を代入すると、式 (6.33) を得る。

(2) 式 (6.32) と式 (6.33) の辺々を加えると与式を得る。

答 89

(1) 略 (式 (6.35) を t で微分するだけ)。

(2) 式 (6.12) に式 (6.36) を代入すると、式 (6.37) を得る。また、式 (3.40) に式 (6.35) を代入すると、式 (6.38) を得る。

(3) 式 (6.37) と式 (6.38) の辺々を加えると、

$$T + U = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2 \omega t$$

ここで、問題より $\omega = \sqrt{k/m}$ なので、上の式は、

$$T + U = \frac{1}{2}kx_0^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2 \omega t$$

となる。これを变形すると、

$$T + U = \frac{1}{2}kx_0^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2}kx_0^2$$

となり、与式を得る。

答 90 ストーンが放たれた直後とストーンが停止したときのそれぞれで、運動エネルギーは $mv_0^2/2$ と 0 である。一方、ポテンシャルエネルギーは、摩擦力については存在せず、重力についてはストーンが放たれた直後とストーンが停止したときで互いに等しい（どちらも水平面にあるから）。従って、力学的エネルギーは、ストーンが放たれた直後の方が、ストーンが停止したときよりも $mv_0^2/2$ だけ大きい。従って、力学的エネルギー保存則は成り立たない。それは、ストーンの運動に関与する力が摩擦力であり、摩擦力は非保存力であり、非保存力が関与する場合は力学的エネルギー保存則は成り立たないからである。

答 91 君の質量（体重）を m 、重力加速度を g とする。

- (1) ゴムバンドの弾性力と重力が釣り合う（合力が 0）から、

$$-k_0\delta + mg = 0 \quad (6.47)$$

である（ここで δ はゴムバンドの伸びで、0.2 m）。従って、

$$k_0 = \frac{mg}{\delta} = \frac{60 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m s}^{-2}}{0.2 \text{ m}} = 2940 \text{ N/m}$$

- (2) バネ定数はバネの長さに反比例する。今の場合、ゴムの長さが 20 倍になるから、

$$k = k_0/20 = 147 \text{ N/m}$$

- (3) 運動エネルギーは $mv^2/2$ 。ポテンシャルエネルギーは、重力によるもののみであり、 $-mgx$ 。両者の和から、 $E_1 = mv^2/2 - mgx$ 。
 (4) ゴムバンドの伸びは $x - L$ である。従って、ゴムバンドの弾性力によるポテンシャルエネルギーは $k(x - L)^2/2$ 。これを前小問の式に加えれば良い。
 (5) 停止する瞬間は、速度が 0。従って、前小問の式で $v = 0$ とすればよい。
 (6) $E_0 = E_3$ より、

$$0 = -mgx + \frac{k(x - L)^2}{2} \quad (6.48)$$

従って、

$$x^2 - 2\left(L + \frac{mg}{k}\right)x + L^2 = 0 \quad (6.49)$$

これに適当な数値を代入すれば、SI 単位系で、

$$(x/\text{m})^2 - 48(x/\text{m}) + 400 = 0 \quad (6.50)$$

これを解くと、 $x = 37.3 \text{ m}$, 10.7 m となる。このうち、求める解は少なくともゴムバンドの長さ $L = 20 \text{ m}$ 以上のはずなので、結局、 $x = 37.3 \text{ m}$ となる。谷底までの深さは 50 m あるから、君の体は谷底までは到達しない。従って、このバンジージャンプは（ゴムがぶちっと切れたりしない限り）安全だろう。

答 92 高速で運動する物体の運動エネルギーは大きい。運動エネルギーは速度の 2 乗に比例するので、例えば 40 km/h と 60 km/h では速さは 1.5 倍だが、運動エネルギーは $1.5^2 = 2.25$ 倍にもなる。そして、事故で急停止したときは、エネルギー保存則のために、その運動エネルギーは車や搭乗者の身体の破壊に使われる。「事故ったときのダメージを小さくする」ためにも、スピードは控えめにすべきであり、また、高速で運転するときほど、事故のリスクを（低速での運転時よりも）低くするように務めるべきなのだ。

よくある質問 46 なぜカーリングのときに U が 0 になるのですか？ ... まず摩擦力は非保存力なので U は無い。また、ストーンは水平方向に動くので重力のする仕事は 0。したがって、 U の変化は 0。したがって、もし重力による U をストーンの出発点で 0 と置けば、 U は氷面上のどこに行っても 0。

第7章

運動量保存則

7.1 運動量保存則

図 7.1 のように、それぞれ質量 m_A, m_B の 2 つの質点 A, B が、時刻 t_0 のときに、 xy 平面上を別の方向に等速直線運動しており、それが時刻 t_1 に衝突して合体し、時刻 t_2 では新たな方向に進むとしよう。時刻 t_0 (衝突前) で質点 A, B の速度はそれぞれ v_A, v_B とすると、時刻 t_2 (衝突後) では、合体した質点はどのような速度 v で動くだろう?

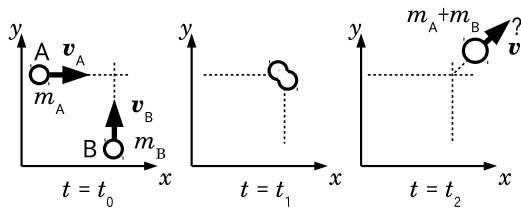


図 7.1 2 つの質点の衝突合体

極微の世界や高速の世界を除けば、どんな運動も運動方程式に従うので、この件も運動方程式を解けば完璧に予測・解明できるはずだ。しかし、この件に関しては、運動方程式を正面から解くのは簡単ではない。というのも、そもそも「合体」という現象は、大きさを持つ現実的な物体では、時刻 t_1 の「瞬間」で起きるのではなく、衝突が始まって物体が徐々につぶれて、その間、弾性力や摩擦力が複雑に働き、やがてお互いがくっつきあって一体化するまで、短い時間だが複雑な現象が起きるのだ。その各時刻に、2 つの物体の間にどのように力が働くのか、それを解明するのは大変難しい作業だ。

というわけで、この時刻 t_1 付近で起きる「衝突して合体」という複雑な現象を運動方程式で直接扱うことは避けたい。君子危うきに近寄らず、と言うではないか。

そこで有用なのが、これから学ぶ、以下の法則である：

運動量保存則

外力が働かない系では、全運動量（各質点の運動量の総和）は不変である。

外力とは、考察の対象になっている物体どうしに働く力（それを内力という）以外の力だ。本件でも外力は働いていない*1。全運動量とは、各物体の運動量の（ベクトルとしての）和である。運動量とは、式 (4.33) で定義されたように、質量と速度の積である。本件では、時刻 t_0 (つまり衝突前) の全運動量は、

$$m_A v_A + m_B v_B \quad (7.1)$$

である。ここで、添字の A, B は、それぞれ質点 A, 質点 B の属性であることを示す。時刻 t_2 (つまり衝突後) では質点はひとつに合体しており、その運動量は、

$$(m_A + m_B) v \quad (7.2)$$

である。運動量保存則は、式 (7.1) と式 (7.2) が等しい、と主張するのだ。すなわち、

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v \quad (7.3)$$

が成り立つはずだ。それを認めるなら、

$$v = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} \quad (7.4)$$

となって、首尾良く、衝突後の質点の速度が求まる!

問 93 図 7.1 の問題において、 $m_A = m_B = 1.0 \text{ kg}$ とし、時刻 t_0 で A は x 軸方向に 1.0 m s^{-1} 、B は y 軸方向に 1.0 m s^{-1} で動いているとする。

- (1) 衝突合体後の速度 v を求めよ。
- (2) $|v|$ を求めよ。

では、運動量保存則を証明しよう。まず運動方程式に

*1 衝突して合体するまでに生じる複雑な力は、具体的にその力がどんなものなのかというのは置いて、「考察の対象になっている物体どうしに働く力」なので内力である。

戻る。質量 m の質点が力 \mathbf{F} を受けて運動しているとき、その運動は、どんなものでも以下の運動方程式に従う：

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (7.5)$$

t は時刻である。 \mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{a} はそれぞれ、質点の位置、速度、加速度。さて、上の式は、以下のように書ける：

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (7.6)$$

両辺に dt をかけると次式になる：

$$m d\mathbf{v} = \mathbf{F} dt \quad (7.7)$$

これを時刻 $t = t_0$ から時刻 $t = t_1$ まで t で積分すれば、

$$\int_{\mathbf{v}(t_0)}^{\mathbf{v}(t_1)} m d\mathbf{v} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt \quad (7.8)$$

となる。左辺は、

$$\left[m\mathbf{v} \right]_{\mathbf{v}(t_0)}^{\mathbf{v}(t_1)} = m\mathbf{v}(t_1) - m\mathbf{v}(t_0) \quad (7.9)$$

となるから、式 (7.8) は、

$$m\mathbf{v}(t_1) - m\mathbf{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt \quad (7.10)$$

となる。この式の左辺は「時刻 t_0 から t_1 の間に運動量がどれだけ変わったか」だ。一方、右辺は 力積 (りきせき、と読む) という量である。

力積の定義

時刻を t とする。質量 m の質点に、力 $\mathbf{F}(t)$ が働くとき、

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt \quad (7.11)$$

を、時刻 t_0 から t_1 までに質点に働く力積と呼ぶ。

問 94 力積の定義を 10 回書いて記憶せよ。

すなわち、式 (7.10) は、「運動量の変化は力積に等しい」と解釈できる。

よくある質問 47 「運動エネルギーの変化は仕事に等しい」という法則と似てますね... 似てるけど違います。両者の違いをきちんと認識しよう。運動エネルギーや仕事はスカラーで、その法則は運動方程式を位置で積分して得られました。一方、運動量や力積はベクトルで、ここで述べた法則は運動方程式を時刻で積分することで得られたのです。

さて、いま、A, B という 2 つの質点が互いに力を及ぼしあいながら運動する状況を考えよう。各質点は外力を受けないとすると、それぞれの質点に関して、

$$m_A \mathbf{v}_A(t_1) - m_A \mathbf{v}_A(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_{AB} dt \quad (7.12)$$

$$m_B \mathbf{v}_B(t_1) - m_B \mathbf{v}_B(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_{BA} dt \quad (7.13)$$

となる。これらを辺々足し合わせると、

$$\begin{aligned} m_A \mathbf{v}_A(t_1) - m_A \mathbf{v}_A(t_0) + m_B \mathbf{v}_B(t_1) - m_B \mathbf{v}_B(t_0) \\ = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_{AB} dt + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_{BA} dt \\ = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA}) dt \end{aligned} \quad (7.14)$$

となる。 \mathbf{F}_{AB} は質点 A が質点 B から受ける力であり、 \mathbf{F}_{BA} は質点 B が質点 A から受ける力だ。ここで作用反作用の法則から、

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \quad (7.15)$$

である。従って、

$$\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA} = \mathbf{0} \quad (7.16)$$

である。従って、式 (7.14) の最後の行は $\mathbf{0}$ になる ($\mathbf{0}$ の積分は $\mathbf{0}$)。従って、

$$m_A \mathbf{v}_A(t_1) - m_A \mathbf{v}_A(t_0) + m_B \mathbf{v}_B(t_1) - m_B \mathbf{v}_B(t_0) = \mathbf{0}$$

となる。書き換えれば、

$$\begin{aligned} m_A \mathbf{v}_A(t_1) + m_B \mathbf{v}_B(t_1) \\ = m_A \mathbf{v}_A(t_0) + m_B \mathbf{v}_B(t_0) \end{aligned} \quad (7.17)$$

となる。この式は、2 つの質点の運動量の和は時刻 t_1 と時刻 t_0 で変わらない、ということだ。以上から、「2 つの質点が、外力の影響を受けずに運動する場合、全運動量は不変である」ということが示された。質点が 3 つ以上になっても、同様の式が成り立つ。これで、前述の運動量保存則が証明された!

問 95 3 つの質点 A, B, C が互いに内力のみを受けて運動する系でも、全運動量が保存することを示せ。ヒント：式 (7.12) のような式を、A, B, C のそれぞれについて考え、足し合わせればよい。ただし、A に働く力は $\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}$ であることに注意。

7.2 弾性衝突と非弾性衝突

この「運動量保存則」は、前章までに学んだ「力学的エネルギー保存則」になんとなく似ているが、正直なところ、どう違うのだろうか？そこで、以下の問を考えよう：

問 96 問 93 の続きを考える。

- (1) 衝突前の運動エネルギーの総和を求めよ。
- (2) 衝突合体後の運動エネルギーを求めよ。

この現象では、衝突合体で運動エネルギーが減ってしまった。しかし、ポテンシャルエネルギーは変化していない（外力が無いからそもそもポテンシャルエネルギーは0）。従って、この現象では力学的エネルギー保存則は成り立っていないようだ。

力学的エネルギー保存則が成り立たないのは、保存力でない力が関与する場合だった。ここでは、お互いが変形して合体する複雑な現象に、摩擦力が関与するのだ。摩擦力は保存力でない。従って力学的エネルギー保存則は成り立たないのだ。

よくある質問 48 減った分の運動エネルギーはどこに行ったのでしょうか？... 主に摩擦によって熱になったのです。合体した後も物体がぐにゃぐにゃと変形・振動するなら、弾性力と振動の力学的エネルギーになった可能性もあります。

このように、力学的エネルギー保存則が成り立たない、もしくは、成り立つかどうか微妙な現象でも、運動量保存則は成り立つのだ。

さて、この例では、2つの物体が衝突・合体したが、2つの物体が合体せずに互いにはじき飛ばされるような場合もある。そのような場合も、全運動量は不変だ。

ここで、摩擦力のような非保存力が全く関与せず、しかも物体の振動や変形も無いとしよう。そのような場合は、力学的エネルギー保存則から、衝突の前後で運動エネルギーの総和は等しいはずだ。そのように、衝突によって運動エネルギーが失われないような衝突を、弾性衝突とか、完全弾性衝突という。弾性衝突でない衝突現象を、非弾性衝突という。

問 97 弾性衝突とは何か？

問 98 x 軸上で、2つの質点 A, B が、それぞれ速度 v_A, v_B で運動し（図 7.2 上）、やがて互いに弾性衝突を起こし（図 7.2 中）、衝突後はそれぞれ速度 v'_A, v'_B で（こ

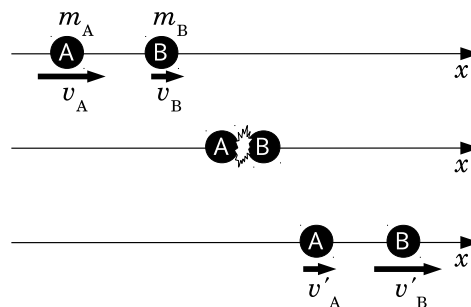


図 7.2 1 直線上を運動する 2 つの質点どうしの衝突。
上: 衝突前, 中: 衝突の瞬間, 下: 衝突後

ここではダッシュ'は微分ではなく、「衝突後」を表すしるし), 再び x 軸上で運動をする (図 7.2 下)。質点 A, B のそれぞれの質量を m_A, m_B とする。2つの質点に外力は働いておらず、2つの質点どうしに働く力(内力)は衝突時だけに働くとする。

- (1) 運動量保存則と力学的エネルギー保存則より、以下の2つの式が成り立つことを示せ：

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (7.18)$$

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B \quad (7.19)$$

- (2) 式 (7.18), 式 (7.19) から次式を示せ:

$$m_A (v'_A - v_A) = -m_B (v'_B - v_B) \quad (7.20)$$

$$m_A (v'^2_A - v_A^2) = -m_B (v'^2_B - v_B^2) \quad (7.21)$$

- (3) 式 (7.21) から次式を示せ:

$$m_A (v'_A - v_A)(v'_A + v_A) = -m_B (v'_B - v_B)(v'_B + v_B) \quad (7.22)$$

- (4) 式 (7.22) の両辺を式 (7.20) で割って次式を示せ:

$$v'_A + v_A = v'_B + v_B \quad (7.23)$$

- (5) 式 (7.23) を変形して次式を示せ:

$$v'_B - v'_A = -(v_B - v_A) \quad (7.24)$$

- (6) 式 (7.24) を変形して次式を示せ:

$$\frac{|v'_B - v'_A|}{|v_B - v_A|} = 1 \quad (7.25)$$

式 (7.24) によって、ぶつかる前後で相対速度は、向きが逆になることがわかった。つまり、ぶつかる前には互いに近づいて来たが、ぶつかった後では互いに遠ざかっていく。これは直感的にも明らかだ。

ぶつかった後の相対速度の大きさ $|v'_B - v'_A|$ を、ぶつかる前の相対速度の大きさ $|v_B - v_A|$ で割ったものを反発係数とか跳ね返り係数と呼び、慣習的には e と表す。すなわち、

$$e = \frac{|v'_B - v'_A|}{|v_B - v_A|} \quad (7.26)$$

である。弾性衝突では、式 (7.25) からわかるように、 $e = 1$ である。非弾性衝突では、 e は 0 から 1 の間の値をとる。 $e = 0$ は、物体 B が物体 A にべちゃっとくっついてしまう場合だ。例えばゴルフボールとゴルフクラブの衝突に関する反発係数は 0.8 程度である。

問 99 問 98 の続きを考える。

- (1) 式 (7.23) を使って、式 (7.20) から v'_B を消去することによって次式を示せ：

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A + \frac{2m_B}{m_A + m_B} v_B \quad (7.27)$$

- (2) 式 (7.23) を使って、式 (7.20) から v'_A を消去することによって次式を示せ：

$$v'_B = \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} v_B + \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A \quad (7.28)$$

- (3) $m_A = m_B$ のとき、次式を示せ：

$$v'_A = v_B \quad (7.29)$$

$$v'_B = v_A \quad (7.30)$$

- (4) $m_A \gg m_B$ のとき、次式を示せ：

$$v'_A \doteq v_A \quad (7.31)$$

$$v'_B \doteq -v_B + 2v_A \quad (7.32)$$

式 (7.29)、式 (7.30) から、2 つの質点の質量が等しければ、弾性衝突によって速度が入れ替わる (図 7.3)、ということがわかった。追いついた方は追いつかれた方の速度になり、追いつかれた方は追いついた方の速度になる。この極端な場合は、片方が静止してももう片方がぶつかっ

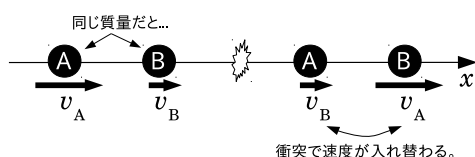


図 7.3 1 直線上を等速直線運動する 2 つの質点どうしの衝突。質量が等しく、なおかつ弾性衝突なら、速度が入れ替わる。

てくる場合だ。ぶつかってきた方は衝突後に静止し、ぶつかられた方がすっとなでいく。ビリヤードの経験がある人は、それを知っているだろう。

ところで、式 (7.31)、式 (7.32) から、片方の質量が極端に大きいときは、大きい方はほとんど速度を変えず (痛くも痒くもない)、小さい方は激しく速度を変える (ふっとばされる)、ということがわかった (図 7.4)。小さな軽自動車と大きなトラックの衝突事故で、軽自動車に乗っていた人のダメージの方が大きいのはそのためだ。

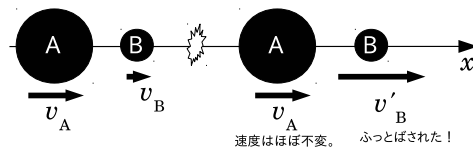


図 7.4 1 直線上を等速直線運動する 2 つの質点どうしの衝突。片方が極端に大きいときは、小さいほうがふっとばされる。

問 100 ボールを高さ h_0 から初速度 0 で真下に落として、バウンドさせる。ボールと地面の間の反発係数を e としよう。空気抵抗やボールの回転は無視する。

- (1) ボールが地面につく直前の速度を v_0 とする。力学的エネルギー保存則から次式を示せ：

$$v_0^2 = 2gh_0 \quad (7.33)$$

- (2) ボールが地面で跳ね返った直後の速度を v_1 とする。次式を示せ：

$$|v_1| = e|v_0| \quad (7.34)$$

- (3) ボールは地面で跳ね返ったあと上向きに運動し、いずれある点 (それを到達点と呼ぼう) に達してまた落ち始める。そのときの到達点の高さを h_1 とし、次式を示せ：

$$v_1^2 = 2gh_1 \quad (7.35)$$

- (4) 次式を示せ：

$$h_1 = e^2 h_0 \quad (7.36)$$

- (5) そのまま放っておけば、またボールは地面に衝突して跳ね返り、また落ちて地面に衝突して跳ね返り、... ということを繰り返すだろう。 n を 1 以上の整数として、ボールが n 回バウンドしたあとの到達点の高さを h_n とすると、次式を示せ：

$$h_n = e^{2n} h_0 \quad (7.37)$$

- (6) $e = 0.8$, $h_0 = 10$ m のとき, 到達点の高さが 0.1 m 以下になるまでに, 何回バウンドするか?

問 101 2つのボールを, わずかに隙間をあけて縦に重ねて, 高さ h から (初速度 0 で) 真下の地面に落とし, バウンドさせる。下のボールを「ボール A」とし, その質量を m_A とする。上のボールを「ボール B」とし, 質量を m_B とする。ボール B はボール A よりはるかに小さく, $m_A \gg m_B$ とする。ボール A と地面の衝突や, ボール A とボール B の衝突は弾性衝突であるとする。重力加速度を g とする。上向きに座標軸をとる。

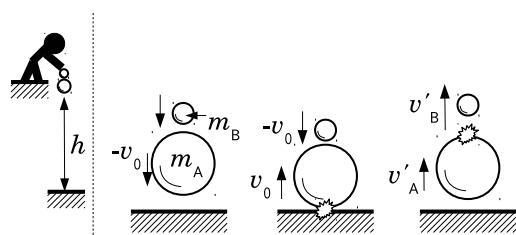


図 7.5 2段のボールの落下と跳ね返り。問 101。

- 地面に衝突する直前 (図 7.5 中左) のボール A の速度の大きさを v_0 とする。 $v_0 = \sqrt{2gh}$ であることを示せ。
- ボール A が地面に衝突して跳ね返った直後は, ボール B はまだボール A の上空にあるとする (図 7.5 中右)。このときのボール A の速度を v_A , ボール B の速度を v_B とする。次式を示せ:

$$v_A = v_0 \quad (7.38)$$

$$v_B = -v_0 \quad (7.39)$$

- その直後に, ボール B はボール A に衝突して跳ね返る (図 7.5 右端)。衝突直後のボール B の速度を v'_B とする。これらの一連の衝突は, 地面付近の狭い範囲で起きるので, 重力によるポテンシャルエネルギーの変化を無視しよう。すると式 (7.32) が成り立つことから, 次式を示せ:

$$v'_B \doteq 3v_0 \quad (7.40)$$

- ボール B は, ボール A に衝突して跳ね返ったあと, もとの落下開始点 (高さ h) の何倍の高さまで飛び上がるか?

問 102 (解かなくてもよいが, 解いたらボーナス 1 点加算) 前問はボールを 2 段にして落としたが, こんど

はボールをもっとたくさん用意して重ねて落としてみよう。 n 個のボールを縦に重ねて, 前問と同じように高さ h から落とす。ボールは上のもほど軽く, 隣りあう上下のボールは, 上のボールのほうが下のボールよりはるかに小さい (軽い) とする。最下部のボールが地面に弾性衝突して跳ね返ったあと, ボール同士は多段階に弾性衝突する (図 7.6)。最後に最上部のボールが跳ね上がるときのそのボールの速度を v'_n とする。

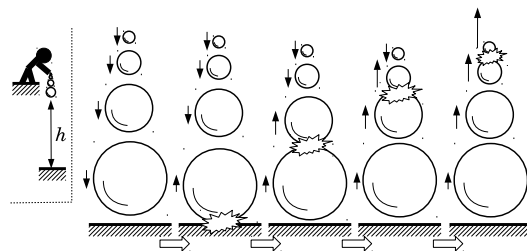


図 7.6 多段のボールの落下と跳ね返り。問 102。

- 次式を示せ:

$$v'_n \doteq (2^n - 1)v_0 \quad (7.41)$$

- 最上部のボールは, もとの落下開始点 (高さ h) の何倍の高さまで飛び上がるか?
- ボール群を $h = 5$ m から落下させ, 最上部のボールを宇宙の彼方まで飛ばすには, ボールを 10 段程度にすればよいことを示せ。(ヒント: 第 2 宇宙速度)

7.3 回転運動再考

ところで, 太陽のまわりを地球が円運動 (公転) している系を考えよう。太陽と地球だけの系には外力は働かないので, 運動量保存則から, 全運動量は一定のはずだ。さて, 地球の速度は, 大きさこそ一定であっても, 円軌道に沿って時々刻々と向きを変える。すると, 地球の運動量は, 大きさこそ一定であっても, 時々刻々と向きが変わるはずだ。一方, 太陽は静止しているから運動量は無い。ということは, 全運動量は地球の運動量だけだ。ということは, 全運動量が時々刻々と変化している, ということになる!! これは運動量保存則に矛盾している。どこが間違っているだろうか?

実は, この考察は, 「太陽は静止しているから運動量は無い」から後が間違っている。地球が太陽から引力を受けるように, 太陽も地球から引力を受ける (「作用・反作用の法則」)。その力によって, 太陽も, 小さいながらも円運動するのだ。しかもその運動量は, 絶えず地球の

運動量とは逆向きで大きさが同じであるため、太陽と地球の全運動量は0で一定なのである*2。

7.4 解答

答 93

- (1) $m_A = m_B = 1 \text{ kg}$, $\mathbf{v}_A = (1 \text{ m s}^{-1}, 0 \text{ m s}^{-1})$,
 $\mathbf{v}_B = (0 \text{ m s}^{-1}, 1 \text{ m s}^{-1})$ として式 (7.4) に代入すると, $\mathbf{v} = (0.5 \text{ m s}^{-1}, 0.5 \text{ m s}^{-1})$ 。
 (2) $|\mathbf{v}| = |(0.5 \text{ m s}^{-1}, 0.5 \text{ m s}^{-1})| = 0.71 \text{ m s}^{-1}$ 。

答 94 略。

答 95 (略証)

$$m_A \mathbf{v}_A(t_1) - m_A \mathbf{v}_A(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}) dt$$

$$m_B \mathbf{v}_B(t_1) - m_B \mathbf{v}_B(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{F}_{BA} + \mathbf{F}_{BC}) dt$$

$$m_C \mathbf{v}_C(t_1) - m_C \mathbf{v}_C(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{F}_{CA} + \mathbf{F}_{CB}) dt$$

これらの式を辺々加える。作用反作用の法則から $\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA}$ などは0になるので、結局、

$$m_A \mathbf{v}_A(t_1) + m_B \mathbf{v}_B(t_1) + m_C \mathbf{v}_C(t_1) \\ = m_A \mathbf{v}_A(t_0) + m_B \mathbf{v}_B(t_0) + m_C \mathbf{v}_C(t_0)$$

答 96

- (1) A, B とともに同じ運動エネルギー: 0.5 J をもつ。
 従って全運動エネルギーは、 1 J 。
 (2) $(m_A + m_B)|\mathbf{v}|^2/2 = 0.5 \text{ J}$ 。

答 97 衝突によって運動エネルギーが失われない衝突。

答 98 略。

答 99 (1), (2), (3) は略(実直に計算すれば導出できる)。

(4) 式 (7.27), 式 (7.28) の分子分母を m_A で割ると、

$$v'_A = \frac{1 - m_B/m_A}{1 + m_B/m_A} v_A + \frac{2m_B/m_A}{1 + m_B/m_A} v_B$$

$$v'_B = \frac{m_B/m_A - 1}{1 + m_B/m_A} v_B + \frac{2}{1 + m_B/m_A} v_A$$

となる。ここで、 $m_A \gg m_B$ なので、 $m_B/m_A \doteq 0$ とすると、上の2つの式は、

$$v'_A \doteq \frac{1 - 0}{1 + 0} v_A + \frac{2 \times 0}{1 + 0} v_B = v_A$$

$$v'_B \doteq \frac{0 - 1}{1 + 0} v_B + \frac{2}{1 + 0} v_B = -v_B + 2v_A$$

となり、与式を得る。

答 100

- (1) 地面を基準点とする。ボールを手放した瞬間は、重力によるボールのポテンシャルエネルギーは mgh_0 で、運動エネルギーは初速度0なので0。従って力学的エネルギーは mgh_0 。一方、地面につく直前は、ボールのポテンシャルエネルギーは0で、運動エネルギーは $mv_0^2/2$ 。従って力学的エネルギーは $mv_0^2/2$ 。力学的エネルギー保存則より、 $mgh_0 = mv_0^2/2$ 。ここから与式を得る。
 (2) 略。(eの定義から)
 (3) 略。(式 (7.33) と同様)
 (4) 略。(式 (7.33), 式 (7.34), 式 (7.35) より v_0, v_1 を消去)
 (5) 前小問と同様に、 $h_n = e^2 h_{n-1}$ 。これは公比 e^2 の等比数列。従って与式を得る。(数学リメディアル教材参照)
 (6) $h_0 = 10 \text{ m}$ で、 $h_n = e^{2n} h_0 < 0.1 \text{ m}$ より、 $e^{2n} < 0.01$ となる。 $e = 0.8$ だから、 $0.8^{2n} < 0.01$ 。 $n = 10$ のとき $0.8^{2n} = 0.0115 > 0.01$ 。 $n = 11$ のとき $0.8^{2n} = 0.0074 < 0.01$ 。従って、 $n = 11$ 、つまり11回バウンドする。

答 101 (1) ボールAについて、落下から地面での衝突の直前までを考えると、力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m_A v_0^2 = m_A gh \tag{7.42}$$

これを v_0 について解けば与式を得る。(2), (3) は略(誘導に従って実直に計算すれば導出できる)。(4) ボールBについて、(1) と同様に考えれば、次式のようになる:

$$\frac{1}{2} m_B v_0^2 = m_B gh \tag{7.43}$$

一方、最高到達点の高さを H とし、衝突直後から最高点到達までを考えると、力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m_B v_B'^2 = m_B gH$$

*2 ただし太陽と地球の重心に対して静止している座標系で見た場合。

ここで (3) より, $v'_B = 3v_0$ だから,

$$\frac{9}{2}m_B v_0^2 = m_B g H \quad (7.44)$$

となる。式 (7.44) の辺々を式 (7.43) の辺々で割ると,
 $9 = H/h$ となる。すなわち, $H = 9h$ 。すなわち, もとの高さの 9 倍まで上がる。

答 102 略。

第8章

熱力学入門

熱力学は「化学 I」や秋学期「物理学 II」で学ぶ。しかし、それらは力学と多くの接点を持つので、ここで概略を学んでおこう。

8.1 温度の定義

物質や物体は、膨大な数の原子や分子から構成される。それらの粒子どうしは引力や斥力を及ぼしあい、時には衝突しつつ共存する。その様子を知るには、原理的には全粒子のそれぞれについて運動方程式を解いて追跡すればよい。そのように個々の粒子の挙動に注目する観点を微視的（ミクロ）な観点という。

しかし、現実的にはそれは大変だし、そこまでのくわしい様子を知る必要も少ない。むしろ、興味があるのは、粒子集団が、全体として、平均的にどのような性質を持つか、ということだ。そのような観点を巨視的（マクロ）な観点という。

熱力学は、物質や物体の巨視的な性質を検討する。そのときに最初に便利な指標が温度だ。温度とは何だろう？ 温度には様々な定義があるが、わかりやすいのは以下である*1：

— 絶対温度の定義（エネルギー等分配則とも言う） —

物体を構成する粒子について、ひとつの粒子・ひとつの自由度における平均的な運動エネルギー K が

$$K = \frac{1}{2} k_B T \quad (8.1)$$

と書けると、 T をその物体の絶対温度と呼ぶ。 k_B は ボルツマン定数 と呼ばれる定数で、

$$k_B = 1.38065... \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \quad (8.2)$$

式 (8.1) をもとに定義される温度の単位を、 K （ケルビン）という*2。

*1 ここで温度を T と表すことに注意。これまで T は運動エネルギーを表していたが、慣習的には温度を表す方が多い。そこで、この章では運動エネルギーは T ではなく K で表す。

*2 温度の単位を表す K の記号は、他の単位の記号と同じように、

ここで 自由度 とは、独立した「運動の仕方」の数である。例えば単原子分子からなる気体（図 8.1）では、ひとつの分子（=原子）は3つの各方向（ x 方向、 y 方向、 z 方向）に自由に直線運動ができ、各方向の運動は互いに独立である（ x 方向に大きな速度で飛ぶからといって y 方向にはゆっくり飛ばねばならない、というような制約は存在しない）。従って、自由度は3である。

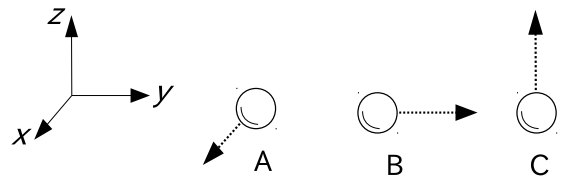


図 8.1 単原子分子気体の自由度。A: x 方向の直線運動、B: y 方向の直線運動、C: z 方向の直線運動。

式 (8.1) は、粒子の運動エネルギーが、平均的には、各自由度に等しく割り当てられることも主張している。例えば、ある物質の中で、多くの粒子が同じ特定の方向にだけ激しく運動して、その方向の自由度だけに大きな運動エネルギーを持つ、というような「偏った状態」にはならない、ということだ*3。その事情を表して、式 (8.1) のことを エネルギー等分配則 と呼ぶこともある。

式 (8.1) は「温度の定義」なので、とりあえずその由来や正当性に疑問を持つ必要はない。むしろ不思議なのは、式 (8.1) のように定義される温度が、我々の感覚である熱さ・冷たさや、温度計の指す値にきちんと対応していることだ。そのあたりは化学や物理学 II などでもらうとしよう。

式 (8.1) は、粒子の平均的な運動エネルギーは物体の

立体（正体）である。それに対して、式 (8.1) の左辺に出てくる、運動エネルギーを表す変数 K は、斜体で書いていることに注意。これらは全く別物だ。

*3 それにはちゃんとした理由があるのだが、難しいのでここでは述べない。興味ある人は、「統計力学」という分野を勉強してみよう！

温度に比例することを主張している。その比例係数に「ボルツマン定数」という怪しげな数とか「 $1/2$ 」とかが現れているが、これらは「ケルビン」という「温度の単位」を人類が採用してしまったことに対応するつじつま合わせ（単位換算）のための数に過ぎない。実際、運動エネルギーと温度が比例するのなら、いっそ（粒子の1自由度あたりの平均的な）運動エネルギーそのものを温度としまえばよかったのだが、今さらそれもめんどくさいので、人類はこれからも、温度とエネルギーを別の次元の物理量として扱っていくのだろう。

問 103 絶対温度の定義を5回書いて記憶せよ。

問 104 質量 m の気体分子の運動を考える。各分子が速度 (v_x, v_y, v_z) で空間を飛ぶとき、エネルギー等分配則によって、 v_x に関する運動エネルギー、つまり $mv_x^2/2$ の平均は、 $k_B T/2$ となる。従って、平均的には*4

$$|v_x| = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \quad (8.3)$$

となる。 $|v_y|$ 、 $|v_z|$ についても同様である。すると、速度の大きさ（つまり速さ） v は、

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (8.4)$$

なので、 v は平均的には、

$$v = \sqrt{3 \frac{k_B T}{m}} \quad (8.5)$$

となる。以下、 $T = 300 \text{ K}$ （摂氏 27 度）で考える：

- (1) 水素分子 H_2 の x 方向の平均的な速さを求めよ。
- (2) 水素分子 H_2 の平均的な速さを求めよ。
- (3) 窒素分子 N_2 の平均的な速さを求めよ。

ところで、「化学」で、「グラハムの法則」というのを習った人もいるだろう。それは、気体分子の速さ v が、その質量 m の平方根に反比例する、という法則だ。これは、式 (8.5) で明らかだ。

8.2 理想気体の状態方程式（気体分子運動論）

これまで学んだことを使って、気体の温度・圧力・体積間の関係を理論的に導いてみよう。

今、簡単のため、一辺の長さが L の立方体の箱を考え

る。図 8.2 のように、立方体の中心を原点 O とし、 x, y, z 軸のそれぞれに立方体の面が直交するように座標軸を設定する。点 $(L/2, 0, 0)$ で x 軸と直交する面を面 A と呼ぶ。

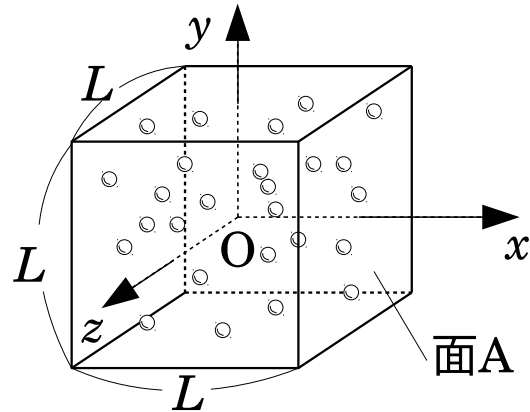


図 8.2 気体分子の運動を考える座標系と箱。

この箱の中に、 N 個の気体分子が入っているとします。ここで、以下の仮定を置く：

理想気体の仮定

- 気体分子の大きさは十分に小さい。
- 気体分子同士に働く力は無視できる。

この2つの仮定を満たす分子からなる気体を「理想気体」という。今、立方体の中には理想気体が入っているとします。

箱の内側では気体分子が飛び交っており、絶えずその一部が面 A に内側から衝突し、跳ね返されている。この衝撃が、面 A を外に押し出そうとする。従って、それを打ち消すように、外側から適当な圧力 (P とする) をかけないと、この箱は壊れてしまうだろう (図 8.3)。

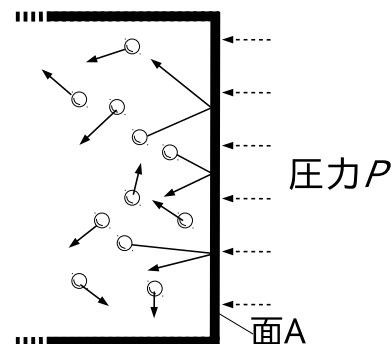


図 8.3 面 A の付近 (z 軸の正の方向から見たところ)。分子が面 A にひっきりなしにぶつかるので、面 A を外側から圧力 P で支えていないといけない。

*4 厳密には、 v_x の二乗平均平方根 (root-mean-square)。

その事情を詳しく見てみよう: 今, 簡単のために, どの気体分子も, x 軸に沿った方向 (x 軸の正の方向か負の方向) に一定値 $|v_x|$ という速さで動いているとしよう。つまり, x 軸方向の速度は, $|v_x|$ か $-|v_x|$ であるとする (実際は気体分子の速度はもっといろんな可能性があり, 速度の二乗平均平方根が $|v_x|$ に等しいのだが, 仮にそういうのを考慮して厳密に理論展開しても, 以下と同じ結論に至る)。従って, どの気体分子も, 時間 Δt の間に, $|v_x|\Delta t$ だけ x 軸に沿って移動する。従って, 時間 Δt の間に, 内側から面 A に衝突する気体分子は, 面 A から距離 $v_x\Delta t$ までの領域にいるはずだ。その領域の体積は

$$L^2 v_x \Delta t \quad (8.6)$$

である。箱の中の気体分子は均等に分布すると考えれば, 上述の領域の中の分子数は, 領域の体積に比例するので,

$$\frac{L^2 v_x \Delta t}{L^3} N \quad (8.7)$$

となる*5。この個数のうち, 半分が x 軸の正方向, 半分が x 軸の負の方向に進むので, 面 A に衝突する個数は,

$$\frac{1}{2} \frac{L^2 v_x \Delta t}{L^3} N = \frac{N v_x \Delta t}{2L} \quad (8.8)$$

となる。

さて, 気体分子 1 個が面 A にぶつかって跳ね返る状況を考えよう。気体分子が跳ね返る時, 面 A との間に摩擦が働かず, 分子の運動エネルギーは変化しない (弾性衝突) とすると, 面 A に平行な速度成分 (v_y と v_z) は変化せず, 面 A に垂直な成分 (v_x) が, 大きさを変えずに符号だけ反転する。すると, x 方向の運動量は, 衝突前は mv_x , 衝突後は $-mv_x$ になるので, 結局, 1 個の気体分子の衝突前後の運動量変化は次式になる:

$$-mv_x - (mv_x) = -2mv_x \quad (8.9)$$

実際は 1 個でなく, 式 (8.8) で表される個数が Δt の間に面 A にぶつかるので, それらの運動量変化の合計は次式になる:

$$\frac{N v_x \Delta t}{2L} \times (-2mv_x) = -\frac{N m v_x^2 \Delta t}{L} \quad (8.10)$$

この運動量変化は, 面 A に外側からかかる力がもたらす

力積に等しいはずだ (運動量変化=加えられた力積)。

面にかかる力は, 圧力 \times 面積であり, 面 A の面積は L^2 だ。従って, 面 A に (外側から) かかる力は $-PL^2$ である (マイナスは, 力の向き, つまり x 軸の負の方向を表すためにつけた)。その力による力積は,

$$-PL^2 \Delta t \quad (8.11)$$

となる。式 (8.10) と式 (8.11) が一致することが, 面 A が静止する条件である:

$$-PL^2 \Delta t = -\frac{N m v_x^2 \Delta t}{L} \quad (8.12)$$

これを整理すると,

$$PL^3 = N m v_x^2 \quad (8.13)$$

となる。いま, L^3 は箱の体積 V なので, 式 (8.13) は

$$PV = N m v_x^2 \quad (8.14)$$

となる。さらに, 式 (8.3) より,

$$v_x^2 = \frac{k_B T}{m} \quad (8.15)$$

なので, 式 (8.14) は, 以下のようになる:

理想気体の状態方程式

$$PV = N k_B T \quad (8.16)$$

ここで, 分子数を「個」でなくて「モル」で数えよう。すなわち, N 個が n モルに相当するとすれば, $N = n N_A$ である (N_A はアボガドロ定数)。従って, 式 (8.16) は,

$$PV = n N_A k_B T \quad (8.17)$$

となる。ここで, 物理学の慣習として, 以下の定数を導入する:

気体定数の定義

以下で定義される定数 R を, 気体定数 (gas constant) と呼ぶ:

$$R = N_A k_B \quad (8.18)$$

その値は, 8.314472... J mol⁻¹K⁻¹ である。

すると, 式 (8.17) は, 以下のよう書ける:

理想気体の状態方程式 (モルで表す場合)

$$PV = nRT \quad (8.19)$$

*5 箱の体積は L^3 であり, その中に N 個の気体分子が均等に分布している。従って, 箱の中の気体分子の数密度 (単位体積当たりの分子数) は, N/L^3 だ。これに, いま考えている領域の体積 (式 (8.6)) をかければ, その領域内の気体分子数が得られるはずだ。それが式 (8.7) である。

問 105 理想気体とは何か?

問 106 理想気体の状態方程式を導出せよ (上記の解説を整理して再現すればよい)。

問 107

- (1) ボルツマン定数 k_B の値を, 有効数字 3 桁で述べよ。
- (2) 気体定数 R の値を, 有効数字 3 桁で述べよ。
- (3) ボルツマン定数と気体定数の関係を, 式で述べよ。

8.3 内部エネルギーと定積モル比熱

さて, 物質や物体を構成する全ての粒子のエネルギー (運動エネルギーとポテンシャルエネルギー) を合計したものを, その物質や物体の「内部エネルギー」という (定義)。ここで, 理想気体を考えよう。理想気体では, 気体分子が相互に及ぼす力は無視できるので, 気体分子同士が及ぼし合う力によるポテンシャルエネルギーは無視してもかまわない。また, 非常な低温でもない限り, 重力によるポテンシャルエネルギーは, 運動エネルギーよりはるかに小さい。従って, 理想気体の内部エネルギーは, 大部分が構成粒子 (気体分子) の運動エネルギーの総和であると考えてよい^{*6}。

エネルギー等分配則によれば, 運動エネルギーは 1 粒子あたり・1 自由度あたり, 平均的に $k_B T/2$ だ。すると, 自由度 F を持つ気体分子が N 個からなる気体の内部エネルギー U は^{*7},

$$U = \frac{F}{2} N k_B T \quad (8.20)$$

となる。すなわち, 理想気体の内部エネルギーは, 温度に比例し, 圧力や体積とは直接には無関係である^{*8}。

さて, 式 (8.20) において分子が n モルあるとすると, $N = nN_A$ だから,

$$U = \frac{F}{2} n N_A k_B T \quad (8.21)$$

^{*6} もし粒子が電離していたら, 電気的なポテンシャルエネルギーを持つかもしれないが, その場合は粒子同士の間にクーロン力が働くので, 理想気体の仮定に反する。従って, 電気的なポテンシャルエネルギーも考えなくてよい。

^{*7} 力学では, U は多くの場合, ポテンシャルエネルギーを表す記号として慣習的に使われる。しかし, 熱力学では慣習的に U は内部エネルギーを表す。ここでは熱力学の慣習に従う。

^{*8} もちろん, 圧力と体積は温度と関係があるから, 圧力や体積は, 温度を介して間接的な関係はある。

となる。式 (8.18) を使うと,

$$U = \frac{F}{2} n R T \quad (8.22)$$

となる。特に, 分子数を 1 モルとすると,

$$U = \frac{F}{2} R T \quad (8.23)$$

この, (1 モルあたりの) 内部エネルギー U と温度 T の比例係数は重要だ。それは, 1 モルの物体の温度を 1 K だけ変化させるとどれだけ内部エネルギーが変化するかを表す物理量で, 「定積モル比熱」と呼ばれ, 通常, C_V という記号で表現される:

理想気体の定積モル比熱

$$C_V = \frac{F}{2} R \quad (8.24)$$

ここで F は気体分子の自由度, R は気体定数。

では, 自由度 F はどう決まるのだろうか? 前述のように, 単原子分子気体 (He, Ne 等) は 3 方向の直線運動の自由度を持つので $F = 3$ である。ところが, 2 原子分子 (H_2 , O_2 , N_2 等) は直線運動だけでなく, 回転運動も行う^{*9}。直線状の棒を回すには独立した (つまり互いに直交した) 軸が 2 つある^{*10} ので, これらの回転の自由度は 2 である。従って, これらの分子の自由度 F は, 直線運動に 3, 回転運動に 2 で, 合計 5 となる (図 8.4)。

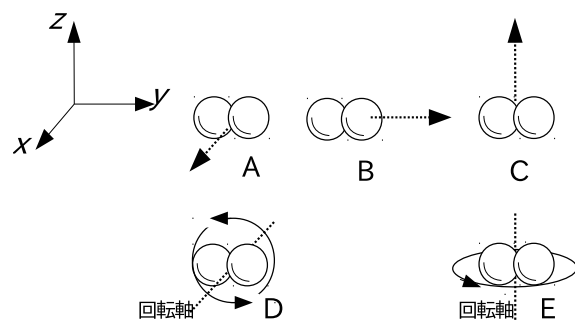


図 8.4 2 原子分子気体の自由度。A: x 方向の直線運動, B: y 方向の直線運動, C: z 方向の直線運動, D: x 軸まわりの回転運動, E: z 軸まわりの回転運動。

従って,

^{*9} 回転運動にも運動エネルギーが与えられることは, 後の章で学ぶ。

^{*10} 一般に, 物体を回転させる独立な回転軸は 3 つある。しかし, 直線状の分子の場合は, 直線の断面は大きさを持たない点とみなしてよい。従って, 直線を軸にする回転は考えなくてよい。同様に, 1 原子分子は点とみなしてよいので, いずれの方向を軸とする回転も, 考えなくてよい。

理想気体の定積モル比熱 (続き)

常温付近において,

$$\text{単原子分子理想気体では, } C_v = \frac{3}{2}R \quad (8.25)$$

$$\text{2原子分子理想気体では, } C_v = \frac{5}{2}R \quad (8.26)$$

となる^{*11*12}。ただし、これらの式は(たとえ理想気体に対しても)厳密には成り立たない。特に、低温になると、回転の自由度が意味を持たなくなる(自由度が減る)とか、高温になると振動の自由度が加わってくる(自由度が増える)などの、不思議な現象が起きる。それらは量子力学を使わないと説明できない。

8.4 熱力学第一法則

我々は既に「力学的エネルギー保存則」を学んだが、エネルギーは、熱も含めて、より広い範囲で保存する(どこかに消えたりどこかから湧いて出たりしない)。そのことを熱力学でも利用する。それは以下のような形である:

$$\Delta U = Q + W \quad (8.27)$$

ただし、 U は系の内部エネルギー、 ΔU は内部エネルギーの変化、 Q は外から系に与えられた熱、 W は外から系になされた仕事である。要するに「熱と仕事を与えられたぶんだけエネルギーが増える」というわけだ。

問 108 熱力学第一法則を 5 回書いて記憶せよ。「ただし書き」もちゃんと書くこと!

ここで、 ΔU は微小量でなくても構わない。普通、 Δ なんちゃらという(有限な)微小量を考えることが多いが、熱力学で出てくる Δ は「微小」ではない、単なる「差」とか「変化」を表す。微小を意味するときは、 Δ でなく d を使うことが多い。微小量で式 (8.27) を表現

^{*11} 高校で化学や物理学を学んだ人は式 (8.26) によく似た式として、単原子分子の定積モル比熱を思い出すだろう。しかし、それと式 (8.26) は全く違う内容だ。式 (8.26) は「2 原子分子の定積モル比熱」である。結果的に同じ式になっているが、表す内容は全く違うものだ。

^{*12} 理想気体では分子の大きさは無視できるはずなのに、「2 原子」分子を考えるのは変ではないか、と思う人もいるかもしれない。実は、理想気体で「分子の大きさを無視する」としたのは、分子の大きさによって容器(分子が自由に飛び交うことのできる空間)の体積が実質的に目減りするようなことがない、という意味だ。それに対して、2 原子分子を考えるのは、分子の回転運動が運動エネルギーを持つという性質を勘案するためであり、それは理想気体の仮定とは無関係である。

すると,

$$dU = dQ + dW \quad (8.28)$$

となる(dQ は外から系に加えられた微小な熱、 dW は外から系になされた微小な仕事)。ところが、式 (3.30) で学んだように、気体の体積の微小な変化 dV に伴って、系が外界からされる仕事は、

$$dW = -P dV \quad (8.29)$$

である。これを使うと上の式は、

$$dU = dQ - PdV \quad (8.30)$$

と書ける。これを变形すると、次式になる:

$$dU + PdV = dQ \quad (8.31)$$

これは微小量での式だが、もし圧力 P が一定ならば、容易に積分できて、

$$\Delta U + P\Delta V = Q \quad (8.32)$$

となる。この式は次節の伏線である。

8.5 エンタルピー

多くの1年生は「化学」等で、エンタルピーという概念とエントロピーという概念を習ったあと、たいてい、混乱する。「エンタルピーとエントロピーはどう違うの?」と悩むのだ。君はどうだろう?

そのような悩みは、定義を覚えていないことから発する。くどいようだが、まず定義をきちんと覚えないと何も話がはじまらない。

エンタルピーの定義

系の内部エネルギーを U 、圧力を P 、体積を V とすると、

$$H := U + PV \quad (8.33)$$

をエンタルピーという(定義)。

問 109 エンタルピーの定義を 10 回書いて記憶せよ。

この H の変化を考えてみよう。すなわち、ある状態(内部エネルギー U 、圧力 P 、体積 V 、エンタルピー H) から変化した状態(内部エネルギー $U + \Delta U$ 、圧力 $P + \Delta P$ 、体積 $V + \Delta V$ 、エンタルピー $H + \Delta H$) を考え、

そのときのエンタルピーの変化を考えよう。変化前は、

$$H = U + PV \quad (8.34)$$

変化後は、

$$H + \Delta H = (U + \Delta U) + (P + \Delta P)(V + \Delta V) \quad (8.35)$$

後者から前者を引くと、

$$\Delta H = \Delta U + P\Delta V + V\Delta P + \Delta P\Delta V \quad (8.36)$$

となる。もしこの変化が、圧力は不変（一定）の状態で行われたら、 $\Delta P = 0$ なので、上の式は、

$$\Delta H = \Delta U + P\Delta V \quad (8.37)$$

となる。この右辺は式 (8.32) の左辺と同じだ。従って、

$$\Delta H = Q \quad (8.38)$$

となる。つまり、定圧変化では、系に加えられた熱量は、エンタルピーの変化（増加分）に等しい。これがエンタルピーの「意味」だ。

8.6 エントロピー

エントロピーは、エンタルピーとは全く異なる量である。その定義は以下の通り：

エントロピーの定義

系を、ある状態から別の状態に可逆的に変化させるとき、

$$\Delta S = \int_{\text{状態 1}}^{\text{状態 2}} \frac{dQ}{T} \quad (8.39)$$

を「エントロピーの変化」と定義する。ここで Q は外から系に与えられる熱量、 T は絶対温度である。

問 110 エントロピーの定義を 10 回書いて記憶せよ。

このように、エントロピーは、それ自体ではなく、その「変化」が先に定義される。エントロピーの「意味」は、話が長くなるのでここでは述べない。それよりも君はまず、式 (8.33)、式 (8.39) をしっかり頭に叩き込むべきだ。それをしないであれこれ考えたり悩んだりしても無意味である。

8.7 解答

答 103 略。

答 104

- (1) H_2 の分子量は 2。従って H_2 の 1 分子の質量 m は、 $(2 \times 10^{-3}/N_A)$ kg である。ここで N_A はアボガドロ定数。式 (8.3) に代入して、

$$|v_x| = 1.1 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

- (2) 式 (8.5) より、平均的な v は、平均的な $|v_x|$ の $\sqrt{3}$ 倍。従って、 $v = 1.9 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$ 。

- (3) 式 (8.5) より、平均的な v は、分子量の平方根に反比例する。 N_2 の分子量 (28) は H_2 の分子量 (2) の 14 倍。従って、 N_2 の平均的な v は、 H_2 の平均的な v の $1/\sqrt{14} = 0.27$ 倍。従って、 $v = 5.2 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}$ 。

答 105 略。

答 106 略。

答 107

- (1) $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

- (2) $R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

- (3) $R = N_A k_B$ 。ここで N_A はアボガドロ定数。

第9章

力学的エネルギー保存則(2)

第6章では、1次元の直線上での質点の運動について、力学的エネルギー保存則が成り立つことを確かめた。ところで、この力学的エネルギー保存則が成り立つのは1次元での運動に限られているわけではない。運動の範囲を3次元空間に拡張しても、この法則はきちんと成り立つのだ*1。1章で述べた科学の在り方(「科学は、より一般性の高い法則を見出すことを目指す」)に従い、力学的エネルギー保存則が3次元空間での運動でも成り立つことを確かめよう。

まず、これまで1次元の直線上での運動に限定して考えてきた「仕事」「ポテンシャルエネルギー」「運動エネルギー」を、3次元空間で再定義しよう。とりあえずいちばん簡単なのは「運動エネルギー」だ。

9.1 3次元空間における運動エネルギー

前章を振り返ると、質量 m の質点が速度 v で直線的な運動(1次元の運動)をしているとき、その運動エネルギー $T(v)$ は、

$$T(v) = \frac{1}{2}mv^2 \quad (9.1)$$

と定義された(式(6.12))。速度は本来、ベクトルなので、質点の運動が3次元であるならば、式(9.1)の v^2 は速度ベクトル \mathbf{v} によって、 $|\mathbf{v}|^2$ と置き換えたい。ここで、

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad (9.2)$$

とすると、

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (9.3)$$

である。多くの教科書では、 $|\mathbf{v}|^2$ のことを単に v^2 と書く慣習がある。ここでもその慣習に習おう。すなわち、

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (9.4)$$

である(約束)。そこで、3次元では、式(9.1)のかわりに、

$$T(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (9.5)$$

を運動エネルギーの定義としよう。これは運動が1次元のときには、式(9.1)に帰着する。つまり、式(9.1)を内包した定義になっている。

9.2 3次元空間における仕事

次に、仕事を3次元に拡張する。仕事とは、「力と、その力が働く質点が“力と同じ向き”に動いた距離との掛け算」であった。この定義は、3次元空間でも成り立つ。ある質点にかかる力を \mathbf{F} とし、その質点が動いた距離と方向を表すベクトル(これを変位ベクトルという)を $\Delta\mathbf{r}$ とする。 \mathbf{F} と $\Delta\mathbf{r}$ のなす角を θ とすると、「その力が働く質点が“力と同じ向き”に動いた距離」は、

$$|\Delta\mathbf{r}| \cos \theta \quad (9.6)$$

となる。従って、仕事 W は、

$$W = |\mathbf{F}| |\Delta\mathbf{r}| \cos \theta \quad (9.7)$$

となる。ところが、内積の定義から、これは

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} \quad (9.8)$$

ということと同じである*2。式(9.8)は、式(3.13)を3次元に拡張した式でもある。

よくある質問 49 ベクトルの内積なんてどうして勉強するのかと思ってましたが、こういうことだったんですね。... 他にも内積の用途はいろいろあります。

式(9.8)は、質点が動く範囲で \mathbf{F} が一定であるときにしか成り立たない。一般には、 \mathbf{F} は場所によって異なりうる。そこで、質点の移動の経路をたくさんの細かい区

*1 無論、2次元平面上の運動についても成り立つ。

*2 式(9.8)の中の「 \cdot 」は、ベクトルの内積を表す。内積とは何か、わからない人は、数学リメディアル教材を参照せよ。

間に刻んで、各区間では F がほとんど一定であるとみなそう。つまり、式 (3.16) から式 (3.20) までと同じように考えればよい。

いま、位置ベクトル r_0 の位置から位置ベクトル r_n の位置まで、質点が力を受けて動くとしよう。この経路を細かく細かく刻み、途中の点の位置ベクトルを r_1, r_2, \dots とする。いま、 k を 1 以上 n 以下の整数とし、 r_{k-1} と r_k という隣接する 2 つの点を結ぶ変位ベクトルを

$$\Delta r_k = r_k - r_{k-1} \tag{9.9}$$

とする。この 2 点の間で力は F_k でほぼ一定とする (図 9.1)。この 2 点の間で力がなす仕事 ΔW_k は、式 (9.8)

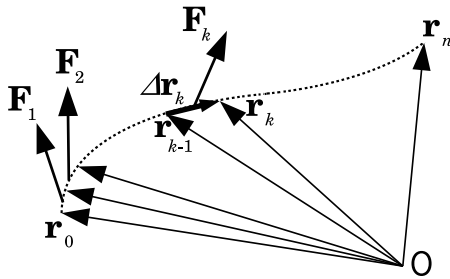


図 9.1 質点の動く経路を細かく分割する。

より

$$\Delta W_k \doteq F_k \cdot \Delta r_k \tag{9.10}$$

となる。これを全区間について合計すれば、 r_0 から r_n までの移動でなされる仕事 W になる：

$$W \doteq \sum_{k=1}^n \Delta W_k \doteq \sum_{k=1}^n F_k \cdot \Delta r_k \tag{9.11}$$

これは式 (3.18) を 3 次元に拡張した式でもある。ここで刻みをどんどん小さくしていけば、 Σ は \int になり、 Δ は d になって、

$$W = \int_{r_0}^r F \cdot dr \tag{9.12}$$

となる (r_n を改めて r とおいた)。この式は式 (3.20) を 3 次元に拡張した式だ。この積分は、始点 r_0 と終点 r のみならず、移動の経路にも依存するから、その経路を Γ と名づければ、

3次元空間における仕事の定義

$$W = \int_{\Gamma} F \cdot dr \tag{9.13}$$

この式は、最も一般的な仕事の定義式である。ところが、ここで出てきた積分は、君にとって目新しいものだろう。ここでは被積分関数も積分変数もベクトルであり、「関数と微小量の掛け算」がここではベクトルの内積であり、しかも積分区間が「経路 Γ 」であるのだ。このように、ある経路に沿って、ベクトルと微小ベクトルの内積を足し合わせるような積分を、線積分 という。3次元では、仕事は線積分で定義されるのだ。

問 111 仕事を 3次元空間で定義せよ。

9.3 3次元空間におけるポテンシャルエネルギー

仕事の定義を上述のように改めること以外は、ポテンシャルエネルギーの定義は 1次元のときと同じだ。式 (3.36)、つまり、式 (3.38)、式 (3.39) の x を r に置き換えたものが、3次元空間におけるポテンシャルエネルギーだ。すなわち、

ポテンシャルエネルギーの定義 (1')

$$U(r) = -W(r) \tag{9.14}$$

で定義される関数 $U(r)$ を、「ポテンシャルエネルギー」という。ここで $W(r)$ は、物体を基準点から点 r まで運ぶときに、物体にかかっている保存力がなす仕事である。

ポテンシャルエネルギーの定義 (2')

$$U(r) = W'(r) \tag{9.15}$$

で定義される関数 $U(r)$ を、「ポテンシャルエネルギー」という。ここで $W'(r)$ は、物体を基準点から点 r まで運ぶときに、かかっている保存力に逆らって誰かがなす仕事である。

ポテンシャルエネルギーの定義 (3')

$$U(\mathbf{r}) = W''(\mathbf{r}) \quad (9.16)$$

で定義される関数 $U(\mathbf{r})$ を、「ポテンシャルエネルギー」という。ここで $W''(\mathbf{r})$ は、物体を点 \mathbf{r} から基準点まで運ぶときに、物体にかかっている保存力がなす仕事である。

無論、これらの3つの定義は互いに同値だ。力が保存力でなければならない、ということに注意しよう。

問 112 物体が保存力 \mathbf{F} を受けて、ある点 \mathbf{r}_0 から別の点 \mathbf{r}_1 まで移動するとき、 \mathbf{F} がなす仕事 W_{01} は、

$$W_{01} = U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}_1) \quad (9.17)$$

であることを示せ。ここで U はポテンシャルエネルギーである。

問 113 保存力が、3次元空間の任意の閉曲線（始点と終点が一致する曲線）に沿ってなす仕事は、必ず0になることを示せ。

9.4 3次元空間における力学的エネルギー保存則

役者は揃った。ではいよいよ、力学的エネルギー保存則が3次元でも成り立つことを確認していこう。1次元で力学的エネルギー保存則を導いたとき、式(6.6)から式(6.8)にかけて、運動方程式を位置で積分した。3次元でも同じ事をやるのだ。

まず、運動方程式:

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (9.18)$$

を考える。 \mathbf{F} , \mathbf{v} , m , t はそれぞれ質点に働く力、質点の速度、質点の質量、そして時刻である。質点の位置ベクトルを $\mathbf{r}(t)$ とする。時刻 t と、そこから微小時間 dt だけ経過した $t + dt$ で、質点は少し違う位置にいる(移動している)。その差、つまり変位を $d\mathbf{r}$ と書こう。つまり、

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t) \quad (9.19)$$

である。この両辺を dt で割ったもの(つまり位置を時刻で微分したもの)が速度 \mathbf{v} だ。つまり、 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ だ。従って、

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt \quad (9.20)$$

である。式(9.18)に式(9.20)を辺々、内積すると、

$$\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \bullet \mathbf{v} dt \quad (9.21)$$

となる。これはちょうど、式(6.7)を3次元に拡張した式だ。

ここで、時刻 t_0 から t_1 までの運動を考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}(t_0), \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1) \\ \mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}(t_0), \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t_1) \end{aligned}$$

とし、 \mathbf{r}_0 から \mathbf{r}_1 までの質点の運動の軌跡を Γ とする。 Γ をたくさんの短い区間に分割し、それぞれの区間で式(9.21)を考えて足し合わせる。つまり、時刻 t_0 から t_1 までの間で、式(9.21)を積分すると、

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \bullet \mathbf{v} dt \quad (9.22)$$

となる。左辺は式(9.13)の右辺と同じ形になっている。つまり、質点に働く力がなす仕事 W_{01} である。

ここで、

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad (9.23)$$

とすれば、

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) \quad (9.24)$$

である。これらを使って式(9.22)の右辺を成分で書くと、次のようになる:

$$\int_{t_0}^{t_1} m \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) \bullet (v_x, v_y, v_z) dt \quad (9.25)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} \right) dt \quad (9.26)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m v_x \frac{dv_x}{dt} dt + \int_{t_0}^{t_1} m v_y \frac{dv_y}{dt} dt + \int_{t_0}^{t_1} m v_z \frac{dv_z}{dt} dt$$

$$= \int_{v_x(t_0)}^{v_x(t_1)} m v_x dv_x + \int_{v_y(t_0)}^{v_y(t_1)} m v_y dv_y + \int_{v_z(t_0)}^{v_z(t_1)} m v_z dv_z$$

$$= \left[\frac{1}{2} m v_x^2 \right]_{v_x(t_0)}^{v_x(t_1)} + \left[\frac{1}{2} m v_y^2 \right]_{v_y(t_0)}^{v_y(t_1)} + \left[\frac{1}{2} m v_z^2 \right]_{v_z(t_0)}^{v_z(t_1)}$$

$$= \frac{1}{2} m (v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1) + v_z^2(t_1))$$

$$- \frac{1}{2} m (v_x^2(t_0) + v_y^2(t_0) + v_z^2(t_0)) \quad (9.27)$$

$$= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 \quad (9.28)$$

となる。従って、式(9.22)は次式のようになる:

$$W_{01} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 \quad (9.29)$$

ここで式 (9.5) を使うと、式 (9.29) は

$$W_{01} = T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_0) \quad (9.30)$$

となる。ここで、 $T(\mathbf{v})$ は質点の運動エネルギーである。

式 (9.30) は、1 次元で導いた式 (6.13) と同じ形の式だ。つまり、3 次元の運動でも、力がなした仕事は運動エネルギーの変化に等しい、ということが成り立つ。

ところで、力が保存力の場合は、式 (9.30) の左辺を式 (9.17) で書き換えると、

$$U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}_1) = T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_0) \quad (9.31)$$

となる。あるいは、

$$T(\mathbf{v}_0) + U(\mathbf{r}_0) = T(\mathbf{v}_1) + U(\mathbf{r}_1) \quad (9.32)$$

となる。すなわち、運動の最初 (時刻 t_0) と運動の最後 (時刻 t_1) で、「運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和」は等しいのだ。1 次元のときと同様に、「運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和」のことを、「力学的エネルギー」と呼ぼう (定義)。すなわち、式 (9.32) によって、3 次元における力学的エネルギー保存則が確かめられた!

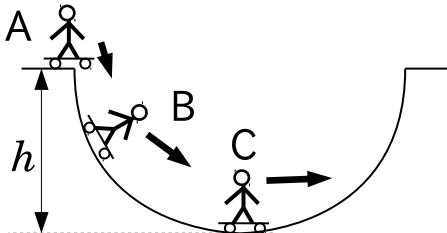


図 9.2 スケートボードのハーフパイプ

問 114 スケートボードで、ハーフパイプを降りる人 (スケートボードとあわせて質量 m) の運動を考えよう (図 9.2)。ハーフパイプの縁 A にいるときは速度 0 である。そこから静かにハーフパイプの側面を降りはじめ、重力にまかせて加速しながら降りていき (点 B)、ハーフパイプの底 (点 C) に至る。点 C に至ったときは、速さ v で水平方向に動いている。ハーフパイプの底と縁の高度差は h であるとする。ただし摩擦や空気抵抗や車輪の慣性モーメントなどは無視する。

- (1) 重力加速度を g とする。次式を示せ:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad (9.33)$$

- (2) $h = 5 \text{ m}$ のとき、 v を求めよ。

- (3) このハーフパイプの断面が半円形であるとする、点 C でその人が受ける垂直抗力の大きさは重力の何倍か?

9.5 振り子の運動

振り子の運動を考えてみよう。

問 115 天井に固定された点 P から長さ l の糸が垂れており、その先に質量 m の質点がついている (図 9.3)。質点が最も下に来たとき (糸が鉛直になったとき) の位置を O とする。糸をびんと張ったまま質点を少し持ち上げたときの位置を Q とする。Q から静かに質点を手放すと、質点は P, O, Q を含む鉛直平面内で振動運動をする。

時刻 t で質点は点 $X(t)$ にあるとし、角 OPX を θ としよう。当然、 θ は時間の関数だ。以下、糸の質量は 0 とする。空気抵抗は無視する。

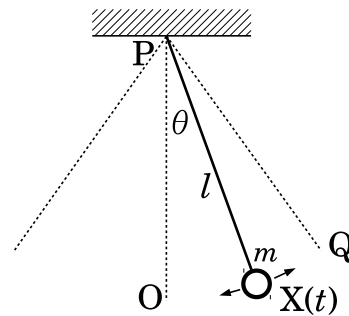


図 9.3 振り子

- (1) 時刻 t における質点の速度を $v(t)$ とすると、

$$|v(t)| = \left| l \frac{d\theta}{dt} \right| \quad (9.34)$$

であることを示せ。ヒント: t から $t + dt$ の間に X が移動するのは、扇形の弧の部分である。その弧の長さ (つまり移動距離) は、「半径」かける「角度の変化」であり、「角度の変化」は $\theta(t + dt) - \theta(t)$ である。また、速度の絶対値 (つまり速さ) とは、 t から $t + dt$ の間に X が移動した距離を時間間隔 dt で割ったものだ。

- (2) 時刻 t における質点の運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U は、それぞれ次のようになることを示せ:

$$T = \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (9.35)$$

$$U = mgl(1 - \cos \theta) \quad (9.36)$$

ただし、質点が点 O にあるとき $U = 0$ と定める。

- (3) 働く力は重力と張力だけだが、重力は保存力であり、張力は仕事をしない(移動方向と力の方向が直交している)。従って力学的エネルギー保存則が成り立つ。すなわち、 $T + U$ は時刻 t によらず一定である。従って、 $T + U$ を t で微分すると、0 にならねばならない。このことから、次式を導け：

$$ml^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl \sin\theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (9.37)$$

- (4) その結果、次式(振り子の運動をあらわす微分方程式)を得ることを示せ：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\theta \quad (9.38)$$

- (5) θ (ラジアン) が 0 に近い場合、振り子の運動方程式は、近似的に次のようになることを示せ：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \quad (9.39)$$

この近似式が成り立つとして、以下の小問に答えよ：

- (6) $\omega = \sqrt{g/l}$ とすると式(9.39)は次式になることを示せ：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta \quad (9.40)$$

これは、関数 $\theta(t)$ に関する、単振動の微分方程式だ。

- (7) $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$ は上の微分方程式の解であることを示せ。ただし θ_0 は定数とする。
 (8) 振り子の周期 τ を、 g と l であらわせ*3。
 (9) $l = 1.0 \text{ m}$ のとき、振り子の振動の角速度と周期を求めよ。
 (10) 振り子の周期を半分にするには、 l を何倍にすればよいか?

問 116 前問で見たように、振幅が十分に小さいときに限れば(すなわち θ が 0 に近ければ)、振り子の周期は糸の長さ l と重力加速度 g だけで決まってしまう、質点の質量 m や、振れ幅 θ_0 などには依らない。これは、振り子の重要な性質である(これを「振り子の等時性という」)。

- (1) これを利用して、重力加速度 g を測定する。つまり、長さ l の糸の先に適当な重りをつけて振動させ、そ

の周期 τ を測ったとする。では、 l と τ から g を求める式は?

- (2) 月面では、地球上に比べて振り子の周期は何倍になるか?

よくある質問 50 振り子といえばフーコーですね。振り子で地球の自転を証明したんですよ。... そうです。自転によって生じる「コリオリ力」という見かけの力が働くことを証明しました。

9.6 ポテンシャルエネルギーと力の関係

(この節は、後の話には関係しないので、読み飛ばしても良い。秋学期に電磁気学を学ぶ時に、ここを復習すると役立つだろう。)

さて、力学的エネルギー保存則の話から少し外れるが、ここで力とポテンシャルエネルギーの関係をもう少し深くみておこう。いま、符号を無視しておおまかに言えば、力の(線)積分がポテンシャルエネルギーを与えるわけだから、積分と微分は互いに逆の操作であることを考えれば、ポテンシャルエネルギーの微分が力を与えるのではないだろうか? 実は、この発想は正しい。以下にそれを説明しよう：

いま、ある質点に働く力が保存力であり、しかも場所だけによって一意的に定まり、時刻や速度などには陽に依存しない*4としよう。

とりあえず、簡単のため、物体の移動は直線上(x 軸の上)に制限され、働く力もその直線に沿った方向に限定されるとしよう。物体が位置 x_0 から x_1 まで動くときに、力 F がなす仕事 W_{01} は、式(6.26)より、

$$W_{01} = -U(x_1) + U(x_0) \quad (9.41)$$

である(U はポテンシャルエネルギー)。ここで、 x_0 を x とし、 x_1 を x から非常に近い位置 $x + dx$ とすると(dx は 0 に近い量)、

$$W_{01} = -U(x + dx) + U(x) \quad (9.42)$$

となる。ところで、仕事の定義から、 W_{01} は次式のよう

*3 普通は周期は T で表す慣習が多いが、ここでは T は運動エネルギーの記号に使っているため、周期は τ (ギリシア文字のタウ)を使う。

*4 この「陽に」(explicit)という言葉は科学ではよく使う。「あからさまに」とか「直接的に」という意味。今の場合、時間と共に場所が変われば力も変わるかもしれないが、それは場所が変わったからであり、時間の変化が直接的に力を変えたわけではない、ということ。

に書ける:

$$W_{01} = F dx \quad (9.43)$$

これらの2つの式から,

$$F dx = -U(x+dx) + U(x) \quad (9.44)$$

となる。両辺を dx で割って,

$$F = -\frac{U(x+dx) - U(x)}{dx} \quad (9.45)$$

ここで dx が十分に0に近いことを思い出せば,

ポテンシャルエネルギーと力の関係 (1次元)

$$F = -\frac{dU}{dx} \quad (9.46)$$

である。つまり、力は、ポテンシャルエネルギーを微分してマイナスをつけたものに等しい。

この話は3次元空間に拡張できる。物体が力 \mathbf{F} を受けながら位置 \mathbf{r} から、わずかだけ離れた位置 $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ に移動することを考える。

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) \quad (9.47)$$

は十分に小さいベクトルである。すると、力がなす仕事 W は、式 (9.42) と同じように考えれば,

$$W = -U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \quad (9.48)$$

である (U はポテンシャルエネルギー)。ここで全微分^{*5}を使うと,

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) &= U(x+dx, y+dy, z+dz) \\ &= U(x, y, z) + \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \\ &= U(\mathbf{r}) + \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad (9.49) \end{aligned}$$

である。これを式 (9.48) に代入すると,

$$\begin{aligned} W &= -U(\mathbf{r}) - \frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz + U(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz \\ &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \cdot d\mathbf{r} \quad (9.50) \end{aligned}$$

となる。一方、仕事の定義から、 W は次式のようにも書

ける:

$$W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.51)$$

従って,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \cdot d\mathbf{r} \quad (9.52)$$

である。 dx, dy, dz は0に近い任意の量なので、上の式が成り立つには,

ポテンシャルエネルギーと力の関係 (3次元)

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \quad (9.53)$$

でなければならない^{*6}。ここで、"grad" という記号を,

$$\text{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \quad (9.54)$$

と定義する^{*7}。この記号を使うと、式 (9.53) は次式のように書ける:

$$\mathbf{F} = -\text{grad} U \quad (9.55)$$

9.7 解答

答 111 質点を経路 Γ に沿って移動するとき、各位置で質点にかかる力を \mathbf{F} とすると、その経路に沿って \mathbf{F} が質点に対してなした仕事 W は,

$$W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

である。

答 112 物体を基準点から点 \mathbf{r}_0 まで運ぶときに保存力 \mathbf{F} がなす仕事を $W(\mathbf{r}_0)$ とすると、定義から,

$$U(\mathbf{r}_0) = -W(\mathbf{r}_0) \quad (9.56)$$

^{*6} $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ とする。式 (9.52) で $dx \neq 0$ として $dy = dz = 0$ とすると,

$$F_x dx = -\frac{\partial U}{\partial x} dx, \quad \text{したがって, } F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

を得る。 $dy \neq 0$ で $dx = dz = 0$ の場合や、 $dz \neq 0$ で $dx = dy = 0$ の場合も同様に考えれば,

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

を得る。したがって式 (9.53) が成り立つ。

^{*7} この grad とは、"gradient" の略であり、日本語では「勾配」と言う。その意味は、いずれ基礎数学や秋学期の物理学で学ぶだろう。

^{*5} 数学リメディアル教材参照。

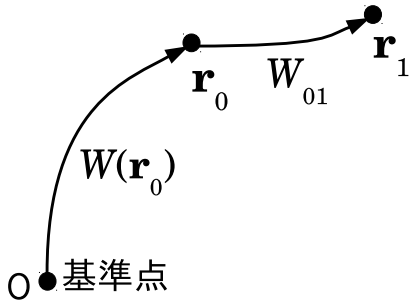


図 9.4 問 112 の仕事の経路。

である。同様に、物体を基準点から点 r_1 まで運ぶときに保存力 F がなす仕事を $W(r_1)$ とすると、

$$U(r_1) = -W(r_1) \quad (9.57)$$

である。ここで、基準点から点 r_1 へ物体を運ぶときの経路を、点 r_0 を経由するようにとれば (図 9.4), 保存力ゆえに仕事は経路によらず一定なので、

$$W(r_1) = W(r_0) + W_{01} \quad (9.58)$$

となる。ここで W_{01} は物体を点 r_0 から点 r_1 に運ぶときの仕事。この式の $W(r_0), W(r_1)$ を、式 (9.56), 式 (9.57) を使って置き換えると、

$$-U(r_1) = -U(r_0) + W_{01} \quad (9.59)$$

となる。従って、

$$U(r_0) - U(r_1) = W_{01} \quad (9.60)$$

答 113 閉曲線 Γ に沿う移動によってなす仕事を W とする。移動の開始点を r_0 とすると、移動の終了点も r_0 である。保存力だから、式 (9.17) で、 $r_1 = r_0, W_{01} = W$ として、

$$W = U(r_0) - U(r_0) \quad (9.61)$$

となる。右辺は 0 だから、結局、 $W = 0$ となる。

答 114

- (1) 点 C をポテンシャルエネルギーの基準点とする。点 A では、運動エネルギーは 0, ポテンシャルエネルギーは mgh である。従って力学的エネルギーは mgh となる。点 C では、運動エネルギーは $mv^2/2$, ポテンシャルエネルギーは 0 である。従って力学的エネルギーは $mv^2/2$ となる。働く力は重力と垂直抗力だけだが、重力は保存力であり、垂直抗力は仕事をしない (移動方向と力の方向が直交している)。従って力学的エネルギー保存則が成り立つ。

すなわち、点 A と点 C で力学的エネルギーは等しいことから、与式を得る。

- (2) 前小問より、

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m s}^{-2} \times 5 \text{ m}} = 9.9 \text{ m s}^{-1}$$

- (3) 半円形ハーフパイプの高さが h なのだから、この円の半径は h である。式 (5.37) より、C 点では人は円の中心に向かって (つまり上向きに), mv^2/h という合力を受けるはず。一方、垂直抗力を N とする。人には下向きに mg という重力も働くから、上向きの力は、垂直抗力と重力の合力であり、その大きさは $N - mg$ である。従って、

$$N - mg = \frac{mv^2}{h} \quad (9.62)$$

である。従って、

$$N = \frac{mv^2}{h} + mg \quad (9.63)$$

である。小問 (1) より $mv^2 = 2mgh$ だから、

$$N = 2mg + mg = 3mg \quad (9.64)$$

となる。よって垂直抗力は、ハーフパイプの半径 h によらず、重力の 3 倍。だから、ハーフパイプを滑る人は、重力の 3 倍程度の力に耐えるだけの頑丈な肉体を持っていなければならない。

答 115

- (1) t から $t + dt$ の間に X が移動する距離は、

$$l|\theta(t + dt) - \theta(t)|$$

である。微分の定義から、これは $l|\theta' dt|$ に等しい。これを dt で割ったものが速度の大きさになる。したがって与式が成り立つ。

- (2) 略 ($T = mv^2/2$ の v に前小問の結果を代入すると、運動エネルギー T の与式を得る。また、O に比べて X は $l(1 - \cos \theta)$ だけ高い位置にある。従って、重力によるポテンシャルエネルギー U の与式を得る。)
- (3) 略。
- (4) 略。
- (5) 略。 ($\sin \theta \doteq \theta$ とすればよい)
- (6) 略。
- (7) 略 (式 (9.40) の左辺と右辺に代入して、それらが等しくなることを示せばよい)。

(8) $\tau = 2\pi/\omega$ より*8,

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (9.65)$$

(9) 角速度は, $\omega = \sqrt{g/l} = \sqrt{9.8 \text{ m s}^{-2}/(1.0 \text{ m})} = 3.1 \text{ s}^{-1}$. 周期は (計算略), $\tau = 2\pi/\omega = 2.0 \text{ s}$.

(10) 式 (9.65) より, τ は \sqrt{l} に比例するから, τ を半分にするには, \sqrt{l} を半分にすればよい。従って l を $1/4$ 倍にすればよい。

答 116

(1) 式 (9.65) を変形して $g =$ の式にすると,

$$g = \frac{4\pi^2 l}{\tau^2} \quad (9.66)$$

(2) 月面では重力加速度が地表の $1/6$ 倍になる。式 (9.65) より, τ は $1/\sqrt{g}$ に比例するから, g が $1/6$ 倍になると τ は $\sqrt{6} = 2.4$ 倍になる (ゆっくり振動する)。

よくある質問 51 ポテンシャルエネルギーは、力学的エネルギー保存則を見やすくするために定義されたもの、と考えてよいのですか? ... それだけではありません。まず、力はベクトルだけどポテンシャルエネルギーはスカラーなので、力を直接考えるよりも、数学的に取扱いがシンプルで楽になります。また、量子力学では力よりもポテンシャルエネルギーの方が直接的に重要な働きをします。

よくある質問 52 力学的エネルギー保存則とエネルギー保存則は違うんですね? ... 違うというより、前者は後者の一種(特別なケース)ですね。

よくある質問 53 「保存力は径路に依存しない」というフレーズが頭にしっかりこない。... ちょっと省略しすぎですね。「保存力がなす仕事は、径路によらず、始点と終点だけで決まる」というのが正しい表現です。例え話でいうと、山を登るのに、きつい勾配の坂をまっすぐ登るのと、ジグザグになった緩やかな道を登るのとでは、全体の仕事(力かける距離)は同じということです。きつい道では大きな力が(移動方向に)かかるけど、そのぶん短くてすみます。

*8 式 (5.4) 参照。

第10章

角運動量保存則

注: この章を理解するには、数学リメディアル教材で「外積」を理解していることが必要である。また、この章では高校物理はほとんど通用しない。

10.1 外積

以下の話で、「外積」という概念が必要になる。詳しいことは数学リメディアル教材の「外積」の箇所を読むとして(必ず読むこと!!)、ここでは外積について概略を述べておく。

3次元空間中の正規直交座標系^{*1}で表された2つの幾何ベクトル:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad (10.1)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad (10.2)$$

について、

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \quad (10.3)$$

というベクトルを与えるような演算を外積と呼び、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と表す(この \times を省略したり \bullet と書き換えたりしてはいけない!!)。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) \\ &:= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned} \quad (10.4)$$

である。

外積には、以下のような重要な幾何学的性質がある(ここでは証明はしない): 空間の任意の幾何ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} について、

- 性質 1. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ は、 \mathbf{a}, \mathbf{b} が張る平行四辺形の面積に等しい^{*2}。
- 性質 2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は、 \mathbf{a} と \mathbf{b} の両方に垂直である。
- 性質 3. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は、 \mathbf{a} から \mathbf{b} に右ネジをまわすときに

ネジが進む側にある。

- 性質 4. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ は、互いに等しい大きさで逆向きである。すなわち、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (10.5)$$

- 性質 5. 互いに平行なベクトルどうしの外積はゼロである。特に、同じベクトルどうしの外積はゼロである。すなわち、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (10.6)$$

性質 4 は、性質 2, 性質 3 から示すことができる。性質 5 は、性質 1 から示すことができる。

問 117 以下の各場合について、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を求め、 \mathbf{a}, \mathbf{b} の張る平行四辺形の面積を求めよ。

$$(1) \quad \mathbf{a} = (1, 2, 0), \quad \mathbf{b} = (1, 1, -1)$$

$$(2) \quad \mathbf{a} = (1, 0, 1), \quad \mathbf{b} = (-1, 1, 2)$$

問 118 2つのベクトル:

$$\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$$

$$\mathbf{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$$

が、ともに変数 t の関数であるとする。次式を示せ(ダッシュは t による微分を表す):

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}' \quad (10.7)$$

10.2 角運動量

これからはばらく我々は、物体の回転運動について考察しよう。物体の運動を考察するときのよりどころは、いつも運動の3法則だ。運動の3法則は、様々な運動を統一的に支配・説明する力を持っている。回転運動も、例外ではない。

しかし、回転運動を扱う際は、運動の3法則を直接的

^{*1} x, y, z の3つの座標軸が互いに直交しており長さのスケールが同じ座標系。まあいわば「普通の座標系」のことである。厳密には、「右手系」という性質を満たす必要がある。そのことは今、理解できなくてもよい。

^{*2} それは $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ である。ここで、 θ は \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角。

に使うよりも、角運動量 という概念 (物理量) を導入する方が、実際ははっきりして便利である*3。

— 角運動量の定義 —

質点の運動量を \mathbf{p} 、質点の位置ベクトルを \mathbf{r} とするとき、位置ベクトルと運動量の 外積、つまり

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (10.8)$$

を角運動量 (angular momentum) と呼ぶ (図 10.1)。

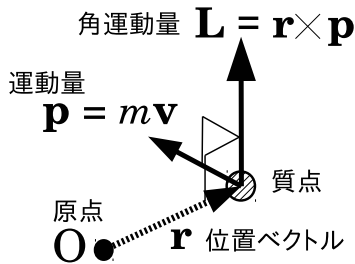


図 10.1 角運動量の定義。 m は質点の質量、 \mathbf{v} は質点の速度、 \mathbf{r} は質点の位置ベクトル。 \mathbf{r} 、 \mathbf{v} 、 \mathbf{p} 、 \mathbf{L} はいずれもベクトル (だから太字)。 m はスカラー (だから細字)。

問 119 角運動量の定義を確認しよう。

- (1) 角運動量とは何か?
- (2) 角運動量の SI 単位は?
- (3) 角運動量は、位置ベクトルと速度の両方に垂直であることを示せ。

この「角運動量」なる奇妙な物理量がどのように便利なのかは後回しにして、とりあえずいくつかの系の角運動量を考えてみることで角運動量に慣れよう。

問 120 3次元空間に、座標軸 (x, y, z 軸; 各軸は互いに直交している) を設定する。 xy 平面上で、原点を中心とする半径 r の円周上を、質量 m の質点が角速度 ω で等速円運動している。時刻 $t = 0$ で質点は x 軸上にある。

- (1) 時刻 t のときの質点の位置ベクトル \mathbf{r} は次式になることを示せ。

$$\mathbf{r} = r(\cos \omega t, \sin \omega t, 0) \quad (10.9)$$

(ただし、これと逆向きの回転のことは考えないと

*3 この事情は、ちょうど、衝突という現象を扱う際に運動量という概念を導入すると便利であったことに似ている。

しよう。)

- (2) 時刻 t のときの質点の運動量 \mathbf{p} は次式になることを示せ。

$$\mathbf{p} = mr\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t, 0) \quad (10.10)$$

- (3) この質点の角運動量 \mathbf{L} は次式になることを示し、時刻 t によらず一定であることを確認せよ (図 10.2 参照)。

$$\mathbf{L} = (0, 0, mr^2\omega) \quad (10.11)$$

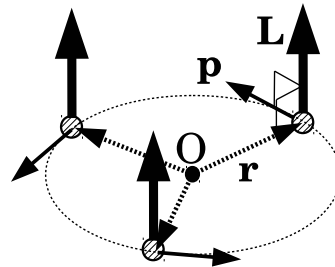


図 10.2 等速円運動する質点の角運動量

この問題の結果から、原点を中心とする等速円運動をする質点の角運動量は、時間によらず一定であることがわかった。

ちなみに角運動量は、回転以外の運動についても考えることができる。そもそも、角運動量の定義、つまり式 (10.8) には、運動が回転であるというような前提は存在しない。

問 121 xyz 空間の中で、質量 m の質点が、時刻 t のときに位置ベクトル $\mathbf{r} = (Vt, y_0, 0)$ の位置にしよう。 V と y_0 は定数である。

- (1) この質点の速度 \mathbf{v} を求め、この運動が等速直線運動であることを示せ。
- (2) この質点の運動量 \mathbf{p} を求めよ。
- (3) この質点の角運動量 \mathbf{L} は次式のようになることを示し、時刻 t によらず一定であることを確認せよ (図 10.3 参照)。

$$\mathbf{L} = (0, 0, -mVy_0) \quad (10.12)$$

この問題の結果から、等速直線運動をする質点の角運動量は、時間によらず一定であることがわかった。

しかし、ちょっと変な気がしないだろうか? 問 121 では、式 (10.12) のように、角運動量が、 y_0 に依存した。 y_0 は、質点が運動する直線 (この場合は x 軸に平行な直線)

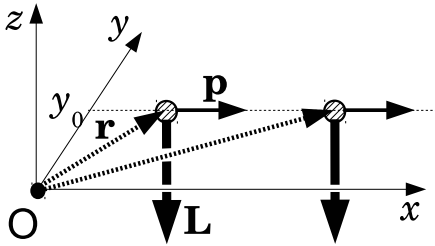


図 10.3 等速直線運動する質点の角運動量

が原点からどれだけ離れているかを示す定数である。ということは、角運動量は、同じ運動についても、原点をどこに置くかで、違った値を持つのだ。原点をどこに置くかは人間が勝手に決めることなので、結局、角運動量の値は、人間の恣意的な判断に依存してしまうのだ！

回転運動などを考えるときは、原点は回転の中心に置くのが普通だし便利だが、必ずしもそうでなければならないという必然性は無い。ならば原点の置き方によって変わる角運動量って、何なんだ？と思うかもしれない。実は、角運動量は、その値だけで意味を持つのではなく、次節に述べる考え方によって意味を持つのだ。そしてこの考え方は、原点の選択には依存しないのだ。つまり、どこに原点を置いてもいいし、その結果として角運動量の値がどのように変わってもかまわないが、それでもなお、以下の話は成り立つのだ*4。

10.3 角運動量保存則

式 (10.8) の両辺を、時間で微分してみよう。質量 m を一定とすれば、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \quad (10.13)$$

$$= \frac{d}{dt} (m\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (10.14)$$

$$= m \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (10.15)$$

$$= m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \quad (10.16)$$

$$= m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + m\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (10.17)$$

ここで、式 (10.15) から式 (10.16) の変形において、式 (10.7) の性質を使った。

*4 これはちょうど、ポテンシャルエネルギーの値が基準点（原点）のとりかたによって異なる、という事情に似ている。原点のとりかたによってポテンシャルエネルギーは異なっても、ポテンシャルエネルギーの空間微分は保存力に一致するし（式 (9.53)）、力学的エネルギー保存則は成り立つ。

式 (10.17) について第 1 項の $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ は恒等的に $\mathbf{0}$ である（性質 5 より）。従って、式 (10.17) は、

$$m\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (10.18)$$

となる。さらに、運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (10.19)$$

を使うと（ \mathbf{F} は質点にかかる力）、式 (10.18) は、

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (10.20)$$

となる。従って、式 (10.13) 左辺から式 (10.17) に至る方程式は、結局、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (10.21)$$

となる。この右辺に現れた物理量には特別な名前が付けられている：

—— トルク（力のモーメント）の定義 ——

$\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 、つまり位置ベクトルと力の外積のことを、「トルク (torque)」とか 力のモーメント と呼ぶ。

そして、式 (10.21) が表すのは、

—— 質点に関する角運動量保存則 ——

質点の角運動量の、単位時間あたりの変化は、質点に働くトルクに等しい。

という重要な物理法則である*5。

この法則を複数の質点に拡張しよう。いま、 n 個の質点が互いに力を及ぼしあいながら運動する状況を考えよう。 k 番目 ($k = 1, 2, \dots, n$) の質点のことを「質点 k 」と呼び、その質量、位置、速度、角運動量をそれぞれ m_k , \mathbf{r}_k , \mathbf{v}_k , \mathbf{L}_k とする。質点 k にかかる力 \mathbf{F}_k は、その他の質点から受ける力（内力）と、それ以外から受ける力（外力）の和である：

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \dots + \mathbf{F}_{kn} + \mathbf{F}_k^e \quad (10.22)$$

ここで $\mathbf{F}_{k1}, \mathbf{F}_{k2}, \dots$ は、それぞれ、質点 1 が質点 k に及ぼす力、質点 2 が質点 k に及ぼす力、... である。質点 k が自分自身に及ぼす力は考えなくてよいので、 \mathbf{F}_{kk} は考えなくてよいのだが、ここでは形式的に残しておいて、そのかわり $\mathbf{F}_{kk} = \mathbf{0}$ としよう。また、 \mathbf{F}_k^e は、外力が質点 k に及ぼす力である。例として、図 10.4 に、3 個の質

*5 ただし、これは導出過程から明らかなように、運動の 3 法則（特に $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ）から派生する法則なので、基本法則とは言えない。

点からなる質点系に働く力を示す:

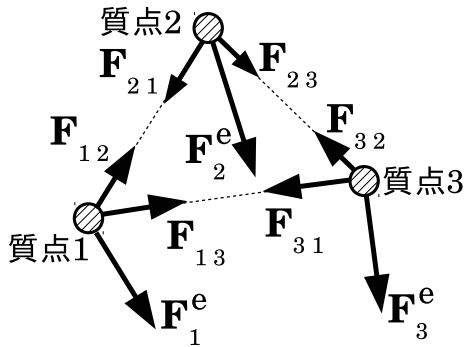


図 10.4 質点系に働く力。この図では内力どうし (\mathbf{F}_{12} と \mathbf{F}_{21} など) が中心力 (後述) である (同一直線上にある) ことを仮定している。

さて、質点 k について、式 (10.21), 式 (10.22) を考えると、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_k = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k \tag{10.23}$$

$$= \mathbf{r}_k \times (\mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \cdots + \mathbf{F}_{kn} + \mathbf{F}_k^e) \tag{10.24}$$

である。同様の式を、全ての質点に関して考えて、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{L}_1 &= \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_{11} + \mathbf{F}_{12} + \cdots + \mathbf{F}_{1n} + \mathbf{F}_1^e) \\ \frac{d}{dt} \mathbf{L}_2 &= \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{22} + \cdots + \mathbf{F}_{2n} + \mathbf{F}_2^e) \\ &\dots \\ \frac{d}{dt} \mathbf{L}_n &= \mathbf{r}_n \times (\mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2} + \cdots + \mathbf{F}_{nn} + \mathbf{F}_n^e) \end{aligned}$$

これらを辺々足し合わせると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \mathbf{L}_k &= \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times (\mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \cdots + \mathbf{F}_{kn}) \\ &+ \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e \end{aligned} \tag{10.25}$$

この式の右辺の最初の \sum に注目しよう。この和を分解して考えると、その中には、1 以上 n 以下の任意の j, k について ($j \neq k$ とする), 1 つの $\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{jk}$ と 1 つの $\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj}$ が存在する。これらをひとまとめにすると、

$$\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{jk} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj} \tag{10.26}$$

となる。ところが、作用反作用の法則から、

$$\mathbf{F}_{kj} = -\mathbf{F}_{jk} \tag{10.27}$$

である。従って、式 (10.26) は、以下ようになる:

$$(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{jk} \tag{10.28}$$

$\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$ は質点 k から質点 j へのベクトルである。

ところで、質点どうしが及ぼし合う力が、互いを結んだ直線上にある場合、すなわち互いの方向 (もしくは逆方向) をまっすぐに向いているような場合、そのような力を 中心力 という*6。もし、 \mathbf{F}_{kj} が中心力であると仮定すれば、 $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$ と \mathbf{F}_{jk} は互いに平行だから、その外積は 0 になる (性質 5 より)。従って、式 (10.28) は恒等的に 0 になる。そのことと、 $\mathbf{F}_{kk} = 0$ を使えば、式 (10.25) は、右辺の最初の \sum が 0 になってしまって、

$$\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \mathbf{L}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e \tag{10.29}$$

となる。ここで左辺の t による微分を \sum の前に出せば、

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \mathbf{L}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e \tag{10.30}$$

となる。この式は味わい深い。左辺の \sum は全質点の角運動量の和であり、全角運動量という。右辺は、各質点に働く外力によるトルクの和だ。すなわち、

質点系に関する角運動量保存則 (1)

内力が中心力であるような質点系 (質点の集合) については、その全角運動量の、単位時間あたりの変化は、各質点に働く外力によるトルクの総和に等しい。

ここで、特に、全ての質点が静止していれば、当然ながら全ての k について $\mathbf{L}_k = 0$ が恒等的に成り立つ。従って、そのとき全角運動量 $\sum_{k=1}^n \mathbf{L}_k$ も恒等的に 0 である。従って、それを t で微分したもの (式 (10.30) の左辺) も恒等的に 0 である。従って、式 (10.30) の右辺も恒等的に 0 である:

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e = 0 \tag{10.31}$$

この式の意味するのは、「内力が中心力であり、静止状態にある質点の集まりでは、外力によるトルクの和は 0」ということだ。物体とは無数の原子や電子 (質点と考えられる) の集まりなので、上の文章の「質点の集まり」は「物体」であっても差し支えない。これが物体の静止状態における、「(力の) モーメントのつりあい」である。その特別な場合が「てこの原理」だ。第 3 章では、仮想仕事の原理から「てこの原理」つまり式 (3.7) を導いたが、このように、運動方程式から導くこともできるのだ**7。

*6 重力や静電気力 (クーロン力) は中心力である。

*7 力学の法則は全て運動の法則から導かれるという立場からする

さて、式 (10.30) に戻ろう。こんどは、質点は静止していない(運動している)が、外力は働かない(内力は働く)ような状況を考えよう。その場合、式 (10.30) の右辺は 0 だ。従って、

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \mathbf{L}_k = 0 \quad (10.32)$$

である。この式は、全角運動量は時刻 t によらず一定である、ということだ。従って、次の法則が成り立つことがわかった：

— 質点系に関する角運動量保存則 (2) —

外力が無く、内力が中心力である場合は、全角運動量は時間によらず一定である。

問 122

- (1) トルクとは何か?
- (2) トルクは、別名、何というか?
- (3) トルクの SI 単位は?
- (4) 中心力とは何か?
- (5) モーメントのつりあいとは何か?
- (6) 角運動量保存則とは何か?

問 123 質量 m の質点が 2 つあって、伸縮可能な軽い棒でつながっている。棒の長さを $2r$ としよう。さて最初は、棒の長さが一定で、2 つの質点は棒の真ん中を中心とする等速円運動をしている。そのときの角速度を ω とする。なお、中心は静止している。質点どうしに働く力は中心力であるとする。

- (1) 1 つの質点の運動量 \mathbf{p} の大きさ $|\mathbf{p}|$ は、 $mr\omega$ であることを示せ。
- (2) 1 つの質点の角運動量 \mathbf{L} の大きさ $|\mathbf{L}|$ は、 $mr^2\omega$ であることを示せ。
- (3) それぞれの質点の角運動量は、どのような方向を向いているか?
- (4) 全角運動量の大きさは $2mr^2\omega$ であることを示せ。
- (5) 全運動エネルギー(各質点の運動エネルギーの和) T は $T = mr^2\omega^2$ であることを示せ。
- (6) ある時点で、棒が急に縮んで長さが半分になったとする。角速度はどうなるか?
- (7) そのとき、運動エネルギーはどうなるか?

と、これはむしろ自然である。不思議なのは、仮想仕事の原理という考え方から出発しても、同じ結論が導かれたことである。

- (8) 棒が縮む前と後で運動エネルギーが違うが、それはエネルギー保存則と矛盾しないのだろうか?

10.4 解答

答 117 略(数学リメディアル教材に同じ問題が載っているので。)

答 118 略(数学リメディアル教材に同じ問題が載っているので。)

答 119

- (1) 略。
- (2) \mathbf{r} の SI 単位は m 、 \mathbf{p} の SI 単位は kg m s^{-1} 。従って、 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ の SI 単位は $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ 。注: 外積は単なる「積」ではないが、その定義を見れば、2 つの物理量の外積の単位は、元の物理量の単位の積になることがわかるだろう。
- (3) 外積の性質 2 より、 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ は \mathbf{r} と \mathbf{p} の両方に垂直。

答 120

- (1) 題意より、質点の位置は xy 平面に限定されるので、 z 座標は常に 0 である。また、 xy 平面内では、原点から距離 r で x 軸から角度 ωt だけ回転した位置に質点はあるので、その位置は式 (10.9) のようになる。
- (2) 式 (10.9) を t で微分すると速度になる。それに m をかければ与式を得る。

(3)

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &= mr^2\omega(\cos\omega t, \sin\omega t, 0) \times (-\sin\omega t, \cos\omega t, 0) \\ &= (0, 0, mr^2\omega) \end{aligned}$$

これは t を含まない式なので、 t によらず一定。

答 121

(1)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} = \frac{d}{dt} (Vt, y_0, 0) = (V, 0, 0)$$

この式は、この質点が x 軸方向に一定の速度で運動することを示している。従って等速直線運動。

- (2) $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = (mV, 0, 0)$

(3)

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (Vt, y_0, 0) \times (mV, 0, 0) \\ &= (0, 0, -mVy_0)\end{aligned}$$

これは t を含まない式なので, t によらず一定。

答 122 略。トルクの SI 単位は $\text{N m} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ 。なんと, これは J, すなわちエネルギーの単位ではないか! しかし, 書き方の慣習として, トルクは J で書くことはほとんどなく, N m で書くことの方が圧倒的に多い。もちろん J と N m は本質的に全く同じ単位なのだが, あくまで慣習としてである。

答 123 適当に座標をとれば, 1 つの質点の位置は

$$\mathbf{r} = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, 0)$$

と書ける。

(1) $\mathbf{p} = m\mathbf{r}' = m(-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t, 0)$ 従って,
 $|\mathbf{p}| = mr\omega$ 。

(2)

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &= (r \cos \omega t, r \sin \omega t, 0) \times m(-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t, 0) \\ &= mr^2\omega(\cos \omega t, \sin \omega t, 0) \times (-\sin \omega t, \cos \omega t, 0) \\ &= mr^2\omega(0, 0, \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \\ &= mr^2\omega(0, 0, 1)\end{aligned}$$

従って, $|\mathbf{L}| = mr^2\omega$

(3) とともに z 軸の正方向を向いている。

(4) 小問 (2) の解答より, 2 つの質点は, 同じ大きさで同じ向きの角運動量を持っている。従って, 全角運動量の大きさは, 1 つの質点の角運動量の 2 倍, すなわち $2mr^2\omega$ である。

(5) 1 つの質点の運動エネルギーは,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{mr^2\omega^2}{2}$$

である。全質点の運動エネルギーは, この 2 倍なので, $T = mr^2\omega^2$ となる。

(6) 縮んだ後の角速度を Ω とすると, 小問 (4) と同様に考えれば, 縮んだ後の全角運動量の大きさは

$$2m\left(\frac{r}{2}\right)^2\Omega$$

である。質点系の角運動量保存則より, これは縮む前の全角運動量の大きさに等しいはず (もちろん全角運動量の方向も変わらないはずだが, ここではそ

れを使う必要はない)。従って,

$$2mr^2\omega = 2m\left(\frac{r}{2}\right)^2\Omega$$

従って, $\Omega = 4\omega$ 。すなわち, 角速度は 4 倍になる。

(7) 縮んだ後の運動エネルギーは, 小問 (5) と同様に考えて

$$m\left(\frac{r}{2}\right)^2\Omega^2 = m\left(\frac{r}{2}\right)^2(4\omega)^2 = 4mr^2\omega^2$$

すなわち, 運動エネルギーは 4 倍になる。

(8) エネルギー保存則によれば, 物体の運動エネルギーは, なされた仕事のぶんだけ増加する。この場合も, 運動エネルギーが増加しているが, それは, 棒が縮む際に, 2 つの質点どうしを近づけるために力が必要だったのであり, その力がなした仕事が, 2 つの質点の回転に関する運動エネルギーを増加させたのである。

第11章

慣性モーメント

これまでは質点単体や、複数の質点（質点系）について、運動を考えてきた。この章では、さらに進んで、大きさと形を持つ物体の運動を考えよう。

11.1 剛体というモデル

第1章で述べたように、大きさと形をもつ物体は、質点の集まりとしてモデル化できる。ただし、物体自体の変形（大きさや形が変わること）まで考えると話が複雑になるので、ここでは、

- 物体は質点の集まりで構成される。
- 物体は大きさと形を持つ。
- 物体は変形しない（ひとつの物体を構成する質点どうしの距離は変わらない）。

というようなモデルを考える。このような物体のモデルを剛体(rigid body)という。

我々の身の回りの物体の多くは、剛体とみなせる。カーリングストーンや、ボールなどは、これまでは質点とみなしてきたが、その大きさや形が関与する運動（ボールの回転や、それによる軌道の変化等）を考えると剛体として扱わねばならない。例えば地球は、太陽との位置関係を議論するときは質点でよいが、地球の自転の様子を議論するときは剛体とみなさねばならない。

ただし、剛体も、質点ほどではないが、一種の単純化・抽象化されたモデルであり、問題設定によってはそれは不適切なこともある。例えば地球に起きる地震を考えるときは、地球を剛体とみなしてはダメであり、わずかながらも変形する弾性体として扱わねばならない*1。

*1 さらに言えば、起きた振動（地震）が減衰して収まることを表現するためには弾性体ではダメで、摩擦も考慮した「粘弾性体」という物体としてモデル化しなければならない。また、物体が変形して元に戻らないことを表現するには、塑性というものも考えねばならず、粘性や弾性も一緒に考慮するには「粘弾塑性体」として考えねばならない。また、水や空気のように流れる性質を持った物体は、「流体」として考えねばならない。このように、扱う物体の性質や運動のスケール、本質的に関与する現象などによって、物体をどのようにモデル化すべきかは様々

さて、ここでは理由は詳述しないが、剛体の運動は、2つの要素にわけて考えることができる。ひとつはその「重心」の運動であり、もうひとつはその重心まわりの回転運動である（図 11.1）。

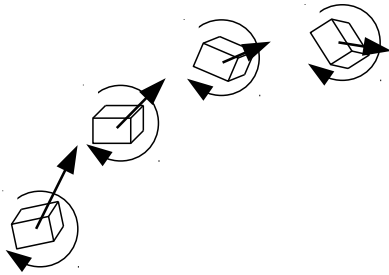


図 11.1 空中に放り投げられたレンガ。このような剛体の運動は、重心の運動と、重心まわりの回転で表現される。

11.2 剛体の回転運動

ここでは剛体の回転運動について考えよう。

まず、最も単純な場合として、前章の間 123 で見たような、2つの質点がペアになって等速円運動（回転）することを考えよう（図 11.2）:

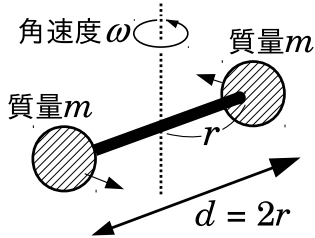


図 11.2 棒でつながれた2つの質点からなる剛体の等速円運動。

だ。複雑なモデルであればあるほどいいというわけではない。一般に、様々な性質を取り入れれば取り入れるほど、その問題を解くことは難しくなる。従って、限り本質を失わない範囲で、扱う物体をできるだけ単純なモデルで考える必要がある。

2つの質点どうしの距離 d が変わらないとき、この2つの質点からなる質点系は、剛体である。さて、このとき、各質点の運動の速さ（速度の大きさ） v は、式 (5.36) より

$$v = r\omega \quad (11.1)$$

となる。従って、各質点の運動エネルギーは、式 (6.12) より

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \quad (11.2)$$

となる。従って、この剛体の運動エネルギー（つまり2つの質点の運動エネルギーの和） T は、

$$T = mr^2\omega^2 \quad (11.3)$$

となる。式 (11.2) のように、各質点の（回転運動の）運動エネルギーが角速度の2乗に比例するから、式 (11.3) のように、全質点の運動エネルギーの和も角速度の2乗に比例する。同様に考えれば、3個以上の質点がある固定点のまわりを同じ角速度で等速円運動をしている場合についても、その回転による運動エネルギーは角速度の2乗に比例すると類推できるだろう。

11.3 慣性モーメント

そこで、一般的に、剛体が、ある軸のまわりに角速度 ω で回転することを考えよう。剛体を、 n 個の微小な部分に分割し、それぞれを質量 m_1, m_2, \dots, m_n の質点とみなす。回転軸からそれぞれの質点への距離を r_1, r_2, \dots, r_n とする。 k 番めの質点の速さ（速度の大きさ）は $r_k\omega$ だから、 k 番目の質点の運動エネルギー T_k は次式のようになる：

$$T_k = \frac{1}{2}m_k r_k^2 \omega^2 \quad (11.4)$$

全体の回転の運動エネルギー T は、これらの全ての和であり、

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + \dots + T_n \\ &= \frac{1}{2}m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots + \frac{1}{2}m_n r_n^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2) \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n m_k r_k^2 \right) \omega^2 \end{aligned} \quad (11.5)$$

となる。式 (11.5) の () 内を抜き出して以下のように定義する：

慣性モーメントの定義

質量がそれぞれ m_1, m_2, \dots, m_n であるような n 個の質点について、

$$I = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 \quad (11.6)$$

で定義される物理量 I を、慣性モーメント (moment of inertia) もしくは 慣性能率 と呼ぶ。ただし、 r_1, r_2, \dots, r_n は回転軸から各質点までの距離である。

すると、式 (11.5) は、

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (11.7)$$

と書ける。

問 124

- (1) 慣性モーメントの定義を述べよ。
- (2) 慣性モーメントの SI 単位は？

問 125 問 123 では、慣性モーメントは $2mr^2$ であることを示せ。

式 (11.7) を、質点の運動エネルギー T の式（式 (6.12) で学んだ）：

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (m \text{ は質量, } v \text{ は速さ}) \quad (11.8)$$

と比べてみよう。形式的によく似ている。実際、形式的には、式 (11.8) における速度 v と質量 m は、式 (11.7) における角速度 ω と慣性モーメント I に対応する。つまり、形式的に言えば、慣性モーメントとは「回転運動における質量みたいなもの」である*2。質量が物体の「動きにくさ」を表すとしたら、慣性モーメントは物体の「回りにくさ」を表す、と言ってもよかるう*3。

問 126 半径 r の円周上に、質量 m の質点が3個、等間隔に並んで互いに固定されている（図 11.3）。このとき、円の中心を貫く垂線を軸とする回転の慣性モーメント

*2 注意：同じ物体についても、回転軸の位置や向きが違えば慣性モーメントも違う。ここでは深入りしないが、一般的に、物体の慣性モーメントを任意の回転軸に関して完全に表現するには、行列（テンソル）を使う必要がある。何のこともよくわからぬ、という人は、とりあえず「ふーん...」と思っておいってください。

*3 もちろん、既に動いている物体については、むしろ質量は「止まりにくさ」であり、慣性モーメントは「回転の止まりにくさ」である。

ト I は?

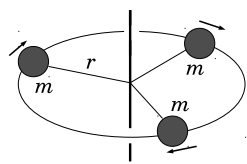


図 11.3 3個の質点の回転

問 127 半径 r の円周上に、質量 m の質点が n 個、等間隔に並んで互いに固定されている (図 11.4)。このとき、円の中心を貫く垂線を軸とする回転の慣性モーメント I は?

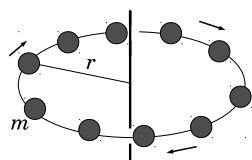


図 11.4 n 個の質点の回転

問 128 前問で、質量の合計、すなわち nm を M としよう。 M を一定として m を小さくしながら n を無数に増やせば、これは質量 M の円環になるだろう。そのように考えて、半径 r の円環 (太さは無視できるほど小さいとする) の慣性モーメントは

$$I = Mr^2 \tag{11.9}$$

となることを示せ (図 11.5)。

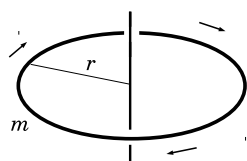


図 11.5 円環の回転

問 129 密度 ρ 、厚さ b の鉄板でできた、半径 r 、幅 Δr の円環盤について、中心を貫く垂線を軸とする回転の慣性モーメント ΔI は、

$$\Delta I = 2\pi \rho b r^3 \Delta r \tag{11.10}$$

であることを示せ (図 11.6)。ただし Δr は r に比べて十分に小さいものとする。ヒント: Δr が十分に小さいから円環盤は円環とみなせる。また、円環盤の質量は、

$2\pi r \rho b \Delta r$ である。

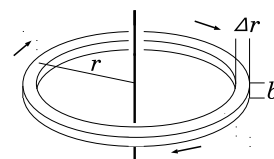


図 11.6 円環盤の回転

問 130 密度 ρ 、厚さ b の鉄板でできた、半径 r の円盤について (図 11.7)、中心を貫く垂線を軸とする回転の慣性モーメント I は、

$$I = \frac{\pi \rho b r^4}{2} \tag{11.11}$$

となることを示せ。ヒント: 円盤は円環盤のあつまりとみなして、前問の結果を様々な r について適用して足しあわせる。 Δr を十分小さくすれば、足し合わせは積分になる。

また、この円盤の質量を M とすると、

$$I = \frac{Mr^2}{2} \tag{11.12}$$

となることを示せ。これは、同じ質量と半径を持つ円環の何倍か?

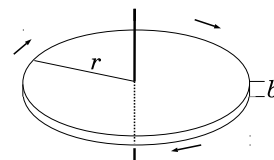


図 11.7 円盤の回転

上の慣性モーメントの計算法をもう少し一般化しよう。任意の形状の連続的な剛体 V について、それがひとつの軸の回りに回転することを考える。回転軸を z 軸とし、それに直交するように x 軸と y 軸を設定しよう。剛体 V を x 軸、 y 軸、 z 軸に沿ってメッシュ状に分割し、横 Δx_i 、縦 Δy_j 、高さ Δz_k の小さな直方体 (その中心の座標を (x_i, y_j, z_k) とする。 i, j, k は整数) のあつまりとみなす。個々の部分の体積は $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ となり、その質量は $\rho \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ となる (ρ は密度)。

さて、回転軸 (z 軸) からの距離 r_{ijk} の二乗は、

$$r_{ijk}^2 = x_i^2 + y_j^2 \tag{11.13}$$

となる (z_k^2 は入らないことに注意せよ!)。すると慣性

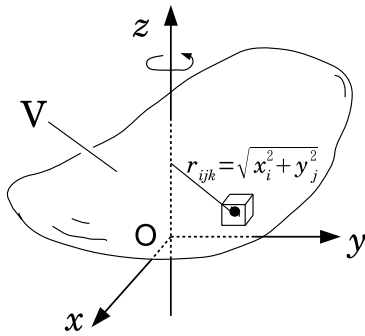


図 11.8 連続的な剛体の回転

モーメント I は、式 (11.6) より、

$$I = \sum_i \sum_j \sum_k \rho(x_i^2 + y_j^2) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \quad (11.14)$$

となる。ここで $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$ を限りなく小さくすると、それぞれの和は積分に置き換えられ、次式のようになる：

連続的な剛体の慣性モーメントの定義

$$I = \int \int \int_V \rho(x^2 + y^2) dx dy dz \quad (11.15)$$

この積分は「数学リメディアル教材」で出てきた「体積分」であり、積分区間は、剛体 V の隅から隅までである。

問 131 上の式 (11.14) や式 (11.15) において、カッコの中（つまり r^2 ）が $x^2 + y^2 + z^2$ でないのはなぜか？（ z^2 を入れてはいけないのはなぜか？）

問 132 問 130 で扱ったのと同じ円盤について、ある直径を軸とする回転の慣性モーメント（図 11.9）が次式のようになることを示せ。

$$I = \frac{Mr^2}{4} \quad (11.16)$$

式 (11.12) と式 (11.16) を比べればわかるように、同じ物体であっても、回転軸をどのように設定するかによって、慣性モーメントは異なる値をとる。ここでは詳述しないが、互いに直交する 3 つの回転軸を適切に定めてそれらのまわりの慣性モーメントを求めれば、それをもとに、どんな方向の回転軸についても慣性モーメントを自動的に計算することができる。数学的には、その

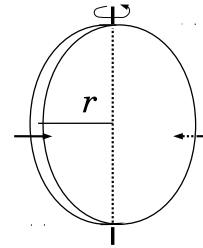


図 11.9 円盤の回転。ただし縦回転。

「適切な 3 つの回転軸」と「そのまわりの慣性モーメント」を求めることは、行列（対称行列）の固有ベクトルと固有値を求めることに対応する。興味のある人は、しっかりした力学の教科書を参照してみよう。

慣性モーメントは、農業機械の設計などで重要だ。耕運機は、どのような形・質量のロータリーを搭載するかで大きく性能が決まるが、そのロータリーを駆動するのにどのくらいの出力のエンジンが必要か、などという判断は、慣性モーメントを含む力学的見地からの設計にかかっている。出力の大きなエンジンならどんな慣性モーメントを持つロータリーも動かせるが、その反面、重くなるので操作性が悪くなるし、燃費も悪くなる。

大きな慣性モーメントを持つ物体、例えば大きな鉄の円盤などが回転すると、大きな運動エネルギーを持つ。これは、エネルギーの貯蔵装置として利用できる。例えば太陽光や風力などの不安定なエネルギー源でも、エネルギーが得られるときには大きな鉄円盤を回すことができる。いったんまわり始めた鉄円盤は、角運動量保存則でまわり続けるので、エネルギーが欲しいときに鉄円盤の回転で発電機を回してエネルギーを取り出すことができる。このようなエネルギー貯蔵装置をフライホイールと呼ぶ。

問 133 傾斜 θ 、高さ h の坂の上から、半径 r 、質量 M 、慣性モーメント I の丸い物体 X を転がそう（図 11.10）。坂と物体の間に摩擦は生じないものとする。

- (1) X のポテンシャルエネルギーを U とする。 X が坂の下にあるとき $U = 0$ とする。 X が坂の上にあるときの U は？ ただし、一般的に、一様な外力（重力など）による剛体（変形しない物体）のポテンシャルエネルギーは、質量が全て重心（この場合は X の中心）に集中すると仮想したときの質点のポテンシャルエネルギーに等しいことがわかっている。
- (2) X は坂の上から初速度 0 で転がり出す。 X が転がり出したとき（速度は 0）の力学的エネルギー E_0 は？

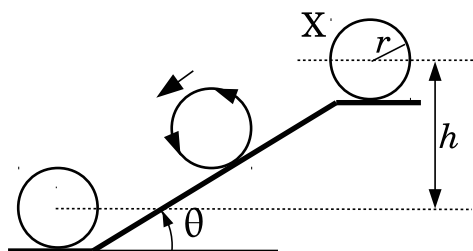


図 11.10 斜面を転がり下る丸い物体 X。

- (3) X が坂の下まで到達したとき、重心 (X の中心) の速度は v 、回転の角速度 ω はであった。このとき、

$$v = r\omega \quad (11.17)$$

が成り立つことを示せ。ヒント：ごく短い時間間隔 Δt の間 (v や ω が一定とみなせるくらいに短い時間間隔) に、X は $r\omega\Delta t$ だけ進む。

- (4) X が坂の下まで到達したとき、X の力学的エネルギー E_1 は、

$$E_1 = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (11.18)$$

となることを示せ。ただし、運動エネルギーは重心の運動エネルギー (全質量が重心に集中した仮想的な質点の運動エネルギー) と重心まわりの回転の運動エネルギーの和であることがわかっている。

- (5) 力学的エネルギー保存則 ($E_0 = E_1$) から、以下の式を導け：

$$Mgh = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (11.19)$$

- (6) (3) で得た関係と前問から、以下の式を導け：

$$2gh = v^2 \left(1 + \frac{I}{Mr^2} \right) \quad (11.20)$$

- (7) 前問から、以下の式を導け：

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I/(Mr^2)}} \quad (11.21)$$

- (8) 慣性モーメント I が 0 の場合、 $v = \sqrt{2gh}$ となることを示せ。これは質量 M の質点が坂を滑り降りる時の速度に等しい。

- (9) X が、質量 M が縁に集中している円環の場合、 $v = \sqrt{gh}$ となることを示せ。

- (10) X が、質量 M が一様に分布している円盤の場合、 v はどうなるか？

問 134 坂の上から、同じ半径の 2 つの鉄球を転がす。鉄球 A は、内部が空洞であり、鉄球 B は、内部までびっちり鉄が詰まっている。どちらが速く転がるか？理由も述べよ。

11.4 分子の運動と慣性モーメント

慣性モーメントは化学でも重要だ。多原子分子は、温度に応じて、並進と振動と回転という 3 種類の運動をする*4。この回転運動の性質を解析することで、分子の様子を調べることができる。

例として、質量 m の原子 2 個からなる 2 原子分子を考える。原子間の距離を d とする。重心は原子どうしの中点にある。2 つの原子を結ぶ直線に垂直で重心を通るひとつの直線を軸とする、回転運動を考える (図 11.11)。重心から各原子までの距離を r とする。当然、 $d = 2r$ だ。

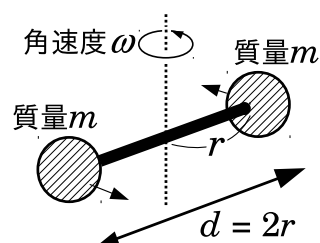


図 11.11 2 原子分子の回転。

P.73 で学んだエネルギー等分配則によれば、一般に、絶対温度 T の気体の 1 分子は、ひとつの自由度につき、 $k_B T/2$ という運動エネルギーを平均的に持つ。今考えている回転運動も 1 つの自由度を持った運動といえるので、この回転に関する平均的な運動エネルギー K は、

$$K = \frac{1}{2} k_B T \quad (11.22)$$

である*5。一方、この原子の慣性モーメント I は、問 125 より、 $I = 2mr^2$ だ。従って、

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = mr^2\omega^2 \quad (11.23)$$

である。

問 135 この 2 原子分子について、

*4 ただし常温では、振動運動は熱にあまり関係しない。

*5 これまで運動エネルギーは T で表すことが多かったが、この問題では T は温度を表すので、それとの混乱を避けるために、運動エネルギーを K と書いた。

- (1) 次式を示せ:

$$\omega = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{k_B T}{2m}} \quad (11.24)$$

- (2) 酸素原子 ^{16}O の質量は?
 (3) 酸素分子の原子間距離は, $d = 0.12 \text{ nm}$ である。常温 (300 K) における, 酸素原子の回転の角速度を見積もれ*6。

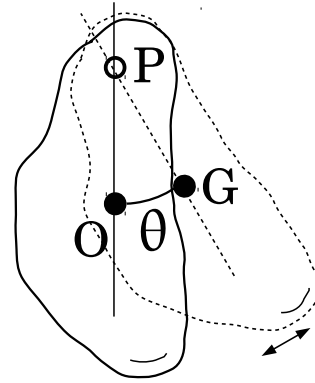


図 11.12 剛体振り子。

11.5 剛体振り子

2 学期の「物理学実験」では, 振り子を利用して重力加速度を測る実験が行われる。ここでは, 問 115 で学んだ, 糸に質点がつるされた振り子でなく, 剛体の振り子を使う。ここではその予習をしておこう。

問 136 質量 M の剛体に穴が開けられ, その穴に軸を通して, その軸が定点 P に固定されている (図 11.12)。剛体は軸のまわりに自由に回転することができる。軸のまわりの回転の慣性モーメントを I とする。剛体の重心を G とする。 P から G の距離は l である。 G が最も下に来たときの位置を O とする。剛体を少し持ち上げて静かに手放すと, 重心 G は鉛直平面内で振動運動をする。時刻 t における重心の位置を $G(t)$ とし, 角 OPG を $\theta(t)$ としよう。空気抵抗は無視する。

- (1) 時刻 t における剛体の運動エネルギー $T(t)$ は次のようになることを示せ:

$$T(t) = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (11.25)$$

- (2) 時刻 t におけるこの剛体のポテンシャルエネルギー $U(t)$ は次のようになることを示せ。

$$U(t) = M g l (1 - \cos \theta) \quad (11.26)$$

ただし, G が点 O にあるとき $U = 0$ と定める。

- (3) 力学的エネルギー保存則から, 次式 (剛体振り子の

運動をあらわす方程式) を得よ:

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -M g l \sin \theta \quad (11.27)$$

- (4) ここで「等価振り子の長さ」というものを,

$$\bar{l} = \frac{I}{M l} \quad (11.28)$$

と定義し, \bar{l} を使って上の方程式を書き換えると, 質点の振り子の方程式 (式 (9.38)) と同じ形

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{\bar{l}} \sin \theta \quad (11.29)$$

となることを示せ。

- (5) 角 θ が十分に 0 に近い範囲で変化するならば, 式 (11.29) は次のように近似できることを示せ:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{\bar{l}} \theta \quad (11.30)$$

- (6) 上の方程式について, $\theta = \theta_0 \cos \omega t$ という式を仮定して代入し, 振動の角速度 ω を求め, 振動の周期 T が次式のようになることを示せ:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{l}}{g}} \quad (11.31)$$

- (7) 次式を導け:

$$g = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \bar{l} \quad (11.32)$$

これは「物理学実験」テキストのテーマ 3 の (2) 式だ。

慣性モーメント I は, 剛体の回転運動の運動エネルギーを式 (11.7) のように表すために定義された。しか

*6 この問題で扱った方法は, ニュートン力学に基づくものであり, 古典的と言われる。実際は, 分子の回転運動をこのように古典的に扱うことは適当ではなく, 量子力学を使わねばならない。その違いを手短かに言うと, 量子力学的な扱いでは, 回転運動の角速度という概念は意味を持たない。そのかわりに, 角運動量をもとに理論を組み立てる。その際, 古典的な意味での角運動量では考えられないようなことが起きる。しかし, このような古典的な扱いでも, いろんなことがわかるし, 量子力学的な扱いをするときに考え方の出発点となる。

し、慣性モーメントの効用は、もうひとつある：理由は詳述しないが、剛体の角運動量の大きさ L は、

$$L = I\omega \quad (11.33)$$

と表すことができる*7。

問 137 2011年3月11日に発生した、東北太平洋沖地震の後、地球の自転周期が1.8マイクロ秒だけ短くなった（自転が早くなった）ことが観測された。この現象を、慣性モーメントという考え方をを使って定性的に説明せよ。

11.6 解答

答 124

- (1) 略。
 (2) 式 (11.6) より、 I の単位は $m_k r_k^2$ の単位なので、 kg m^2

答 125 式 (11.6) で $n = 2$, $r_1 = r_2 = r$, $m_1 = m_2 = m$ とすればよい。 $I = m r^2 + m r^2 = 2m r^2$

答 126 式 (11.6) で $n = 3$, $r_k = r$, $m_k = m$ とすればよい。 $I = 3m r^2$

答 127 式 (11.6) で、 $r_k = r$, $m_k = m$ とすればよい。 $I = nm r^2$

答 128 前問で $nm = M$ とすれば与式を得る。

答 129 円環盤も円環の一種だ。この円環盤をどこか1箇所まで切ってまっすぐに伸ばしたら、断面積は $b\Delta r$ 、長さは $2\pi r$ の鉄棒になる。その体積は $2\pi br\Delta r$ 。密度が ρ なので、質量は $2\pi\rho br\Delta r$ 。これを M として式 (11.9) に代入すると与式を得る（ただしここでは慣性モーメントを I でなく ΔI と書いていることに注意）。

答 130 円盤を Δr の幅の n 個の円環盤に分割し、式 (11.10) で与えられる各円環盤の慣性モーメントを足し合わせると、円盤の慣性モーメント I になるはずだ。す

*7 以下、参考までに述べておく（今は理解できなくてもよい）。式 (11.33) は、実はベクトルの方程式に拡張できるのだ。すなわち、角運動量は本来はベクトルなので \mathbf{L} と表そう。角速度は、回転軸の方向を向いているベクトル量とみなすことができ、それを $\boldsymbol{\omega}$ とおこう。慣性モーメントは、先述のように、実は行列で表現できる。それを改めて I とおこう。すると、式 (11.33) は、

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \quad (11.34)$$

となるのだ。

なわち、

$$I = \sum_{k=1}^n 2\pi\rho b r_k^3 \Delta r \quad (11.35)$$

となる。ここで r_k は k 番目の円環盤の半径である。分割をどんどん細かくして Δr を十分に0に近づけ、円環の数をどんどん増やすならば、この式は次式のようになる：

$$I = \int_0^R 2\pi\rho b r^3 dr \quad (11.36)$$

ここで R は円盤の半径である。この積分を実行すると、

$$I = \frac{\pi\rho b R^4}{2} \quad (11.37)$$

ここで改めて R を r に置き換えると、式 (11.11) を得る。ところで、この円盤の質量 M は、

$$M = \pi\rho b r^2 \quad (11.38)$$

なので、式 (11.11) より

$$I = \frac{M r^2}{2}$$

となり、式 (11.12) を得る。これは同質量の円環の慣性モーメント、つまり式 (11.9) の半分である。

答 131 慣性モーメントのもともとの定義、つまり式 (11.6) では、 r_k は原点からの距離ではなく、回転軸からの距離だった。連続的な剛体に関する慣性モーメントも事情は同じだ。従って、剛体の各部分について、 r として原点からの距離つまり $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ではなく、回転軸 (z 軸) からの距離つまり $\sqrt{x^2 + y^2}$ を考えねばならない。

答 132 回転軸を z 軸、それに直交して円盤の直径方向に x 軸、厚さ方向に y 軸をとる。円盤の中心を原点とする。円盤の厚さを b とする。密度を ρ とする。円盤上の点 (x, y, z) と z 軸との距離は $\sqrt{x^2 + y^2}$ だ。慣性モーメント I は、式 (11.15) より

$$I = \int_{-r}^r \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-\sqrt{r^2 - z^2}}^{\sqrt{r^2 - z^2}} \rho(x^2 + y^2) dx dy dz$$

である。ここで円盤が十分に薄いとなれば、 $x^2 + y^2 \doteq x^2$ であり、その近似のもとに、 y について先に積分すれば、

$$I = b \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2 - z^2}}^{\sqrt{r^2 - z^2}} \rho x^2 dx dz \quad (11.39)$$

となる。これを x について積分すれば、

$$\begin{aligned} I &= b \int_{-r}^r \left[\rho \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} dz \\ &= \frac{2b\rho}{3} \int_{-r}^r (r^2 - z^2)^{3/2} dz \end{aligned} \quad (11.40)$$

となる。この被積分関数は z に関する偶関数だから、

$$I = \frac{4b\rho}{3} \int_0^r (r^2 - z^2)^{3/2} dz \quad (11.41)$$

となる。ここで $z = r \sin \theta$ と置換すると (置換積分), $dz = r \cos \theta d\theta$ であり, 積分区間は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ であり, 被積分関数は

$$\begin{aligned} (r^2 - z^2)^{3/2} &= (r^2 - r^2 \sin^2 \theta)^{3/2} \\ &= \{r^2(1 - \sin^2 \theta)\}^{3/2} \\ &= (r^2 \cos^2 \theta)^{3/2} = r^3 \cos^3 \theta \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} I &= \frac{4b\rho}{3} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos^3 \theta r \cos \theta d\theta \\ &= \frac{4br^4\rho}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta \end{aligned} \quad (11.42)$$

ここでオイラーの公式から、

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} \\ &= \frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} + \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{\cos 4\theta}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{3}{8} \end{aligned} \quad (11.43)$$

従って、

$$\begin{aligned} I &= \frac{4br^4\rho}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos 4\theta}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{3}{8} \right) d\theta \\ &= \frac{4br^4\rho}{3} \left[\frac{\sin 4\theta}{32} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{3\theta}{8} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{4br^4\rho}{3} \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi br^4\rho}{4} = \frac{Mr^2}{4} \end{aligned} \quad (11.44)$$

ここで、 $M = \pi br^2\rho$ を使った。

答 133

- (1) $U = Mgh$
- (2) 速度が 0 なので、運動エネルギーは 0。従って力学的エネルギー E_0 はポテンシャルエネルギー U だけだ。(1) より、 $E_0 = Mgh$

- (3) $r\omega\Delta t/\Delta t = r\omega$
- (4) 重心の運動エネルギーは、 $Mv^2/2$ であり、回転の運動エネルギーは $I\omega^2/2$ である。これらを足すと、与式を得る。
- (5) (1) と (4) より、与式を得る。
- (6) 前小問の式に (3) の結果を代入して v を消すと、

$$Mgh = \frac{Mr^2\omega^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (11.45)$$

となる。両辺を 2 倍して M で割ると、与式を得る。

- (7) 略 (式 (11.20) を $v =$ の形に式変形すればよい)
- (8) 略 (式 (11.21) に $I = 0$ を代入するだけ)
- (9) 式 (11.9) を式 (11.21) に代入して与式を得る。
- (10) 式 (11.12) を式 (11.21) に代入して、

$$v = \sqrt{\frac{4gh}{3}} \quad (11.46)$$

答 134 式 (11.21) より、慣性モーメント I と質量 M の比 (I/M) が小さいほど転がる速さは大きい。 I/M は、質量が回転軸に近い部分に集中するほど小さい。鉄球 A は内部が空洞なので、質量は回転軸から遠い部分に分布するが、鉄球 B は質量が回転軸に近いところにも (鉄球 A に比べると) 多く分布する。従って、 I/M は鉄球 B の方が小さい。従って、鉄球 B の方が速く転がる。

答 135

- (1) 式 (11.22) と式 (11.23) がともに成り立つとし、 ω について解けばよい。
- (2) 酸素原子は原子量 16 である。つまり、1 モルが 16g である。従って、酸素原子 1 個の質量は、

$$m = \frac{16 \times 10^{-3} \text{ kg}}{6.0 \times 10^{23}} = 2.7 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

- (3) 式 (11.24) を使う。

$$r = \frac{d}{2} = \frac{0.12 \times 10^{-9} \text{ m}}{2} = 6.0 \times 10^{-11} \text{ m}$$

より、

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{6.0 \times 10^{-11} \text{ m}} \sqrt{\frac{1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \times 300 \text{ K}}{2 \times 2.7 \times 10^{-26} \text{ kg}}} \\ &= 4.6 \times 10^{12} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

答 136

- (1) 剛体の振動運動は、ごく短い時間を切り出して考えれば、軸を中心とする回転運動の一部とみなすことができる。その角速度 ω は、単位時間あたりに変化

する角なので、 θ を時刻 t で微分したものに等しい。従って、 $\omega = d\theta/dt$ である。これを式 (11.7) に代入して、与式を得る。

- (2) 剛体の (重力による) ポテンシャルエネルギーは、基準点からの重心の高さと全質量、そして重力加速度をかけたものに等しい。題意より、定点 (軸の位置) P から原点 O までの距離は l である。 P から重心 G までの距離も l だが、剛体が角 θ だけ傾いているときは、 P と G の高さの差は、 $l \cos \theta$ となる。従って、原点 O と重心 G の高さの差は $l - l \cos \theta$ となる。従って、ポテンシャルエネルギーは与式のようになる。
- (3) 力学的エネルギー保存則より、 $T(t) + U(t)$ は時刻によらず定数である。従って、 $T(t) + U(t)$ を t で微分したら恒等的に 0 になる。従って、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{T(t) + U(t)\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + M g l (1 - \cos \theta) \right\} \\ &= I \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + M g l \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \end{aligned}$$

この式から与式を得る。

- (4) 略 (式 (11.28) を使って式 (11.27) から I を消去すると式 (11.29) を得る)。
- (5) $\sin \theta = \theta$ と近似すれば与式を得る。
- (6) 注: 以下の ω は (1) で出てきた ω とは別物である。 $\theta = \theta_0 \cos \omega t$ を式 (11.30) に代入すると、

$$-\omega^2 \theta_0 \cos \omega t = -\frac{g}{l} \theta_0 \cos \omega t \quad (11.47)$$

となる。これが全ての t について成り立つから、 $\omega^2 = g/l$ 。振動の周期 T は、 $T = 2\pi/\omega$ より、与式を得る。

- (7) 式 (11.31) を $g =$ の形に式変形すれば与式を得る。

答 137 地球の角運動量 L は一定なので、自転の角速度 ω が大きくなったということは、式 (11.33) より、自転軸まわりの地球の慣性モーメント I が小さくなっているはず。おそらく、地震に伴う地殻変動によって地球がわずかに変形し、 I がわずかに小さくなったと考えられる。

よくある質問 54 私はクラシック・バレエをやっています。バレエでも、フィギュアスケートで言うスピンと同じことを地表で行い (踊り) ますが、腕をうまくタイミング良く体の中心に引き寄せると速く且つ安定して回れます。... これは問 137

と同じ原理です。回転現象は本当に不思議で楽しいですね。

11.7 補遺: 量子のエネルギー

実は、我々が学んでいる力学 (ニュートン力学) は、分子や原子などの小ささになると、効力を失う。そのようなスケールを支配するのは、「量子力学」という、全く別な理論だ。量子力学は物理現象や物理的存在の捉え方がニュートン力学とはまるきり違っている。ニュートン力学では、「速度」とか「力」とかが大事な概念だったが、量子力学では、それらにあまりこだわらない。というか、量子力学のスケールでは、そういうことにこだわっても仕方ないようなふうに物体や現象が存在し、振る舞うのである*8。

それがどういうことなのかを理解するには、どうしても高度な数学が必要だ。ある著名な物理学者は「神は非常に高度な数学者であり、宇宙を作る時に極めて高度な数学を使ったのだ」と言ったほどだ。我々は神様ほど高度な数学者ではないのでどうしようもないが、それでも「化学 II」「化学結合論」などの授業で量子力学が出てくる。そこで、量子力学のほんの入り口をここで学ぼう。以下の話では、「なぜそうなるのか」を説明することはできない。自然はともかくそのように振る舞うのだ。

まず、量子力学では、物体や現象を「量子」という概念で把握する。電子や原子や光は、いずれも「量子」として振る舞う。量子は、1 個 2 個と数えられるような離散的な存在であり、その存在のあり方は、「状態ベクトル」という数学的な概念で表現される。その「ベクトル」という言葉から、平面ベクトルや空間ベクトルのようなもの、つまり「大きさと向きを持つもの」(矢印) を君は想像するかもしれないが、そうではない。状態ベクトルは、そういうベクトルとは違う、もっと抽象的な概念だ。その「状態ベクトル」を、位置 (x, y, z) の関数として表現したものを「波動関数」と言う*9。波動関数は、「シュレーディンガー方程式」という小難しい微分方程式に従うことがわかっている。

量子が、ある特定のエネルギーを持つ状態にあるとき、シュレーディンガー方程式は「行列の固有値と固有ベクトルを求める問題」(数学リメディアル教材でやった!) に帰着できる。その「固有値」がエネルギーに該当し、

*8 量子力学では、速度のかわりに運動量、力のかわりにポテンシャルエネルギーが、それぞれ重要な役割を担う。

*9 「ベクトル」が「関数」になる? どういうこと? と君は思うかもしれないが、「関数もベクトルの一種だ」という話をどこかで小耳に挟まなかつたらどうか。

「固有ベクトル」が状態ベクトル(それを位置で表現するならば波動関数と言っても良い)に対応する(なのでそのような状態やそのエネルギーを「固有状態」「固有エネルギー」と呼ぶ)。このとき、状態ベクトルは時刻 t に対して振動的に依存する。その振動の角速度を ω とすると、量子のエネルギー E は(それは行列の固有値でもあるのだが)、

$$E = \frac{h}{2\pi} \omega \quad (11.48)$$

となる。ここで h は「プランク定数」と呼ばれる定数で、

$$h = 6.626068 \times 10^{-34} \text{ J s} \quad (11.49)$$

である。 $h/(2\pi)$ は量子力学で頻繁にあらわれるので、 2π をいちいち書くのがめんどくさくなって、物理学者達は、それを \hbar と書き表すことにした(これを「エイチバー」と読む)。すなわち、

$$\hbar := \frac{h}{2\pi} \quad (\text{定義}) \quad (11.50)$$

である。すると、式 (11.48) は次式のように書ける:

$$E = \hbar \omega \quad (11.51)$$

さて、数学的な理由から、波動関数は、空間の中を振動しながら広がっていくような性質を持つ。だから、量子は「粒子の性質と波の性質の両方を持つ」と言われることが多い。

特に、光はそもそも電場と磁場の振動が空間を伝わる波なので、そのような「波」のイメージが強い。実際、光の状態ベクトル(波動関数)の振動の角速度 ω は、電場や磁場の振動の角速度 ω そのものである。光速を c とすると、波としての光は、周期 $2\pi/\omega$ の間に速さ c で波長 λ だけ進むので、

$$\frac{2\pi}{\omega} c = \lambda \quad (11.52)$$

という式が成り立つ。この式を使って式 (11.48) の ω を消去すると、光の量子(それを光量子とか光子という)のエネルギーは、

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad (11.53)$$

となる。この式はよく教科書に出てくるが、注意すべきなのは、この式 (11.53) は光子にしか成り立たない、ということだ。光子以外にも、様々な量子が世の中には存在し(電子とか)、それぞれが波動関数の角速度とか波長という特徴を持つのだが、式 (11.53) は必ずしも成り立たなくても、式 (11.48) や式 (11.51) は光子も含めてい

なる量子にも成り立つ。

11.8 補遺: 熱放射

我々の身の回りは、光に満ち溢れているが、その光はどこでどのように発生するのだろうか? 例えば太陽、白熱電球、蛍光灯、レーザー、発光ダイオードなどの光源はどのような仕組みで光るのだろうか?

物体を構成する分子や原子は、前述したように固有エネルギーを持つ。そのエネルギーとは、もとをたどれば、分子・原子・電子等の持つ運動エネルギーやポテンシャルエネルギーだ。

固有エネルギーは、低いものから高いものまで、離散的に(階段状に)存在する。それらをエネルギー準位と呼ぶ。そして、個々の分子や原子のエネルギーが、高い順位から低い順位に移り変わることがある。これを「遷移」と言う。原子や分子が遷移するとき、そのエネルギーの差は、何らかの形で原子や分子から放出される(でなければエネルギー保存則が成り立たない)。その「何らかの形」のひとつとして光を出すのが、蛍光灯、レーザー、発光ダイオード等だ。

太陽や白熱電球も、結局はそのような仕組みで光るのだが、他とはちょっと違う。太陽や白熱電球は、「熱が光に転化する」という仕組みで光るのだ。

先述のように、物体を構成する粒子は、その温度に応じたエネルギーを、平均的に持つ。「平均的」ということは、実際にはそれよりも大きなエネルギーを持つ粒子も多少あれば、それよりも小さなエネルギーを持つ粒子も多少はある。その状況で、粒子が遷移すると、光が放出され、粒子のエネルギーは若干下がる。そしてエネルギーが下がった粒子は周囲の粒子と衝突したり光を吸収したりして、再びもとのエネルギーに戻る。このようなことが無数に発生することで、その物体から光が出続けるのだ。このような仕組みを「熱放射」と呼ぶ。

実は、太陽や白熱電球だけでなく、ほとんど全ての物体は、それぞれの温度に応じて熱放射している。例えば、君の体も熱放射している。君の体も光っているのだ!! ただし、その光は、人の肉眼で見える光(可視光)ではなく、赤外線だ。だから、赤外線を検知できるセンサーで人体を調べれば、君の体表面の温度がわかるのだ。赤外線体温計はそれを利用している。また、夜行性の動物を観察するのに赤外線カメラというものをよく使う(NHKの番組「ダーウィンが来た!」を見よ)。が、それも同じ事だ。動物は体温が高いため、周囲よりも多くの赤外線を出す。それを検出するのだ。

第12章

慣性系と慣性力

車がカーブする時に搭乗者は回転の外側にひっぱられる力を感じる。エレベーターに乗ると、エレベーターが動き始めたり止まったりするときに身体が重くなったり軽くなったり感じる。このような力を慣性力という。慣性力は、地球の気象現象を司る「コリオリ力」の源であり、また、農業機械の自動運転に欠かせない「慣性計測装置」の原理でもある。この章では、慣性力について学ぼう。

12.1 慣性系と慣性の法則

質点の位置 (x, y, z) とは、どこかにある「原点」 $(0, 0, 0)$ と、どちらかに向かう座標軸 (x 軸, y 軸, z 軸) の組み合わせ、つまり座標系を定めることによって初めて定量的に定まる概念だ。つまり、座標系が無ければ位置は定まらない。位置の (時刻による) 微分が速度であり、速度の (時刻による) 微分が加速度なのだから、位置が定まらなければ速度も加速度も定まらない。加速度が定まらねば運動方程式は意味を持たない。すなわち、座標系が無ければ運動の法則も無いのだ。

では、「座標系」というのは、どのようにして与えられるのだろうか？ たとえばつくば市のどこかの地点を「原点」と定めて、そこから東西南北と上下に座標軸を張れば、それはひとつの座標系だが、それ以外にも座標系はあり得る。ハワイやフランクフルトあたりに原点を置くこともできるだろう。あるいはつくばエクスプレスの、走行中の快速電車の先頭車両の真ん中に原点を定めて、進行方向に x 軸、右方向に y 軸、などと定めることもできるだろう。そんなのありか!?!と思うかもしれないが、座標系は静止していなくてもよいのだ。そもそも「静止」という考え方が、何か特定の座標系を基準にしたときにのみ成り立つ概念であり、どれかの座標系で見れば静止している質点も、別の座標系で見れば動いている、ということは十分にありえるのだ。

そういうわけで、座標系の与え方には任意性があるし、座標系の与え方によって運動の様子も違って見える。そ

の中で、慣性の法則が成り立つような座標系を、慣性系という。つまり、

慣性系の定義

「力がつりあっていれば、質点が等速直線運動をする」ように見える座標系、つまり、慣性の法則が成り立つ座標系を 慣性系 という。

後に示すように、慣性の法則が成り立たない座標系も存在する。ここで君は次のように思って混乱するかもしれない:「ちょっと待て! 慣性の法則が成り立たないようなことがあるのなら、慣性の法則は基本法則とは言えないではないか!」

慣性の法則は、実は、この世の中には、どこかに慣性系が存在する、ということを保証する法則なのだ。つまり、「力がつりあっていれば、質点が等速直線運動をする」ように見える座標系が、この世のどこかに必ず存在する、というのが、慣性の法則の本当の意味 (物理学における位置づけ) なのだ。そして、慣性系では運動の3法則が成り立つのだ。

慣性系でない座標系で見れば、運動の3法則は成り立たないかもしれない。しかし、だからといって運動の3法則が不完全だというわけではない。この世のどこかにあるという慣性系で見れば、運動の3法則はきちんと成り立つのだ。そういう意味で、慣性の法則は、運動の3法則の「舞台」を設定する法則だと言えよう。

12.2 複数の慣性系

君は幼いころ、「走っている電車の中でジャンプしたら、自分が空中にいる間に電車が進むから、自分は電車の後ろのほうに着地するんじゃないか? 」と思わなかっただろうか? 実際に試すと、そうはならない。等速で走る電車の中では、ジャンプしても、あたかも電車が動いていないときと同じように、飛び上がったときと同じ場所に着地する。不思議なことだ。

電車の外にいる人から見れば、君はジャンプする直前

まで、電車と同じ速度で水平に動いている。そこで君が電車内でジャンプすれば、確かに君は電車内の空中に浮くのだが、君の体は単に垂直方向に上がって下がるのではなく、同時に水平方向にも動いている。その結果、君の体の軌跡は、斜めに投げ上げられたボールと同じように放物線を描く。で、君が着地するとき、電車の床も同じタイミングでそこに来ている、というわけだ。

このように、電車の中で起きていることを電車の外で見れば、違って見えるのだが、それらはそれぞれでつつまが合っており、いずれも運動方程式で説明できる。電車の中での立場では、君の体は鉛直の投げ上げの運動として運動方程式を満たすのであり、電車の外の立場では、君の体は斜めの投げ上げの運動として運動方程式を満たすのだ。

つまり、ひとつの物理現象が、異なる座標系で見れば互いに違って見えるかもしれないが、いずれの見え方も、運動方程式を満たすことがある。それは、それぞれの座標が慣性系である場合だ。この例では、電車の外の座標系（地面に貼り付いた座標系）と電車の中の座標系（電車の床かどこかに貼り付いた座標系）がそれぞれで慣性系である、ということだ。そのことを理論的に考えてみよう。

一般論として、慣性系では、運動方程式がそのまま成り立つ。ある慣性系 O に対して、座標系 O' が、座標軸の向きを変えずに、原点が等速直線運動をするならば、 O' も慣性系だ。なぜだろうか？

いま、座標系 O' の原点 $(0, 0, 0)$ が、慣性系 O では

$$(p_x + u_x t, p_y + u_y t, p_z + u_z t) \quad (12.1)$$

と表せたとする。ここで (p_x, p_y, p_z) は、座標系 O' の原点の、時刻 $t = 0$ のときの慣性系 O における座標であり、 (u_x, u_y, u_z) は、 O' の原点の、 O からみた速度である。簡単のため、3つの座標軸は、慣性系 O と座標系 O' で互いに同じ向きであるとしよう。

さて、慣性系 O における位置

$$(x(t), y(t), z(t)) \quad (12.2)$$

は、座標系 O' において、

$$(X(t), Y(t), Z(t)) \quad (12.3)$$

とあらわされるとすれば、

$$\begin{cases} x(t) = p_x + u_x t + X(t) \\ y(t) = p_y + u_y t + Y(t) \\ z(t) = p_z + u_z t + Z(t) \end{cases} \quad (12.4)$$

となる。この各式の両辺を二階微分すれば、

$$\begin{cases} x''(t) = X''(t) \\ y''(t) = Y''(t) \\ z''(t) = Z''(t) \end{cases} \quad (12.5)$$

となる。つまり、慣性系 O と座標系 O' では、位置や速度が違って見えても、加速度は同じに見える。さて、 O は慣性系だから運動方程式が成り立つ：

$$\begin{cases} F_x = m x''(t) \\ F_y = m y''(t) \\ F_z = m z''(t) \end{cases} \quad (12.6)$$

ところがこれは、上の式によって、

$$\begin{cases} F_x = m X''(t) \\ F_y = m Y''(t) \\ F_z = m Z''(t) \end{cases} \quad (12.7)$$

とできる。つまり、座標系 O' でも運動方程式は成り立つ。運動方程式が成り立てば、力が0のときに、加速度は0だから速度は一定（等速直線運動）となるので、慣性の法則が成り立つ。従って座標系 O' も慣性系である！

12.3 非慣性系と慣性力

ところが、慣性系に対して加速度運動をする座標系では、一般に慣性の法則が成り立たない。例として、ある慣性系 O に対して、座標系 O'' が、座標軸の向きを変えずに、原点が等加速度運動をするときを考えよう。簡単のため、時刻 $t = 0$ で O'' の原点は O の原点に一致しており、速度も0だったとしよう。その場合、 O'' の原点 $(0, 0, 0)$ は、 O では

$$\left(\frac{a_x t^2}{2}, \frac{a_y t^2}{2}, \frac{a_z t^2}{2} \right) \quad (12.8)$$

と表せる。ここで (a_x, a_y, a_z) は、 O'' の原点の、 O からみた加速度である。また、簡単のため、3つの座標軸は、慣性系 O と座標系 O'' で互いに同じ向きであるとしよう。

さて、慣性系 O における位置

$$(x(t), y(t), z(t)) \quad (12.9)$$

は、座標系 O'' において、

$$(X(t), Y(t), Z(t)) \quad (12.10)$$

とあらわされるとすれば,

$$\begin{cases} x(t) = a_x t^2/2 + X(t) \\ y(t) = a_y t^2/2 + Y(t) \\ z(t) = a_z t^2/2 + Z(t) \end{cases} \quad (12.11)$$

となる。この各式の両辺を二階微分すれば,

$$\begin{cases} x''(t) = a_x + X''(t) \\ y''(t) = a_y + Y''(t) \\ z''(t) = a_z + Z''(t) \end{cases} \quad (12.12)$$

となる。さて、 O は慣性系だから運動方程式が成り立つ:

$$\begin{cases} F_x = m x''(t) \\ F_y = m y''(t) \\ F_z = m z''(t) \end{cases} \quad (12.13)$$

ところがこれは、上の式によって,

$$\begin{cases} F_x = m X''(t) + m a_x \\ F_y = m Y''(t) + m a_y \\ F_z = m Z''(t) + m a_z \end{cases} \quad (12.14)$$

となる。これを変形すると,

$$\begin{cases} F_x - m a_x = m X''(t) \\ F_y - m a_y = m Y''(t) \\ F_z - m a_z = m Z''(t) \end{cases} \quad (12.15)$$

となる。このように、座標系 O'' では、運動方程式は左辺に本来の力以外の項が生じる。従って、たとえ力がゼロであっても、座標系 O'' からみた質点は、加速度を持つ運動（つまり等速直線運動でない運動）をするように見える。従って慣性の法則が成り立たない。従って座標系 O'' は慣性系とは言えない。慣性系でない座標系のことを、一般に 非慣性系 という。

ところがここで,

$$(-m a_x, -m a_y, -m a_z) \quad (12.16)$$

も一種の力であると解釈し,

$$(F_x - m a_x, F_y - m a_y, F_z - m a_z) \quad (12.17)$$

をひとまとまりの力と考えてしまえば、式 (12.15) は、見掛け上は運動方程式になる。この式 (12.16) は、もともと何が質点に働きかけて実現した力ではなく、非慣性系 O'' でも運動方程式が成り立つかのようにするために、形式的・仮想的に導入された力(のようなもの)だ。このように、非慣性系において、運動方程式が成り立つようにするとき付け加わる仮想的な力を、慣性力 という。

たとえば、電車が駅に近づいて減速を始めたとする。そのときに君がジャンプすると、君は電車の前のほうに飛んでいこう。ジャンプしなくても君は、減速する電車の中では前方にひっぱられる力を感じる。あるいは加速する電車の中では、後ろに引かれる力を感じる。これらは慣性力の例である。

問 138 日本の H2A 宇宙ロケットは、打ち上げ後、約 100 秒間で高度約 50 km に到達する。

- (1) このロケットの運動を等加速度直線運動とみなし、加速度を求めよ。
- (2) このロケット内の物体には、どのような慣性力がどのくらいかかるか? それは重力の何倍か?

よくある質問 55 トランポリンの上も無重力らしいのでそのしくみが気になります! ... よく知ってますね。トランポリンで跳んでいる人は、重力に引かれて下向きに加速していますが、当人にとってはそれは上向きに引っ張られる力のように感じます(ちょうど前方に向けて加速する車の中で体が後ろ向きに引っ張られてシートに押し付けられるように感じるのと同じ)。これは慣性力です。それが重力を(見掛け上)打ち消して、無重力状態のように感じます。地球のまわりを周回する宇宙船の中が無重力なのも同じです。

よくある質問 56 宇宙ステーションから星出さんがロシアの宇宙船ソユーズで地球に帰ってきたとき、自分の体重の 5 倍の力が体にかかったそうです。いったい体重の 5 倍の力が加わったら身体はどうなってしまうのでしょうか? ... 下りのエレベーターが停止する直前に、乗っている人は体重が大きくなったように感じますね。あれの激しい場合がソユーズの着陸です。ソユーズは着地の寸前にロケットを点火して、強い上向きの加速度をかけて減速します。ソユーズの中で直立していると、まさに体重の 5 倍に相当する力が足にかかるわけなので、60 kg の人が 240 kg の物体を持ち上げているのと同じ状態です。その過酷さを和らげるために、寝た姿勢で降りてくるわけです。寝ていれば、例えば後頭部(枕)にかかる力は頭の重さの 5 倍程度なので、せいぜい数 10 kg で、耐えられないほどではありません。お腹は... メタボな人にはつらいかも。

12.4 回転する座標系の慣性力

回転する座標系における慣性力を考えよう。いま、質量 m の質点が、平面内で運動している。平面内に、ある

慣性系 O をとる。 O では、質点の位置と質点にかかる力はそれぞれ、

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad (12.18)$$

$$\mathbf{f}(t) = (f_x(t), f_y(t)) \quad (12.19)$$

とあらわされたとする (t は時刻)。この慣性系 O の x 軸と y 軸をそれぞれ実軸・虚軸とするような複素平面を考え、 \mathbf{r} と \mathbf{f} をそれぞれ複素数で表現しよう。といっても難しいことではなく、ベクトルの x 成分を実部、 y 成分を虚部とするような複素数を考えるだけだ。このとき、ベクトル $\mathbf{r}(t)$ に対応する複素数を $r(t)$ 、ベクトル $\mathbf{f}(t)$ に対応する複素数を $f(t)$ と書くと、

$$r(t) = x(t) + iy(t) \quad (12.20)$$

$$f(t) = f_x(t) + if_y(t) \quad (12.21)$$

となる。

複素数はこのように、(2次元の) ベクトルを代替することができる。なぜわざわざ複素数を考えるかということ、それが以後の計算を楽にしてくれるからだ。

さて、 O は慣性系なので運動方程式が成り立つ。すなわち、

$$\mathbf{f}(t) = m\mathbf{r}''(t) \quad (12.22)$$

である。成分で書くと、

$$\begin{cases} f_x(t) = mx''(t) \\ f_y(t) = my''(t) \end{cases} \quad (12.23)$$

である。複素数で書くと、

$$f(t) = mr''(t) \quad (12.24)$$

である。ここで $r''(t)$ は、 $r(t)$ の実部と虚部をそれぞれ時間で2階微分してできる複素数であり、すなわち $r''(t) = x''(t) + iy''(t)$ である。

さて、慣性系 O に対して、座標原点は同じだが、角速度 ω で、 x 軸から y 軸に向かって回転する座標系 O' を考える。時刻 $t = 0$ で O と O' の座標軸は一致していたとする (図 12.1)。

座標系 O' において、質点の位置と質点にかかる力はそれぞれ、

$$\mathbf{R}(t) = (X(t), Y(t)) \quad (12.25)$$

$$\mathbf{F}(t) = (F_X(t), F_Y(t)) \quad (12.26)$$

とあらわされたとする。慣性系 O について考えたときと同様に、座標系 O' でのベクトル $\mathbf{R}(t)$ 、 $\mathbf{F}(t)$ にそれぞ

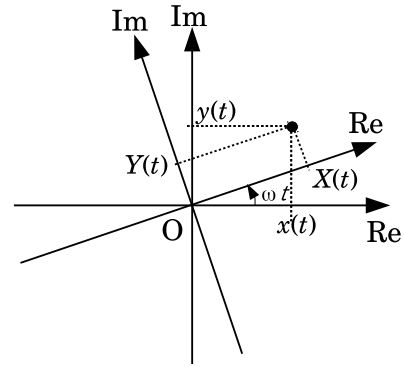


図 12.1 慣性系 O と、それに対して回転する座標系 O' 。複素平面で表現する。傾いているのが座標系 O'

れに対応する複素数 $R(t)$ 、 $F(t)$ を考える。すなわち、

$$R(t) = X(t) + iY(t) \quad (12.27)$$

$$F(t) = F_X(t) + iF_Y(t) \quad (12.28)$$

とする。

座標系 O' の座標軸は慣性系 O の座標軸に対して ωt だけ回転するから、 O における座標成分 (つまり $\mathbf{r}(t)$ の成分) は O' における座標成分 (つまり $\mathbf{R}(t)$ の成分) を ωt だけ回転したものになる。従って、

$$r(t) = R(t)e^{i\omega t} \quad (12.29)$$

$$f(t) = F(t)e^{i\omega t} \quad (12.30)$$

となる。

さて、式 (12.29) の両辺を t で微分すると、

$$r'(t) = R'(t)e^{i\omega t} + i\omega R(t)e^{i\omega t} \quad (12.31)$$

となる。もういちど両辺を t で微分すると、

$$r''(t) = R''(t)e^{i\omega t} + 2i\omega R'(t)e^{i\omega t} - \omega^2 R(t)e^{i\omega t} \quad (12.32)$$

となる。両辺に m をかけると、

$$mr''(t) = mR''(t)e^{i\omega t} + 2im\omega R'(t)e^{i\omega t} - m\omega^2 R(t)e^{i\omega t} \quad (12.33)$$

$f(t) = mr''(t)$ に注意すると、

$$f(t) = mR''(t)e^{i\omega t} + 2im\omega R'(t)e^{i\omega t} - m\omega^2 R(t)e^{i\omega t} \quad (12.34)$$

となる。式 (12.30) に注意すると、

$$F(t)e^{i\omega t} = mR''(t)e^{i\omega t} + 2im\omega R'(t)e^{i\omega t} - m\omega^2 R(t)e^{i\omega t} \quad (12.35)$$

となる。両辺の全ての項に $e^{i\omega t}$ が掛かっているのをこれを約分する（つまり両辺に $e^{-i\omega t}$ をかける）と、

$$F(t) = mR''(t) + 2im\omega R'(t) - m\omega^2 R(t) \quad (12.36)$$

となる。右辺の第二項と第三項を左辺に移せば、

$$F - 2im\omega R'(t) + m\omega^2 R(t) = mR''(t) \quad (12.37)$$

となる。この式は、座標系 O' でも成り立つ「運動方程式に似たような式」である。ここで慣性力として、

$$-2im\omega R'(t) + m\omega^2 R(t) \quad (12.38)$$

を考えればよい。式 (12.38) の最初の項は、 $R'(t)$ 、つまり座標系 O' での速度に、 $-i$ がかかっている。複素平面で $-i$ をかけるということは、 y 軸から x 軸に向かう向き（「慣性系 O からみた座標系 O' の回転の方向」の逆向き）に 90 度回転することに相当する。つまりこの慣性力は、速度に対して直角にかかる。また、その大きさは速度と角速度 ω に比例する。このような慣性力を、コリオリ力 という。

式 (12.38) の 2 番目の項は、 $R(t)$ 、つまり座標系 O' での位置と、角速度 ω の 2 乗に、それぞれ比例し、 $R(t)$ と同じ向き（原点から離れる方向）にかかる。このような慣性力を、遠心力 という。

問 139 北極点上空を速さ v で飛ぶ、質量 m の飛行機を考える。地球の自転の角速度を ω とする。

- (1) 飛行機にかかるコリオリ力の大きさを m 、 ω 、 v で表せ。
- (2) 飛行機にかかるコリオリ力は重力の約何倍か？ ただし $v = 1000 \text{ km h}^{-1}$ とする。
- (3) 飛行機はまっすぐ飛んだつもりでも、その軌跡はコリオリ力によって横方向にずれる。1 時間の飛行によってどのくらい横にずれるか？

問 140 慣性計測装置 (IMU) とは何かを述べ、その農業利用の例を挙げ、その仕組みをわかりやすく自分の言葉で説明せよ。

問 141 台風は熱帯地方で発生するが、奇妙なことに、熱帯のど真ん中である赤道付近では台風は発生しない。なぜか？

12.5 解答

答 138

- (1) 一定加速度を a とする。打ち上げの瞬間を時刻 0 とする。時刻 t までの飛距離 x は $x = at^2/2$ 。従って、

$$a = \frac{2x}{t^2}$$

これに $t = 100 \text{ s}$ 、 $x = 50000 \text{ m}$ を代入すると、 $a = 10 \text{ m s}^{-2}$ 。注意: 実際はロケットの運動は等加速度運動ではない。その理由のひとつとして、燃料消費に伴って、質量が刻々と減っていくことがある。

- (2) 質量を m とすると、慣性力は ma 。一方、重力は mg 。両者を比較すると、 $a = 10 \text{ m s}^{-2}$ と g はほとんど同じなので、慣性力は（地上付近での）重力にほぼ等しい。ただし、この慣性力は加速方向（上向き）とは逆方向（下向き）にかかるので、重力と慣性力の合力は、重力の約 2 倍（下向き）となる。

答 139

- (1) 式 (12.38) の第二項より、飛行機にかかるコリオリ力の大きさは $2m\omega v$ 。
- (2) 地球の自転の周期を T とすると、角速度は

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{60 \times 60 \times 24 \text{ s}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

一方、 $v = 1000 \text{ km h}^{-1}$ を換算すると、

$$v = 278 \text{ m s}^{-1}。従って、$$

$$\begin{aligned} 2\omega v &= 2 \times 7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \times 278 \text{ m s}^{-1} \\ &= 0.0404 \text{ m s}^{-2} \end{aligned}$$

これは重力加速度の約 0.004 倍。

- (3) 本来は円運動になるはずだが、横方向の等加速度運動として近似すると（加速度 a は (2) で求めた値）、時間 $t = 3600 \text{ s}$ の間に横方向の移動距離は $at^2/2$ になるから、

$$\frac{0.0404 \text{ m s}^{-2} \times (3600 \text{ s})^2}{2} = 2.6 \times 10^5 \text{ m}$$

すなわち、約 260 km。

答 140 略。

答 141 略。

索引

- eV 33
- 運動エネルギー 57
- 運動の三法則 2, 40
- 運動方程式 40
- 運動量 42
- 運動量保存則 65
- エネルギー 27
- エネルギー等分配則 73
- エレクトロン・ボルト 33
- 円運動 52
- 遠心力 107
- 応力 17
- オッカムの剃刀 6
- 温度 73
- カーリング 43, 58
- 概算 6
- 外積 87
- 解析力学 2
- 角運動量 87
- 角運動量保存則 89
- 角振動数 50
- 角速度 50
- 仮想仕事の原理 25
- 慣性系 42, 103
- 慣性抵抗 44
- 慣性能率 94
- 慣性の法則 40
- 慣性モーメント 94
- 慣性力 105
- 起電力 33
- 基本法則 6
- 空気抵抗 44
- クーロンの法則 12
- クーロンの摩擦法則 19
- クーロン力 12
- グラハムの法則 74
- 系 20
- 原理 5
- 剛体 93
- 公理 5
- 合力 9
- 古典力学 2
- コリオリ力 107
- 作用・反作用の法則 9, 40
- 仕事 26
- 仕事率 32
- 磁束密度 13
- 質点 7
- 磁場 13
- 周期 50
- 終端速度 45
- 自由度 73
- 自由落下 43
- 重力 9
- 重力加速度 11
- 垂直抗力 18
- 静止摩擦係数 19
- 静止摩擦力 19
- 遷移 102
- 線積分 80
- 相対論 2
- 第一原理 6
- 単振動 49
- 弾性衝突 67
- 弾性体 16
- 弾性力 16
- 力のつりあい 9
- 力のモーメント 89
- 中心力 90
- 定義 5
- 定理 5
- てこの原理 26
- 電圧 33
- 電位 33
- 電位差 33
- 電荷 12
- 電荷素量 12
- 電磁気学 2
- テンソル 17
- 電場 13
- 電流 33
- 電力 34
- 等加速度直線運動 40
- 等価振り子の長さ 98
- 統計力学 2
- 等時性 7, 83
- 等速直線運動 40
- 動摩擦係数 19
- 動摩擦力 19
- トルク 89
- ニュートン力学 2
- 熱放射 102
- 熱力学 2
- 粘性抵抗 44
- バネ定数 16
- バンジージャンプ 60
- 反発係数 68
- 万有引力の法則 2

非慣性系	105	ボルツマン定数	73
ひずみ	17	摩擦力	19
微分方程式	42	モーメントのつりあい	26, 90
フックの法則	16	モデル	7
フライホイール	96	ヤング率	17
振り子	82, 98	力学	2
ベクトル	10	力学的エネルギー	59
ベクトル解析	13	力学的エネルギー保存則	59
法則	5	力積	66
保存則	61	量子力学	2
保存力	31		
ポテンシャルエネルギー	30		