

生物資源の基礎数学教材

筑波大学生物資源学類

平成 28 年度 秋学期

はじめに

これは、筑波大学生物資源学類 1, 2 年生を対象とする、農学・環境学を学ぶための数学の教科書である。「基礎数学 II」「数理科学演習」「実用解析 I」などの授業で使用する。

数学をなぜ勉強するのか？役に立つから、そして楽しいからである。諸君がどんな分野に進むのであれ、数学ができると楽しいし、有利である。数学は広くて素晴らしい世界を教えてくれる。しかし、数学の勉強には辛抱と時間が必要である。諸君は、数学だけを勉強しに大学へ来たのではなく、限られた青春の時間の中で、他にもやるべき多くのことに直面している。

本書は、そのような諸君が、将来に役に立つ(であろう)数学を、できるだけ短い時間で学べるように工夫して作った。本書の特徴は以下のとおりである：

- 「数学リメディアル教材」
http://www.agbi.tsukuba.ac.jp/~shigen_remedial/math.pdf
 の続編である。読者が同書を完全に習得していることを前提とする。必要に応じて同書を参照する。
- 数学自体の持つ体系性を大切にする。個々の題材の相互の関連性を強調する。それによって、積み重ねて学ぶことの重要性を強調する。
- 厳密性にはこだわらない。例えば微分積分の極限操作は、数学類で学ぶような $\epsilon - \delta$ 論法には依らず、近似的・直感的な理解で良しとする。
- 生物資源学類の教育・研究で実際に役立つ内容を重視する。特に、多くの様々な分野で共通して必要な数学的概念を重点的に学ぶ。数学以外の学問や実用例への「出口」をできる限り示す。
- コンピュータを活用し、実際の数値にこだわる。それによって、農学や環境学などの応用科学者・実務家に必要な、定量的議論をするためのスキルを養う。

そのため「数理科学演習」の履修を勧める(実際、このテキストは「数理科学演習」でも参照される)。

- 以上を達成することを優先し、そのかわり、理系大学のオーソドックスな初年次数学教育のカリキュラムにはこだわらない。有用・必要ならば、高度な内容であってもとりあげ、そうでなければ基本的な事項であっても割愛する。

諸君が今後、必要とする可能性が特に高い数学は、主に以下の 5 つだろう：

- (1) 誤差伝播の法則(独立な確率変数の分散が加算できること。)
- (2) 微分方程式(現象を、微小量同士の関係によって表現し、解析すること)
- (3) 重ね合わせの原理(多くの自然法則で成り立つ数学的構造。フーリエ級数等の基礎)
- (4) 対称行列の理論と応用
- (5) ベクトル解析(空間的に広がりを持つ現象の解析の基礎)

(1) は統計学の基礎であり、「数学リメディアル教材」で学んだ。統計学のほとんどのアイデアは、ここから派生する。(2) は、物理学・化学・生物学・経済学等の様々な科学において、法則を定量的に記述し、それをもとに現象を予測(シミュレーション)する方法論である。(3) は、(2) とも関係するが、この世の自然法則の多くに共通するシンプルで強力な性質であり、現象の理解に役立つ。(4) は、(1)、(3) にも関係し、多変量の統計学(特に主成分分析)や量子力学、材料学等で決定的な働きをする。(5) は電磁気学や流体力学の基礎であり(流体力学は、水理学、つまり水の動きの物理学の基礎であり、農学や食品科学で重要である)、また、経済学等で現れる最適化問題の基礎でもある。

本書は、これらの数学を重点的に提示する。諸君がこれらを自分の言葉できちんと説明できるくらいに理解していれば、とりあえず、どんな分野に行っても「数学が

わからなくて脱落する」というようなことは少ないだろう。

「今や大学はレジャーランドである」と嘆く声がある。しかしレジャーランドはそもそも遊びを通じて感動を人々に与える場である。学問は、本来、知的な遊びであり、人々に感動を与える。従って、学問の府たる大学はそもそも「知のレジャーランド」なのであり、数学は、そのアトラクションの一つなのだ。

ただし、このレジャーランドを楽しむには、コツが必要である。物理学者の Richard P. Feynman は、以下のようなことを述べている：

”The best teaching can be done only when there is a direct individual relationship between a student and a good teacher — a situation in which the student discusses the ideas, think about the things, and talk about the things. It’s impossible to learn very much by simply sitting in a lecture, or even by simply doing problems that are assigned.” — ”The Feynmann Lectures on Physics” より

つまり、教師と学生の 1 対 1 の対話に勝る教育は無い、というのだ。だから、学生諸君には、臆することなく教師を訪ねて質問をぶつけ、数学を楽しんで欲しい。

よくある質問

- 教材を見て、難しそうについていけないか不安になりました。

... そりゃ難しいですよ。大学なんだから当たり前。小中高のおさらいをするために筑波大学に来たんじゃないでしょ？ 皆さんの先輩は、この教材をクリアしたのです。皆さんにもできますよ。

- 数学は勉強したいけど、物理学は勉強する気は無いので、物理学に関連するテーマは避けて下さい。

... 本書は、波動や電磁気学など、物理学・物理学実験に関連するテーマもたくさんとりあげます。物理学は、数学がわかると非常に楽に勉強できるので、「食わず嫌い」をやめて、この機会に勉強しましょう。実際、物理学は全ての理系の基礎です。春学期の「化学 I」は、実質的にはほとんどが物理学の内容だったでしょ？

- でも、光とか波とか、正直、興味無いです。

... あなたは今後、それらを使った計測をしないのですか？ カメラ、分光計、レーザー測距儀、蛍光タンパク質、顕微鏡とか。化学でこれから習う電子軌道も波ですよ。p 軌道, s 軌道, π 軌道とか。

- 数理科学演習をとらなくても大丈夫でしょうか？

... とってください。基礎数学 II は数理科学演習と強くリンクしています。ここで理論を学び、演習で実感する、という学習サイクルは必要です。週 1 回の講義だけで数学ができると思っははいけません。

- 私は生物学コースに行こうと思うので、「基礎数学 II」は履修する必要無いと思うのですが、どうでしょうか？

... 何を履修するかは、あなた自身で決めればよいと思います。ただ、生物学には、数学を必要としない分野も、数学を必要とする分野もあります (素数ゼミって知っていますか?)。それはどのコースでも同じ。「数学ができないと、xxx コースは無理」とか、「xxx コース以外に行かなければ数学は不要」などと考えるのは正しくない。この文章の「数学」の部分で「物理学」「化学」「生物学」「経済学」などに置き換えても同様のことが言えます。

- でも、何もかも全てを勉強するのは無理ですよね？

... だからこそ、基礎を学ぶのです。基礎は多くの学問に共通する考え方です。基礎がきちんとしていれば、必要なことを必要な時に手際よく学ぶことができます。

謝辞：本書は、2003 年度以降現在までの、生物資源学類 1 年次科目「基礎数学」「基礎数学演習」「数理科学演習」の教材として発展した。「よくある質問」や、章末の「一問一答」は、それらの授業のアンケートなどから得た。受講生と TA から多くのフィードバック (質問や間違いの指摘) を得て、助けられた。

注：本書は「数学リメディアル教材」(全 15 章)の続編なので、第 16 章から始まる。問題番号が問 501 からはじまるのは、「数学リメディアル教材」の問題と区別するためである。

2016 年 3 月 23 日 奈佐原 (西田) 顕郎

目次

第 16 章	指数関数・対数関数の応用	1
16.1	ランベルト・ベールの法則	1
16.2	温度計の感度	4
16.3	抵抗とコンデンサー	5
16.4	コンデンサーの充放電	6
16.5	ポアソン分布	7
16.6	情報数学	8
16.7	双曲線関数	11
16.8	解答	13
第 17 章	微分方程式をコンピュータで解く	17
17.1	微分方程式の数値解	17
17.2	ロジスティック方程式	18
17.3	カオス	19
17.4	ロトカ・ヴォルテラ方程式	20
17.5	化学反応速度論	22
17.6	運動方程式の数値解	24
17.7	解答	26
第 18 章	線型代数 1: 対称行列と直交行列	31
18.1	行列の積と数ベクトルの内積	31
18.2	行列の積の結合法則	32
18.3	逆行列	32
18.4	転置行列	33
18.5	トレース	34
18.6	対称行列	34
18.7	分散共分散行列	35
18.8	直交行列	36
18.9	対称行列の固有ベクトルは直交する!	37
18.10	主成分分析	38
18.11	数ベクトルの視覚表現	41
18.12	解答	43
第 19 章	線型代数 2: 線型空間	47
19.1	「閉じている」とは	47
19.2	体	47
19.3	線型空間	47

19.4	線型結合と重ね合わせ	53
19.5	解答	54
第 20 章	線型同次微分方程式	55
20.1	線型同次方程式	55
20.2	線型同次微分方程式	55
20.3	演算子法	56
20.4	常微分方程式と偏微分方程式	59
20.5	重ね合わせの原理	61
20.6	解答	64
第 21 章	線型代数 3: 線型写像と線型微分演算子	67
21.1	写像	67
21.2	線型写像	69
21.3	線型微分演算子	71
21.4	線型微分方程式	72
21.5	解答	75
第 22 章	線型代数 4: 線型独立・基底・座標	77
22.1	線型独立	77
22.2	基底と次元	80
22.3	座標	81
22.4	線型写像を行列で表現する	82
22.5	解答	84
第 23 章	線型代数 5: 計量空間	87
23.1	内積	87
23.2	計量空間	88
23.3	クロネッカーのデルタ	91
23.4	正規直交基底	91
23.5	フーリエ級数	93
23.6	複素計量空間	95
23.7	解答	98
第 24 章	線型偏微分方程式 1: 波動方程式	103
24.1	波動方程式	103
24.2	弦を伝える波	105
24.3	人口の年齢構成	106
24.4	正弦波	108
24.5	解答	110
第 25 章	線型偏微分方程式 2: 波動方程式の応用	113
25.1	津波	113
25.2	音波	115
25.3	面を伝える波の波動方程式	117
25.4	解答	119

第 26 章	線型偏微分方程式 3: 変数分離法	121
26.1	線型偏微分方程式の変数分離法	121
26.2	初期条件・境界条件	123
26.3	熱伝導方程式・拡散方程式	127
26.4	変数分離法で拡散方程式を解く	128
26.5	初期条件・境界条件	129
26.6	線型偏微分方程式と固有値・固有関数	129
26.7	解答	131
第 27 章	量子力学入門	135
27.1	状態ベクトル	135
27.2	状態ベクトルの時間変化	137
27.3	シュレーディンガー方程式 (行列表示)	138
27.4	定常状態とエネルギー	139
27.5	分子軌道法	139
27.6	固有状態の直交性	141
27.7	シュレーディンガー方程式 (偏微分方程式)	141
27.8	波動方程式・拡散方程式とシュレーディンガー方程式	143
27.9	量子力学の旅	143
27.10	解答	144
第 28 章	線型代数 6: 行列式	145
28.1	2 次の行列式と面積	145
28.2	3 次の行列式と体積	148
28.3	外積 (ベクトル積)	150
28.4	n 次の行列式	152
28.5	解答	155
第 29 章	ベクトル解析 1	159
29.1	スカラー場とベクトル場	159
29.2	2 次元極座標上での積分	160
29.3	3 次元の極座標	162
29.4	3 次元極座標上での積分	164
29.5	ヤコビアン	164
29.6	(発展) 原子内の電子軌道	165
29.7	解答	166
第 30 章	ベクトル解析 2	171
30.1	ナブラ演算子と勾配・発散・回転	171
30.2	勾配	172
30.3	線積分	175
30.4	ポテンシャルエネルギーと力	177
30.5	電場・電位・電圧	178
30.6	解答	179
第 31 章	ベクトル解析 3	181

31.1	フラックス	181
31.2	面の向きとフラックス	181
31.3	流れの向きとフラックス	183
31.4	内積による面積分	184
31.5	発散	185
31.6	拡散方程式	187
31.7	ラプラシアン	188
31.8	解答	189
第 32 章	ベクトル解析 4	191
32.1	ガウスの発散定理	191
32.2	回転 (rotation)	193
32.3	回転 (rotation) の意味	195
32.4	ストークスの定理	197
32.5	注意: 掛け算の順序について	199
32.6	解答	200
第 33 章	マクスウェル方程式と電磁気学	203
33.1	マクスウェル方程式	203
33.2	点電荷まわりの電場 (クーロンの法則)	204
33.3	直線電流のまわりの磁束密度	205
33.4	電磁誘導	206
33.5	電荷の保存則	207
33.6	電磁波	207
33.7	解答	210
索引		211

第16章

指数関数・対数関数の応用

指数関数 e^x は、大学で極めて頻繁に現れる。「化学」で学んだ一次反応に指数関数が出てきたのはまだ序の口だ。指数関数は正規分布の確率密度関数にも出てきた。「生物学」では海中の日射量が深さとともに指数関数的に減衰することを学んだ。後に学ぶが、生物の個体群動態に指数関数は現れるのだ。オイラーの公式を使えば、三角関数までもが指数関数の「仲間」である。

なぜ世の中は指数関数にあふれているのだろうか？ その答えは自然を創った造物主(?)しか知らないが、強いて推測すれば、自然界に現れる微分方程式の多くが指数関数的な解を持つからだろう。特に、後に学ぶ「線型微分方程式」では、指数関数は中心的な役割を果たす。そこで、ここでは指数関数と、その逆関数である対数関数について、もう少し理解を深めよう。

16.1 ランベルト・ベールの法則

化学物質の定量法(量や濃度を測る方法)のひとつに、「吸光度測定」というものがある。これは、溶液、つまり化学物質が溶け込んでいる液体(水とか有機溶媒...エタノールやアセトンなど)に、その化学物質に特徴的な波長の光を当てて、その光がどのくらい減衰するかを調べ、それによって化学物質の量(濃度)を見積る手法である。その原理を考えよう：

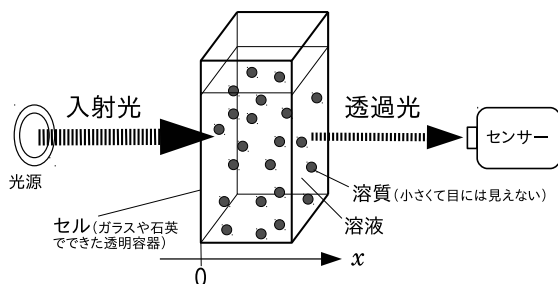


図 16.1 分光光度計の内部の概念図

図 16.1 は、吸光度測定に使う「分光光度計」という装置の概念図である。分光光度計の内部は、おおまかに言って、光源・セル・センサーの 3 つの部分で構成され

る。光源からは、様々な波長の光が出る。その光はセルに当たる。セルは、ガラスや石英等の素材でできた、透明な容器である。セルには、ユーザーが、計測したい溶液試料を入れる。セルに当たった光(入射光)は、セル内の溶液の中を進むにつれて、溶質によって吸収され、減衰していくので、セルを抜け出た光(透過光)は、入射光よりも弱くなっている。透過光の強さをセンサーで測るのである。

透過光が、入射光に対してどのくらい弱まるか、ということ、溶液の濃度と関連付けてみよう：光の進行方向に沿って x 軸をとり、位置 x での光の強さを $I(x)$ とする。光は、溶液の中を微小距離 dx だけ通過すると、溶液の濃度 c 、進んだ距離 dx 、そして光自身の強度 I に比例して強度を失うと考えられる。従って、位置 $x + dx$ における光の強さは、位置 x における光の強さから、 $\kappa I c dx$ だけ弱くなっているはずだ (κ は溶質の種類や光の波長によって決まる適当な正の定数)。これを式で書けば、

$$I(x + dx) = I(x) - \kappa c I dx \quad (16.1)$$

となる。式 (16.1) を変形すると、

$$I(x + dx) - I(x) = -\kappa c I dx \quad (16.2)$$

となる。両辺を dx で割ると、

$$\frac{I(x + dx) - I(x)}{dx} = -\kappa c I \quad (16.3)$$

となる。 dx を十分に小さい距離で考えれば、この左辺は $I(x)$ の微分(導関数)になるので、

$$\frac{dI}{dx} = -\kappa c I \quad (16.4)$$

となる。この式 (16.4) が、溶液中での光強度の変化(減衰)を説明する微分方程式である。

問 501 式 (16.4) を解いて次式を示せ(ヒント: 数学

リメディアル教材)。

$$I(x) = I(0) \exp(-\kappa c x) \quad (16.5)$$

これらの式 (16.4) や (16.5) を、ランベルト・ベール (Lambert-Beer) の法則 という。Lambert のことをランバートと言ったり、Beer のことをビアールと言ったりすることもあり、また、Lambert と Beer の順番をひっくり返して言うこともあるので、「ビアール・ランバートの法則」とか「ランバート・ビアールの法則」とか、いろんな風に使われる。混乱しないように注意しよう。 κ は化学物質の種類と溶媒の種類、そして光の波長によって決まる数値であり、 c や x にはよらない定数である。

問 502 次の 2 つの式を導け：

$$I(x) = I(0) \times 10^{-\kappa c x / \ln 10} \quad (16.6)$$

$$\frac{\kappa}{\ln 10} c x = -\log_{10} \left(\frac{I(x)}{I(0)} \right) \quad (16.7)$$

式 (16.7) の右辺の中の $I(x)/I(0)$ は、透過光の強さを入射光の強さで割ったもの、すなわち透過率であり、これは実験的に計測可能な量である。 x を特定の値 d に設定するとき (化学実験では $d = 1 \text{ cm}$ が一般的)、式 (16.7) の右辺を「吸光度 (absorbance)」と呼び、多くの場合、 A と表記される。すなわち、

$$A := -\log_{10} \left(\frac{I(d)}{I(0)} \right) \quad (16.8)$$

である。

問 503 以下の問に答えよ：

- (1) 透過光 $I(d)$ が入射光 $I(0)$ の半分であるとき、吸光度 A はいくらか?
- (2) 透過光 $I(d)$ が入射光 $I(0)$ の $1/10$ であるとき、吸光度 A はいくらか?

よくある質問 1 吸光度の定義式 (16.8) には、なぜマイナスがついているのですか? ... 一言で言えば、慣習。 $I(x)$ は $I(0)$ 以下 (透過光の強度は入射光の強度以下) なので、 $I(x)/I(0)$ は 1 以下になり、従って、 $\ln\{I(x)/I(0)\}$ は 0 以下になります。光がたくさん吸収されて透過光が弱くなるほど $I(x)/I(0)$ は 0 に近づきますが、そのとき $\ln\{I(x)/I(0)\}$ は絶対値の大きな負の値になります。ところが「吸光度」は、その名のとおり、溶液が光を吸収する程度を表す指標なので、値が負だと直感的にわかりにくい。そこで、わかりやすくするために値を 0

以上にするために、マイナスの符号をつけるのです。

$x = d$ のとき、式 (16.7)、式 (16.8) によって、

$$\frac{\kappa}{\ln 10} c d = A \quad (16.9)$$

$$c = \frac{A}{(\kappa / \ln 10) d} \quad (16.10)$$

となる。 $\kappa / \ln 10$ は、モル吸収係数と呼ばれ、既に多くの物質について多くの化学者が実験によって正確な値を決定し、公表している。 d は前述のように既知 (実験条件で設定する値) である。従って、式 (16.10) の右辺の A に対する係数 ($\ln 10 / (\kappa d)$) は、実験条件で既に決まっている。それを K と書くと、

$$c = K A \quad (16.11)$$

となり、溶液の濃度 c と吸光度 A の間の簡単な比例関係が得られる。これによって、吸光度の測定値から溶液の濃度を知ることができるのだ。

普通、分光光度計で吸光度を測定するときは、 $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ の正方形の底面を持つ、角柱状のセルを用いる。それが、 $d = 1 \text{ cm}$ とする理由である。セルは、ガラスもしくは石英で作られることが多い。石英製のセルはガラスより高価だが、波長の短い光 (紫外線等) を使う場合には必要である。

問 504 80 % アセトン・20 % 純水の混合液を溶媒とすると、その中にあるクロロフィル a のモル吸収係数は、波長 663.3 nm の光に対して、 $76.8 \text{ mmol}^{-1} \text{ dm}^3 \text{ cm}^{-1}$ である。ある、クロロフィル a だけが溶け込んだ 80 % アセトン・20 % 純水混合溶液において、波長 663.3 nm の光に対する吸光度 ($d = 1 \text{ cm}$) が、分光光度計によって、 $A_{663.3} = 0.2$ と測定された。この溶液中のクロロフィル a の濃度を求めよ。注: mmol は「ミリモル」すなわち 0.001 mol のこと。 dm^3 は立方デシメートル、すなわち $(0.1 \text{ m})^3$ 、すなわち 0.001 m^3 、すなわち 1 L のこと。

多くの場合、溶液には複数の種類の溶質 (化学物質) が溶け込んでいる。その場合、それぞれの化学物質が光を吸収するため、事情はやや複雑になる。例えばクロロフィル a が溶け込んだ溶液というのは、普通、植物体を粉碎・抽出して作る試料であり、他の色素、特にクロロフィル b などと一緒に溶け込んでいることが多い。そのような場合は、式 (16.11) を単純に使うわけにはいかない。そこで式 (16.1) に戻って考える。今、物質 1、物

質 2 という 2 種類の溶質が溶け込んでいるとすると、式 (16.1) は以下のように修正される:

$$I(x + dx) = I(x) - \kappa_1 c_1 I dx - \kappa_2 c_2 I dx \quad (16.12)$$

ここで、 κ_1, κ_2 はそれぞれ物質 1, 2 による光吸収の度合いを表す正の定数であり、 c_1, c_2 はそれぞれ物質 1, 2 の濃度である。このように拡張した式をもとに、上述の論理を再構成すると、式 (16.9) が、

$$\frac{\kappa_1}{\ln 10} c_1 d + \frac{\kappa_2}{\ln 10} c_2 d = A \quad (16.13)$$

と修正される。未知数は c_1, c_2 という 2 つであり、式はこの 1 つだけなので、このままでは c_1, c_2 を実験的に決定することはできない!

そこでどうするかというと、複数の波長の光を使うのだ。物質によって、「吸収しやすい波長」は違うので、波長を変えれば κ_1, κ_2 の値も変わる。そこで、異なる 2 つの波長 λ_1, λ_2 の光について、吸光度を計測する。それを A_1, A_2 とすると、式 (16.13) のような式が 2 つできる:

$$\frac{\kappa_{11}}{\ln 10} c_1 d + \frac{\kappa_{12}}{\ln 10} c_2 d = A_1 \quad (16.14)$$

$$\frac{\kappa_{21}}{\ln 10} c_1 d + \frac{\kappa_{22}}{\ln 10} c_2 d = A_2 \quad (16.15)$$

ここで κ_{ij} は、波長 λ_i の光に対する、物質 j による光吸収の度合いを表す正の定数である (i, j はそれぞれ 1 または 2)。式 (16.14)、式 (16.15) を、数ベクトルと行列で書きなおすと、

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} d / \ln 10 & \kappa_{12} d / \ln 10 \\ \kappa_{21} d / \ln 10 & \kappa_{22} d / \ln 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (16.16)$$

となる。式 (16.14)、式 (16.15) や、式 (16.16) は、2 つの未知数 c_1, c_2 に関する連立一次方程式である。これを解くには、式 (16.16) の両辺に、左から、式 (16.16) の中の行列の逆行列をかければよい。すなわち、

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} d / \ln 10 & \kappa_{12} d / \ln 10 \\ \kappa_{21} d / \ln 10 & \kappa_{22} d / \ln 10 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (16.17)$$

とすれば、

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (16.18)$$

である。あるいは、同じ事だが、

$$c_1 = K_{11} A_1 + K_{12} A_2 \quad (16.19)$$

$$c_2 = K_{21} A_1 + K_{22} A_2 \quad (16.20)$$

となる。式 (16.18) や式 (16.19)、式 (16.20) は、式

(16.11) の拡張といえる。

問 505 80 %アセトン・20 %純水の混合液中の、クロロフィル a とクロロフィル b を物質 1, 物質 2 とし、2 つの波長を $\lambda_1 = 663.3 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 646.6 \text{ nm}$ とすると、式 (16.18) の右辺の行列は、

$$\begin{bmatrix} 12.25 \mu\text{g/ml} & -2.85 \mu\text{g/ml} \\ -4.91 \mu\text{g/ml} & 20.31 \mu\text{g/ml} \end{bmatrix} \quad (16.21)$$

であることが知られている*¹。各波長における吸光度が、 $A_1 = 0.30$, $A_2 = 0.13$ であるときの、クロロフィル a とクロロフィル b の濃度を求めよ。

実際の環境計測や食品工学における化学分析では、2 種類どころか、もっともっと多くの種類の物質が混入する溶液を扱うことになる。その場合でも、上の理論は単純に拡張できる。つまり、式 (16.16) や式 (16.18) の数ベクトルと行列の次数 (次元) を増やせばよいのだ。

問 506 式 (16.16) から式 (16.18) のような式を導出することができないのはどのような場合か? そのような場合を避けるためには、波長 1 と波長 2 はどのように選択すべきか? ヒント: 逆行列が存在するか否か。

ランベルト・ベールの法則は、化学物質の定量だけでなく、世の中のありとあらゆる「光の減衰」に関する現象にみられる法則である。例えば上空から海面に差し込む日射が海水中でどのように減衰するかはランベルト・ベールの法則で説明される。

問 507 液体の水 (純水) において、式 (16.5) の κ_c の値は、光の波長に依存する。可視光 (ヒトの目に見える光) では、波長が長い光ほど、 κ_c の値は大きい。例えば、

青色の光 (波長約 $0.48 \mu\text{m}$): $\kappa_c \approx 0.01 \text{ m}^{-1}$

緑色の光 (波長約 $0.55 \mu\text{m}$): $\kappa_c \approx 0.05 \text{ m}^{-1}$

赤色の光 (波長約 $0.68 \mu\text{m}$): $\kappa_c \approx 0.5 \text{ m}^{-1}$

である。

- (1) 深さ 1 m の水を透過したとき、青・緑・赤のそれぞれの光の透過率を求めよ。
- (2) 深さ 10 m の水を透過したとき、青・緑・赤のそれぞれの光の透過率を求めよ。

上の問題から、海がなぜ青いか説明できる: 赤や緑の光は、長距離の水中を通過すると、吸収されてしまい、透

*¹ 田中亮一「色素の分析」低温科学, 67, 315-325, 2009

過できない。従って、太陽からの光がそれなりに深い海に入ると、赤や緑の光は吸収されてしまう。青の光は吸収されにくく、一部が海中の塵や海底で反射・散乱されて、海上に出てくる。それが海を青く見せるのだ。(注: 白色の可視光線は、おおざっぱに言って赤・緑・青の 3 種類の光の混合とみなせる)

ところで、陸上植物は光合成には青と赤の光を主に使うので、赤や青をよく吸収する。相対的に緑はあまり吸収しないため、葉に当たった光は、主に緑色の光だけが反射・透過するのだ。

問 508 海藻には赤や褐色のものが存在するのはなぜか? ヒント: 深い海底に棲む海藻は、赤い光を吸収する必要はあるだろうか?

16.2 温度計の感度

温度計で気温を測ることを考える。温度計が正しく気温の値を指すには、温度計のセンサー部分が気温と同じ温度にならなくてはならない。そのためには、空気とセンサーの間で熱交換する必要があるが、それにはある程度の時間がかかる。

時刻 t における温度計のセンサー部の温度を $T(t)$ とする。最初は T は T_0 であり、急に温度 T_1 の空気にさらされたとしよう ($T_0 \neq T_1$ とする)。その後、温度計のセンサー部の温度が時刻 t とともにどのように変化するか、考えよう。

物理の基本法則として、温度が高いものから温度が低いものに向かって熱は移動する (熱力学第 2 法則)。いま、温度 T_1 の空気から温度 $T(t)$ のセンサーへは、温度差 $T_1 - T(t)$ に比例して熱が流れるとする。その係数を K とすると、単位時間あたりに流れる熱量 J は、

$$J(t) = K(T_1 - T(t)) \quad (16.22)$$

となる。従って、微小時間 dt の間に流れる熱量は、

$$J(t) dt = K(T_1 - T(t)) dt \quad (16.23)$$

となる。また、温度計の熱容量 (単位温度だけ上げるのに必要な熱量) を C とすると、温度計の温度は、「流れてきた熱量/ C 」のぶんだけ変化する。従って、時刻 $t + dt$ における温度は、時刻 t における温度に比べて、

$K(T_1 - T(t)) dt/C$ だけ変化する。それを式にすると、

$$T(t + dt) = T(t) + \frac{K(T_1 - T(t)) dt}{C} \quad (16.24)$$

となる。これを変形すると、

$$T(t + dt) - T(t) = \frac{K(T_1 - T(t)) dt}{C} \quad (16.25)$$

となる。両辺を dt で割ると、

$$\frac{T(t + dt) - T(t)}{dt} = \frac{K(T_1 - T(t))}{C} \quad (16.26)$$

となる。 dt は微小時間なので、左辺は T の微分 (導関数) である。従って、

$$\frac{dT}{dt} = \frac{K(T_1 - T(t))}{C} \quad (16.27)$$

となる。これが、温度計のセンサー部の温度を説明する微分方程式である。

問 509 式 (16.27) を解いてみよう。

(1) 式 (16.27) を変形して次式を示せ:

$$\frac{dT}{T_1 - T(t)} = \frac{K}{C} dt \quad (16.28)$$

(2) 前小問をもとに次式を示せ (D は任意の数):

$$-\ln |T_1 - T(t)| = \frac{K}{C} t + D \quad (16.29)$$

(3) 前小問をもとに次式を示せ:

$$T_1 - T(t) = \pm \exp\left(-\frac{K}{C} t - D\right) \quad (16.30)$$

(4) 初期条件 ($t = 0$ の状況) を考えて、前小問をもとに次式を示せ:

$$T_1 - T_0 = \pm \exp(-D) \quad (16.31)$$

(5) 式 (16.30), 式 (16.31) をもとに、次式を示せ:

$$T_1 - T = (T_1 - T_0) \exp\left(-\frac{K}{C} t\right) \quad (16.32)$$

(6) 前小問をもとに次式を示せ:

$$T = (T_0 - T_1) \exp\left(-\frac{K}{C} t\right) + T_1 \quad (16.33)$$

式 (16.33) によって、温度計のセンサー部の温度変化が説明できる。ここで、

$$\frac{C}{K} = \tau \quad (16.34)$$

とおくと、式 (16.33) は次式のように書き換えられる:

$$T(t) = (T_0 - T_1) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_1 \quad (16.35)$$

τ は「時定数」(time constant) と呼ばれる。「時定数」は、この例だけでなく、多くの現象について考えられる概念である。すなわち、時間的に変化する量が、 $\exp(-t/\tau)$ の関数形 (もしくはそれに定数を足したり掛けたりした形) で表現されるとき、 τ を時定数という (時定数の一般的な定義)。

問 510 温度計のセンサー部の温度変化、すなわち式 (16.35) について、

- (1) $T(0) = T_0$ となることを確かめよ。また、 $T(\infty) = T_1$ となることを確かめよ。
- (2) T を t の関数とみなして、そのグラフをかけ。注: $T_0 > T_1$ の場合と $T_0 < T_1$ の場合をそれぞれ考えよ。
- (3) 時定数 τ が大きくなると、前小問で描いたグラフはどう変化するか、述べよ。
- (4) $T(\tau)$ は T_0 と T_1 の間のどのあたりの値になるか?
- (5) 時定数 30 s のサーミスタ温度計 (電気抵抗と温度の関係を利用した温度計) を、室内 (気温 20 程度) から屋外に持ち出し、1 分後に気温が 32 と測定された。それにはどのくらいの不確かさがあるか? 不確かさを 0.5 以内に収めるにはどのくらい待たねばならないか?

通常、時定数は測定器に固有の特徴量であると考えられる。時定数が小さい測定器は感度は良いが、ノイズを拾いやすく、また、値が安定しない。時定数が大きいと、値は安定するが、急激な変化に追従できない。なにかを測定するときには、その現象の時間変動を考慮して、適切な時定数の測定器を使うことが重要である。

問 511 時定数とは何か?

問 512 温度計の時定数を上げるには、どのようにすれば良いか?

16.3 抵抗とコンデンサー

電気回路は、様々な電子機器や計測装置の基本的な部品として重要である。電気回路はおおまかに言って、電源・配線・素子から構成される。素子とは、電子回路を構成する、電源・配線以外の部品である。主な素子の種類として、抵抗・コイル (インダクタンス)・コンデンサーなどがある (他にも、ダイオードやトランジスタなどもある)。「物理学実験 I」のテーマ IV のエレクトロニクスでは、電気回路の性質を理解するために、コンデンサーと抵抗 (と電源) からなる単純な回路の性質を調べることになっている。ここでは、それを数学的に検討しよう。

ある素子に電圧 V をかけると、それに比例した電流 I が流れるとする。すなわち、 R を、ある正の定数として、

$$V = RI \quad (16.36)$$

が成り立つ。このような素子を「抵抗」(resistance) という (定義)。そして、この式を「オームの法則」という。要するに、抵抗とは「オームの法則が成り立つような素子」のことである。また、この式の R は、素子ごとに固有の値である (厳密に言えば、温度にも依存する)。また、 R のことも「抵抗」と呼ぶ。「抵抗」というとき、素子のことをいうのか、それとも定数 R のことをいうのか、多少紛らわしいが、それは文脈で判断する。

抵抗 R は、式 (16.36) より、 $R = V/I$ となるので、「電圧 ÷ 電流」である。従って、その SI 単位は V/A である。これを と書く ($=V/A$)。 はオームと読む。12 V の電圧をかけて 3 A の電流が流れるときの抵抗は 4 である。

抵抗は、電流に対する障害になるような素子である。障害なんて、何の役に立つのか? むしろ不要ではないか? と君は思うかもしれないが、抵抗は、電気回路を流れる電流を適度の大きさにするためのブレーキみたいなものである。抵抗が適切に配置されていない電気回路には、過大な電流が流れて壊れてしまう。

コンデンサー (condenser; キャパシタンスともいう) は、電荷を蓄える素子である。ならば電池とどう違うのか? 実はコンデンサーは一種の電池である。ただし、乾電池や鉛蓄電池などとは特性や仕組みが違う。コンデンサーは、正電荷と負電荷が互いに引き合う性質を直接的に利用する。一方、乾電池や鉛蓄電池などは化学反応 (酸化還元) を利用し、コンデンサーよりもはるかに大量の電荷を蓄える。コンデンサーは、互いに絶縁された 2

つの導体から構成される。この 2 つの導体の間に、電圧 V をかけると、2 つの導体の片方に $+Q$ 、もう片方に $-Q$ の電荷が蓄えられるとする。このとき、 C をある正の定数として、

$$Q = CV \quad (16.37)$$

という式が成り立つ。あるいは同じことだが、

$$V = \frac{Q}{C} \quad (16.38)$$

が成り立つ。というか、むしろこのような法則が成り立つ素子をコンデンサーと言う。これらの式は、電荷と電場の関係を説明する「ガウスの法則」(電磁気学の基本法則であるマクスウェル方程式のひとつ)から導かれる。詳しくは秋学期「物理学」で学ぶ。ここで定数 C は「静電容量」とか「電気容量」とか単に「容量」などと呼ばれ、各コンデンサーが固有の値をもつ。

電気容量 C は、式 (16.37) より、 $C = Q/V$ となるので、「電荷 ÷ 電圧」である。従って、その SI 単位は C/V である。 $C = A \cdot s / V$ なので、 $A \cdot s / V$ でもある。これを F と書く ($F = A \cdot s / V$)。 F はファラドと読む。これは電磁気学で大きな研究業績をのこした物理学者ファラデーの名に由来する。3 V の電圧で 15 C の電荷が蓄えられる時の静電容量は 5 F である*2

よくある間違い 1 電気容量の単位 F を「ファラデー」と読んでしまう ... 間違い。正しくはファラド。

16.4 コンデンサーの充放電

さて、抵抗 R の抵抗と、電気容量 C のコンデンサー (最初は全く電荷を蓄えていなかったとする) が直列につながれ、時刻 $t = 0$ にスイッチが閉じられて両端に一定の V の電位差が (電源によって) かけられたとしよう (図 16.2; 「物理学実験 I テキスト」P.85 図 5)。

このとき、回路には電流が流れはじめ、その電流はコンデンサーを充電する。同じ電位差をかけ続けると、時間とともにコンデンサーの充電が進み、やがてコンデンサーの電荷は満杯になり、電流はそれ以上流れなくなる。この様子を詳しく考える。なお、以下の説明で、時刻の関数についてはできるだけ (t) をつけて記述するが、それらの導関数については、 (t) を省略して書くこともある。

*2 この例は実際は無茶である。5 F などというのは静電容量として巨大すぎる。普通の電気回路で使われるコンデンサーは、 $10^{-6} F$ や $10^{-9} F$ のような小さな電気容量である。

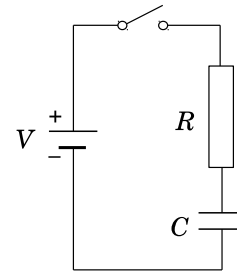


図 16.2 抵抗とコンデンサーからなる回路

時刻 t で回路に電流 $I(t)$ が流れ、コンデンサーに $Q(t)$ の電荷が蓄えられているとする。このとき、抵抗の両端に $V_R(t)$ という電位差が生じているとすると、式 (16.36) より

$$V_R(t) = RI(t) \quad (16.39)$$

である。一方、コンデンサーの両端に V_C という電位差が生じているとすると、式 (16.38) より

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (16.40)$$

である。ここで、 $V_R(t) + V_C(t)$ は回路にかけられた電位差 V に等しくなくてはならない (電位差に関するキルヒホッフの法則) :

$$V = V_R(t) + V_C(t) \quad (16.41)$$

従って、

$$V = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} \quad (16.42)$$

となる。以下、 (t) を省略して書く。式 (16.42) の両辺を t で微分すると、以下ようになる:

$$0 = R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} \quad (16.43)$$

ここで V は定数なので微分するとゼロになってしまったことに注意せよ。

さて、電流 I とは、「単位時間あたりに通過する電荷」なので、微小時間 dt の間にコンデンサーに流れこむ電荷は $I dt$ であり、これがコンデンサーの電荷の変化 dQ に等しい。従って、

$$dQ = I dt \quad (16.44)$$

である。従って、

$$\frac{dQ}{dt} = I \quad (16.45)$$

である。式 (16.45) を式 (16.43) に代入すると、

$$0 = R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} \quad (16.46)$$

となる (というか、このように、 $Q(t)$ を式から消去するために微分したのだ)。これを変形すれば、次式になる:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{CR} \quad (16.47)$$

となる。これが、コンデンサーを流れる電流の時間変化を説明する微分方程式である。式 (16.47) は、変数分離法を用いて解ける。

問 513 コンデンサーの電荷の変化を説明する式 (16.47) を、初期条件: $I(0) = I_0$ のもとで解いて、次式を示せ:

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{CR}\right) \quad (16.48)$$

さて、式 (16.42) に戻って、 $t = 0$ を代入すると、

$$V = RI(0) + \frac{Q(0)}{C} \quad (16.49)$$

となる。ところが、最初はコンデンサーには電荷が蓄えられていないから、 $Q(0) = 0$ である。従って、この式から、 $V = RI(0)$ 、すなわち $I_0 = V/R$ となることがわかる。これを式 (16.48) に代入すると、次式のようになる:

$$I(t) = \frac{V}{R} \exp\left(-\frac{t}{CR}\right) \quad (16.50)$$

これを式 (16.39) に代入すると、

$$V_R(t) = V \exp\left(-\frac{t}{CR}\right) \quad (16.51)$$

となるこれを式 (16.41) に代入すると、

$$V_C(t) = V - V_R = V \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{CR}\right) \right\} \quad (16.52)$$

となる。

問 514 上述の説明を参考にして、式 (16.51) と式 (16.52) を導出せよ。

問 515 式 (16.51) と式 (16.52) のグラフの概形を手描きせよ (横軸を t とする)。

ところで、

$$CR = \tau \quad (16.53)$$

と置くと、式 (16.48) は次式のようになる:

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (16.54)$$

τ は先に述べた「時定数」である。

問 516 時定数 τ の値が大きくなると、 $I(t)$ のグラフの形はどう変化するか、述べよ。

問 517 $R = 1 \text{ k}$ 、つまり 1000 の抵抗と、 $C = 1 \text{ } \mu\text{ F}$ 、つまり 0.000001 F のコンデンサーからなる、上述のような直列回路を考える。

- (1) 時定数は 0.001 s になることを示せ。
- (2) $I(t)$ が I_0 の 1 パーセントになるには何秒を要するか?

問 518 一定の電気容量 C を持つコンデンサーを早く充電するには、どのようにすればよいか?

16.5 ポアソン分布

問 519 森林や草原、農地では、植物の葉が地表を覆うことで土壌浸食を抑制する。この効果を調べるために、葉の量と地表面被覆率の関係を調べよう。

- (1) 1 m^2 の地表の上に、 $0.01 \text{ m}^2 (100 \text{ cm}^2)$ の水平な葉が 1 枚あれば、地表面の 1% が被覆される (被覆率 0.01)。では 1 m^2 の地表の上に、 1 枚あたり $p \text{ m}^2$ の水平な葉が n 枚、ランダムに分布するとき、葉による地表面の被覆率 F は、

$$F = 1 - (1 - p)^n \quad (16.55)$$

となることを示せ (葉の重なりがあることに注意せよ)。

- (2) 1 m^2 の地表の上に存在する葉の総面積が一定値 $L \text{ m}^2$ であるとする。すなわち、

$$np = L \quad (16.56)$$

である。 F を n と L であらわせ (p を消去せよ)。

- (3) 式 (16.56) の L が一定、という条件のもとで、 $n \rightarrow$

$\infty, p \rightarrow 0$ のとき,

$$F = 1 - e^{-L} \quad (16.57)$$

となることを示せ。これは、1枚1枚の葉の大きさが十分小さいとみなせるときに、葉が全体として地表面を覆う割合を与える理論である。

- (4) 1 m^2 の地表の上にある葉の総面積が 1 m^2 のときに地表面を覆う割合は、どのくらいか？
- (5) 地表の1点を k 枚の葉が覆う確率を P_k としよう。

$$P_k = {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (16.58)$$

であることを示せ。ヒント: n 枚の葉のうち k 枚が覆い、 $n-k$ 枚が覆わない。

- (6) 式 (16.56) の L が一定、という条件のもとでは、 $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$ のとき、次式が成り立つことを示せ:

$$P_k = \frac{L^k e^{-L}}{k!} \quad (16.59)$$

- (7) 以上は、葉が水平のときに限った議論だった。実際には、ほとんどの木の葉は傾いてついている。では、葉の傾きを θ として、傾いた葉を持つ森について上の議論を拡張せよ。ヒント: 1枚の葉による地表面の被覆は、 p でなくて $p \cos \theta$ になる。

一般に、確率 p で起きる事象について、試行を n 回行ったとき、その事象が起きる回数を X とすると、 X は確率変数である。 k 回起きる確率、即ち $P(X = k)$ は、

$$P(X = k) = {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (16.60)$$

となる(二項分布)。ところが、 n が十分に大きく、また、個々の試行で事象が起きる確率 p が十分に小さく、なおかつ、 np が一定値とみなせる場合(そのとき $np = \lambda$ とする)は、問 519 と同様に考えて、

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (16.61)$$

となる。これを「ポアソン分布」と呼び、 λ をその「パラメータ」と呼ぶ。式 (16.59) は、パラメータ L のポアソン分布である。

よくある間違い 2 式 (16.61) をポアソン分布の確率密度関数である、と言ってしまう... これは確率密度関数ではありません。確率密度関数は、連続的な確率変数にのみ定義されますが、ポアソン分布は離散的な確率変数の確率分布です。

問 520

- (1) 平均して1年に2回起きる災害について、この1年間の発生回数が2回以下であるような確率を、有効数字4桁で求めよ。ただし個々の災害の生起は互いに独立であるとする。
- (2) 平均して10年に1回起きる災害が、この1年間のうちに3回起きる(なんとという災難な年!)という事象の確率を、有効数字4桁で求めよ。ただし個々の災害の生起は互いに独立であるとする。

16.6 情報数学

計算機などで情報を扱う際、情報の量を考慮しなければならないことが多い。ここで「情報」とは、いくつかの選択肢(異なる状態)のうちどれかを指定することである。最も小さい(基本的な)情報は、2つの選択肢のうちどちらか、である。この情報量を「1ビット」という。計算機の中では、1ビットは、小さなスイッチ1個のオン/オフで表現される。8ビットを1バイトという。

問 521 8ビットで表現可能な選択肢は何通りか? また、16ビットで表現可能な選択肢は何通りか?

問 522 DNA は4種類の塩基(A,T,G,C)がたくさん並ぶことで構成される。

- (1) 4種類の塩基のうちどれかを指定するには、情報量は何ビット必要か? ヒント: 1ビットは2つの選択肢を区別できる。では4つの選択肢(A,T,G,Cのいずれか)を区別するには...?
- (2) ヒトのDNAは、約30億の塩基対から構成されている。これを表現(記録)すると、何ビットの情報量になるか?
- (3) それは何バイトの情報量か?
- (4) それはCD(compact disc)何枚ぶんか?
- (5) それはDVD(digital versatile disc)何枚ぶんか?

この「情報量」の考え方を、さらに拡張しよう。

例 16.1 「明日は晴れ」という天気予報の持つ情報量を考える(ただし、天気予報が外れることは今は考えない)。2月頃の筑波は非常に晴れが多いので、その頃、「明日は晴れ」という情報をもらっても、別にそれほどありがたくない。晴れるのが普通だから。しかし、梅雨の頃、

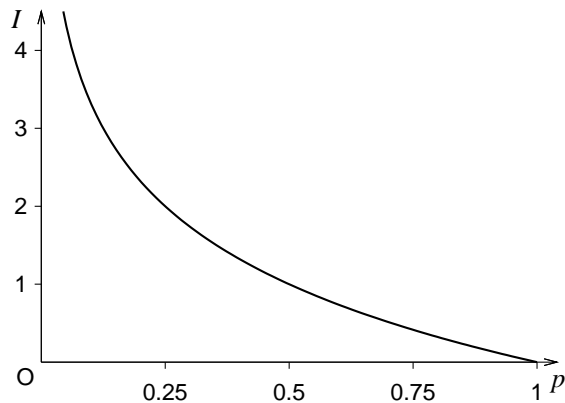


図 16.3 情報量 $I = -\log_2 p$ のグラフ。

毎日雨が降る季節に「明日は晴れ」という予報が出たら、それは感覚的に考えても重い情報である。(例おわり)

「情報の重要さ」まで加味して考えると、「よくあること」の情報量は低く、「あまりないこと」の情報量は高いはずである。そこで、ある情報の発生する確率が p のとき、その情報量 I を、

$$I = -\log_2 p \quad (16.62)$$

と定義する。 I と p の関係は、図 16.3 のようなグラフになる。

情報量 I の単位をビットと呼ぶ。これは以前のビットの定義をうまく拡張していることに注意して欲しい。たとえば、yes か no かのどちらか片方であるような情報の情報量は以前の定義から 1 ビットだったが、yes と no の確率が等しく $1/2$ である場合は、上の新しい定義でも、 $I = -\log_2(1/2) = 1$ となり、1 ビットとなる。しかし、yes と no の確率が等しくない場合は 1 ビットにならない。

問 523 DNA 上のひとつの塩基が、A, T, G, C の 4 つのうちどれであるかの確率は等しく $1/4$ であるとして、それぞれの場合の情報量を求めよ。それが以前の問題と一致していることを確かめよ。

問 524 統計的に晴れの確率が $3/4$ 、雨の確率が $1/4$ であるような場所・季節で、「明日は晴れる」という情報の情報量は何ビットか? 「明日は雨」という情報の情報量は?

例 16.2 次に、例 16.1 に続いて、明日の天気予報そのも

のの価値を考えよう(繰り返すが、ここでは天気予報は絶対当たるものとする)。天気予報を知るのにもし料金がかかるなら、その料金は、ほとんど毎日晴れとかほとんど毎日雨であるような季節と、毎日晴れか雨かわからないような季節では、どちらが高いだろうか?

ほとんど毎日晴れる季節では、晴れの確率 p_s は高く、雨の確率 p_r は低い。従ってその場合、「晴れ」という情報の情報量は低いので値段が安く、「雨」という情報の情報量は高いので値段が高いたろう。これは感覚的にも納得できる。いつも晴れている地域では、「明日は晴れ」と言われても騒がないが、「明日は雨」と言われればみんな騒ぐから。(例おわり)

しかし、だからといって「晴れ」と「雨」に別々の値段をつけてしまうと、客は明日の天気予報の情報を聞く前に、その値段を聞いた瞬間に明日の天気を知ってしまい、お金を払わずに逃げてしまうだろう。そこで「晴れ」か「雨」かによらず、一定の値段をつける必要がある。感覚的には、「晴れ」の値段と「雨」の値段を、出現確率に応じて平均するのが適当だろう。そこで、「晴れか雨か」の情報(天気予報)の価値 H を、以下のように定義しよう:

$$H = -p_s \log_2 p_s - p_r \log_2 p_r \quad (16.63)$$

つまり、これは「晴れ」「雨」という情報量の期待値(加重平均)である。ここでは晴れと雨の 2 つの状態しか考えなかったが、それ以外に、「曇り」「雪」など、いくつもの状態がある場合、それぞれの起きる確率を $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ とすれば、

$$H = -\sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k \quad (16.64)$$

とする(ただし、 $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$)。これを「情報エントロピー」と呼ぶ。情報エントロピーは、情報量の期待値(加重平均)である。

問 525 上のような定義のもとに、

- (1) 晴れの確率が $3/4$ 、雨の確率が $1/4$ であるような場所・季節での、天気予報の情報エントロピーを求めよ。
- (2) 晴れの確率が $9/10$ 、雨の確率が $1/10$ であるような場所・季節での、天気予報の情報エントロピーを求めよ。
- (3) 晴れの確率を p 、雨の確率が $1-p$ とすると、情報工

ントロピーは、

$$H = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$$

となる。これをグラフにあらわせ。ヒント： $p \rightarrow 0$ のとき、 p^p は 1 に近づく。

- (4) 前問の式で、情報エントロピーは $p = 1/2$ のとき最大になることを示せ。
- (5) ほとんど毎日晴れとかほとんど毎日雨であるような季節と、毎日晴れか雨がわからないような季節では、天気予報の値段はどちらが高いか？

問 526 DNA 塩基配列の解析では、4 種類の塩基のうちどれかの塩基があらわれやすいという偏りがあるような部位を探して手がかりにすることが多い。それをするのに情報エントロピーが使われる。情報エントロピーは、状態の出現に偏りがあるほど小さくなる性質があるからである。いま、大腸菌の DNA を調べたところ、ある位置では A, T, G, C の出現確率がそれぞれ 0.34, 0.24, 0.19, 0.23 であった。その部位の塩基の出現に関する情報エントロピーを求めよ。別の部位では、0.28, 0.15, 0.10, 0.47 であった。この部位は、先の部位にくらべて、塩基の出現の偏りが大きいと言えるか？

情報エントロピーは、生物多様性の指標としても使われる：ある地域に、 n 種類の生物がいて、それぞれの種の個体数とその地域の全個体数に占める割合を、 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ とすれば、

$$H = - \sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k \quad (16.65)$$

を生物多様性の指標とする。これは「シャノン・ウィーナー指標」とか「シャノン・ウィーナー指数」とか「シャノン・ウィーナーの多様度指数」と呼ばれることもある*3。 H が大きいほど、生物多様性が大きいと考えられるのである。

問 527 今、ある島にいる鳥の多様性について考える。式 (16.65) で定義される生物多様性指数 H について、

- (1) 島に 3 種類の鳥がいて、それぞれ個体数が互いに等

しいときの H を求めよ。

- (2) 島に 4 種類の鳥がいて、それぞれ個体数が互いに等しいときの H を求めよ。前問のケースとくらべてどちらが大きいのか？
- (3) 一般に、個体数が等しい種が n あるとして、 H は n とどのような関係にあるか？
- (4) 島に 3 種類の鳥がいて、それぞれの個体数の割合は 0.2, 0.3, 0.5 であった。この場合の H はいくらか？前問の、3 種類が等しい割合でいるときとくらべてどうか？競争の結果、個体数の割合が 0.1, 0.2, 0.7 になったとする。このとき生物多様性はどのようになったと考えられるか？

ところで、諸君は情報エントロピーの「エントロピー」という言葉から、化学で出てきたエントロピー、すなわち

$$S_2 - S_1 = \int_{\text{状態 1}}^{\text{状態 2}} \frac{dQ}{T} \quad (16.66)$$

(ここで T は絶対温度、 Q は与えられた熱。 S_1, S_2 はそれぞれ状態 1, 2 のエントロピー) を連想したのではないだろうか？

実は、式 (16.66) のように定義されるエントロピー S は、別の観点から、以下のように表されることが、物理学の理論 (統計力学という) によって示される：

$$S = -k_B \sum_{k=1}^n p_k \ln p_k \quad (16.67)$$

ここで、 n は、平衡状態において系の取りうる微視的な状態*4の数、 p_k はそれぞれの微視的な状態の実現する確率、 k_B はボルツマン定数 (気体定数をアボガドロ数で割ったもの) である。式 (16.67) をボルツマンの原理という。なぜこうなるのかは、ここでは触れない。注目して欲しいのは、式 (16.64) と式 (16.67) が、形式的にほとんど同じ (k_B 倍の有無や対数の底だけが違う) という点である。歴史的には、まず式 (16.67) が、物理学的なエントロピーの解釈として発見された。それが、情報科学にも有用であることがわかって、式 (16.64) が提案された。そして、それが生物多様性等の評価にも有用だということがわかって、式 (16.65) が提案された。

*3 その実体は情報エントロピーなのだが、分野が違えば、違う名前と呼ばれるのである。シャノン (Claude Elwood Shannon) もウィーナー (Norbert Wiener) も、20 世紀前半に活躍した、米国の数学者・情報科学者である。

*4 ここでいう「微視的な状態」とは、前述の S_1 や S_2 における「状態 1」「状態 2」とは別の意味の「状態」である。詳細はここでは触れない。

このように、全く異なるように思える科学の諸分野の間に、それを貫くように共通する考え方が見出されることは、わりとよくある。

16.7 双曲線関数

オイラーの公式:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (16.68)$$

を使った三角関数の表現, つまり

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (16.69)$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (16.70)$$

において、虚数単位 i をぜんぶ消してしまおう。なぜそんなことをするのかというと、特に必然性はない。あえて言えば、イタズラ心である。すると、次式のような関数ができる。これらを「双曲線関数」という(定義):

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (16.71)$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (16.72)$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (16.73)$$

\cosh , \sinh , \tanh はそれぞれ、ハイパボリックコサイン、ハイパボリックサイン、ハイパボリックタンジェントと呼ばれる(書くときは、 $\sin h$ のように h の前に空白をあけたりせず、 \sinh と続けて書くこと)。これは、もはや三角関数とは全く異なる関数だが、以下のような、三角関数によく似た公式を満たす。

問 528 双曲線関数の定義から、以下の式を証明せよ。

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (16.74)$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \quad (16.75)$$

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad (16.76)$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad (16.77)$$

双曲線関数をグラフに描いてみよう。

まず、 $x = 0$ のとき、

$$\sinh 0 = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0 \quad (16.78)$$

$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1 \quad (16.79)$$

$$\tanh 0 = \frac{\sinh 0}{\cosh 0} = \frac{0}{1} = 0 \quad (16.80)$$

となる。

さて、 $y = f(x) = \sinh x$ のグラフを考えよう。この関数には以下のような性質がある:

- $f(0) = \sinh 0 = 0$ だから、原点を通る。
- $f'(0) = \cosh 0 = 1$ なので、 $x = 0$ での傾きは 1。
- $x \rightarrow \infty$ で $e^x \rightarrow \infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$ なので、 $f(x) \rightarrow \infty$ 。
-

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$$

なので $\sinh x$ は奇関数だからグラフは原点对称。

以上より、 $y = \sinh x$ のグラフは図 16.4 のようになることがわかる。

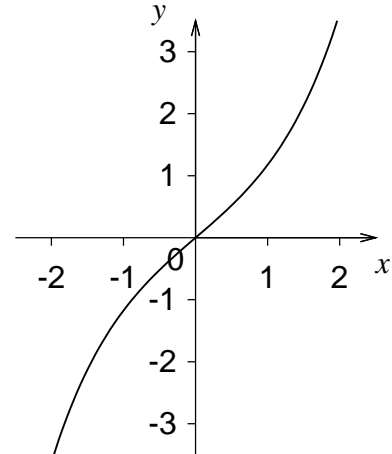


図 16.4 $y = \sinh x$ のグラフ。原点での傾きに注意!

よくある間違い 3 $y = \sinh x$ のグラフを、原点付近での傾きが 0 になるように ($y = x^3$ のグラフのように) 描いてしまう... ($\sinh x$)' = $\cosh x$ であり、 $\cosh 0 = 1$ なので、 $x = 0$ における微分係数は 1 です。つまり原点での傾きは 1 です。

こんどは $y = f(x) = \cosh x$ のグラフを考えよう。

- $f(0) = \cosh 0 = 1$ だから、 $(0, 1)$ を通る。
- $f'(0) = \sinh 0 = 0$ なので、 $x = 0$ での傾きは 0。

- $x \rightarrow \infty$ で $e^x \rightarrow \infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$ なので $f(x) \rightarrow \infty$ 。

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$$

なので $\cosh x$ は偶関数だからグラフは y 軸対称。

以上より, $y = \cosh x$ のグラフは図 16.5 のようになる。

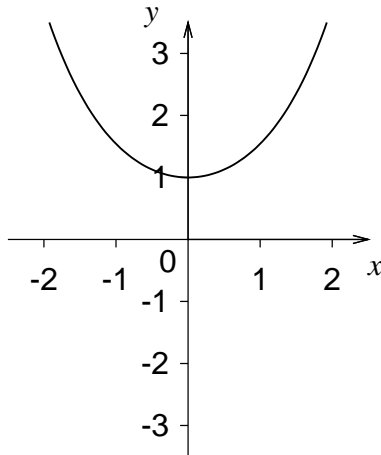


図 16.5 $y = \cosh x$ のグラフ

最後に $y = f(x) = \tanh x$ のグラフを考えよう。

- $f(0) = \tanh 0 = 0$ だから, 原点を通る。
- $f'(0) = 1/\cosh^2 0 = 1$ なので $x = 0$ で傾き 1。
- $x \rightarrow \infty$ では $y \rightarrow 1$ 。

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x$$

なので $\tanh x$ は奇関数だからグラフは原点对称。

以上より, $y = \tanh x$ のグラフは図 16.6 のようになる。

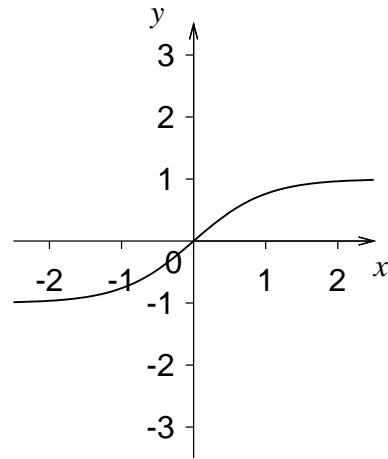


図 16.6 $y = \tanh x$ のグラフ

「双曲線関数」の名の由来は, 前問から明らかだろう。すなわち, $\cosh t$ を x 座標, $\sinh t$ を y 座標にとるような点は, 双曲線を描くのである。

双曲線関数は, 磁石の性質の温度依存性や, 棒の曲げ, 電線やケーブルの垂れ下がりなどの物理現象に, 深く関与している。生物の個体群動態に関する「ロジスティック曲線」も双曲線関数である (諸君は後にそれを確認するだろう)。

よくある質問 2 ハイパボリックって, なんか強そうなカッコイイ響きですね... 私も昔, そう思いましたが, 「ハイパボリック」とは「強い」とか「スゴイ」という意味ではないのです。双曲線のことを「ハイパボラ」と呼ぶのです。

問 529 以上の説明を自力で再現して, $y = \sinh x$, $y = \cosh x$, $y = \tanh x$ のグラフをそれぞれ描け。

問 530 任意の実数 t について, $x = \cosh t$, $y = \sinh t$ とする。

- (1) $x^2 - y^2 = 1$ を示せ。
- (2) xy 平面上で, 点 (x, y) , $(-x, y)$ の軌跡を描け。

16.8 解答

答 501 略 (変数分離法で解く)。

答 502 略。ヒント: 式 (16.5) の右辺の e を $10^{\log_{10} e}$ で置き換えて変形すれば式 (16.6) を得る。 $\log_{10} e = 1/(\ln 10)$ であることに注意。式 (16.6) の両辺を $I(0)$ で割って常用対数をとって変形すれば、式 (16.7) を得る。

答 503

(1) 題意より, $I(d)/I(0) = 1/2$ となる。従って, 式 (16.8) より,

$$A = -\log_{10}(1/2) = \log_{10} 2 = 0.301 \dots (16.81)$$

(2) 題意より, $I(d)/I(0) = 1/10$ となる。従って, 式 (16.8) より,

$$A = -\log_{10}(1/10) = \log_{10} 10 = 1 \quad (16.82)$$

注: 吸光度は無次元量なので単位は不要。

答 504 (計算過程は省略。レポートではきちんと書くこと。) $2.6 \mu\text{mol}/\text{dm}^3$

答 505 (計算過程は省略。レポートではきちんと書くこと。) クロロフィル a は $3.30 \mu\text{g}/\text{ml}$, クロロフィル b は $1.17 \mu\text{g}/\text{ml}$ 。

答 506 (略解。レポートでは根拠も含めてきちんと書くこと) $\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}\kappa_{21} = 0$ となるときはまずい。

答 507 レポートでは計算過程もきちんと書くこと。

(1) 青: 0.99, 緑: 0.95, 赤: 0.61

(2) 青: 0.90, 緑: 0.61, 赤: 0.0067

答 508 略。

答 509 略。

答 510

(1) 略

(2) 図 16.7, 図 16.8 のとおり。

(3) 時定数が大きくなると, $T(t)$ の経時変化はゆっくりになる。すなわち, $T(t)$ のグラフは横軸 (時間軸) 方向に引き伸ばしたような形に変化する。

(4) 式 (16.35) で $t = \tau$ とすると,

$$T(\tau) = (T_0 - T_1)e^{-1} + T_1 \quad (16.83)$$

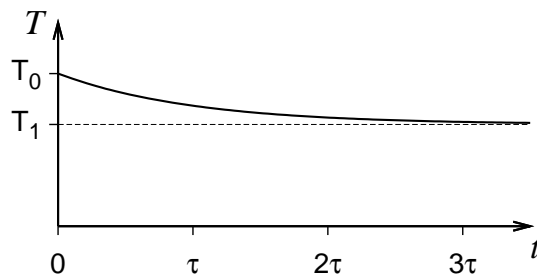


図 16.7 温度計の温度の変化 ($T_0 > T_1$ の場合)

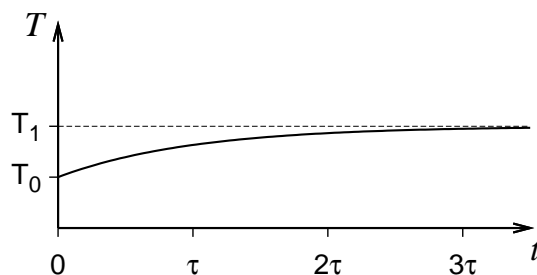


図 16.8 温度計の温度の変化 ($T_0 < T_1$ の場合)

となる。従って,

$$\begin{aligned} \frac{T(\tau) - T_0}{T_1 - T_0} &= \frac{(T_0 - T_1)e^{-1} + T_1 - T_0}{T_1 - T_0} \\ &= -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e} = 0.63 \dots (16.84) \end{aligned}$$

つまり, T_0 から T_1 までのうち, 63 パーセント程度変化したあたり。

(5) 与式を T_1 について解けば,

$$T_1 = \frac{T - T_0 \exp(-t/\tau)}{1 - \exp(-t/\tau)} \quad (16.85)$$

となる。これに, $\tau = 30 \text{ s}$, $T_0 = 20$, $t = 60 \text{ s}$, $T = 32$ を代入すると, $T_1 = 33.9$ 。これが屋外気温である。ところが温度計は 32 を示している。誤差 (不確かさ) は 1.9。また, 与式を t について解けば,

$$t = \tau \ln \frac{T_0 - T_1}{T - T_1} \quad (16.86)$$

となる。不確かさを 0.5 以内にするには, $T = 33.4$ に達するまで待たねばならない。これを代入すると, $t = 99.8 \text{ s}$, すなわち約 100 秒間, 待つ必要がある。

答 511 時間 t に依存して変化する量について, その時間依存性が (定数倍や定数の足し算を除いて), $\exp(-t/\tau)$ のように書けるとき, τ を時定数という。

答 512 時定数 C/K を上げるには, K を小さくするか, C を大きくすればよい。すなわち, 熱の伝わりかたを悪くするか, 熱容量を大きくするように工夫すればよい。

答 513 ~ 答 515 略。

答 516 時定数が大きくなると, $I(t)$ の経時変化はゆっくりになる。すなわち, $I(t)$ のグラフは横軸 (時間軸) 方向に引き伸ばしたような形に変化する。

答 517

- (1) $1000 \times 0.000001 \text{ F} = 0.001 \text{ F}$
 $= 0.001 \text{ (V/A)(C/V)} = 0.001 \text{ C/A} = 0.001 \text{ s.}$
- (2) $I(t)/I_0 = \exp(-t/\tau) = 0.01$ のとき,
 $-t/\tau = \ln 0.01 \doteq -4.6$. 従って,
 $t \doteq 4.6 \times \tau \doteq 4.6 \times 0.001 \text{ s} \doteq 0.0046 \text{ s.}$

答 518 時定数を小さくすればよい。ここでは, 時定数は電気容量と抵抗の積であり, 電気容量が一定なので, 抵抗を小さくすればよい。

答 519

- (1) 地表のある 1 点が, 1 枚の葉で被覆されない確率は $1-p$ 。その点が n 枚の葉でも被覆されない確率は, その n 乗で, $(1-p)^n$ 。従って, n 枚の葉のどれかひとつにでも被覆される確率は, $1 - (1-p)^n$ 。1 m² の中のどの点についてもこれは成り立つから, 平均的には, $1 - (1-p)^n$ の割合の部分が葉に覆われる。これが被覆率 F である。
- (2) $np = L$ より, $p = L/n$ だから, $F = 1 - (1 - L/n)^n$
- (3) 一般に, $n \rightarrow \infty$ のとき, $(1+x/n)^n$ は e^x に近づく。この式で $x = -L$ とみなせば, $F = 1 - (1 - L/n)^n$ は $1 - e^{-L}$ に近づく。よって, $F(L) = 1 - e^{-L}$ 。
- (4) $F(1) = 1 - 1/e \doteq 0.63$ 。よって約 63 パーセント。
- (5) n 枚の葉の中から k 枚の葉を選び出す場合の数は ${}_n C_k$ 通り。また, そのうちひとつの選び方について, 選び出した k 枚の葉が地表の 1 点を覆い, それ以外の葉がその 1 点を覆わない確率は $p^k(1-p)^{n-k}$ である。従って,

$$P_k = {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (16.87)$$

(注: これは 2 項分布の典型である。)

(6) $p = L/n$ より,

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{L}{n}\right)^k \left(1 - \frac{L}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1) L^k}{n^k k!} \left(1 - \frac{L}{n}\right)^{n-k} \\ &= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &\quad \times \frac{L^k}{k!} \left(1 - \frac{L}{n}\right)^n \left(1 - \frac{L}{n}\right)^{-k} \end{aligned} \quad (16.88)$$

ここで, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \rightarrow 1 \quad (16.89)$$

$$\left(1 - \frac{L}{n}\right)^n \rightarrow e^{-L} \quad (16.90)$$

$$\left(1 - \frac{L}{n}\right)^{-k} \rightarrow 1 \quad (16.91)$$

となるので, $n \rightarrow \infty$ のとき式 (16.88) は,

$$P_k \rightarrow \frac{L^k e^{-L}}{k!} \quad (16.92)$$

(7) 1 枚の葉による地表面の被覆は, p でなくて $p \cos \theta$ になる。これに伴って, 上の L を $L \cos \theta$ と修正すればよい。

答 520 (略解) (1) は, 0.67??。(2) は, 0.00015??。?? の部分は秘密 (自分で求めよ)。導出過程も述べること。

答 521 8 ビットで表現可能な選択肢は, $2^8 = 256$ 通り。16 ビットで表現可能な選択肢は, $2^{16} = 65536$ 通り。

答 522

- (1) 4 種類の塩基: A, T, G, C のうちひとつを特定するには, 4 通りの選択肢が必要。4 = 2² だから, 2 ビットの情報量が必要。
- (2) 30 億の塩基対ひとつひとつが 2 ビットの情報量を持つので, 60 億ビット。
- (3) 60 億/8=7.5 億バイト。
- (4) CD の記憶容量は約 700 メガバイト=約 7 億バイト。従って, CD 約 1 枚ぶん。
- (5) DVD の記憶容量は約 5 ギガバイト=約 50 億バイト。従って, DVD の約 0.1 枚ぶん。

答 523 A, T, G, C いずれの場合も, $-\log_2(1/4) = 2$ ビット。

答 524 「明日は晴れる」という情報の情報量は,

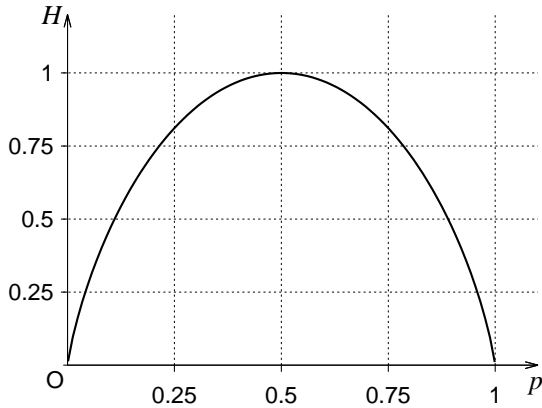


図 16.9 情報エントロピーのグラフ。

$-\log_2(3/4) = 0.42$ ビットで、「明日は雨」という情報の情報量は、 $-\log_2(1/4) = 2$ ビット

答 525

- (1) $p_s = 3/4, p_r = 1/4$ として,
 $H = -p_s \log_2 p_s - p_r \log_2 p_r = 0.81$ ビット
- (2) $p_s = 9/10, p_r = 1/10$ として,
 $H = -p_s \log_2 p_s - p_r \log_2 p_r = 0.47$ ビット
- (3) 図 16.9 の通り。
- (4) H が最大のときは、 dH/dp が 0 になるはずである。
すなわち、

$$\frac{dH}{dp} = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{1-p}{p}\right) = 0 \quad (16.93)$$

従って、 $(1-p)/p = 1$ 、従って、 $p = 1-p$ 、従って、
 $p = 1/2$ 。

- (5) $p = 1/2$ に近いとき、すなわち毎日晴れか雨かわからないような季節のほうが H は高く、従って「値段」も高いと思われる。

答 526

「ある部位」: $H = 1.97$ ビット

「別の部位」: $H = 1.77$ ビット。

「別の部位」のほうが情報エントロピーが小さいので、塩基の出現の偏りが大きいと言える。

答 527

- (1) $H = -\log_2(1/3) = 1.58$ ビット。
(2) $H = -\log_2(1/4) = 2.0$ ビット。
(3) n 種のそれぞれは、全生物数の中で $1/n$ という割合を占める。つまり、式 (16.65) において、 $p_k = 1/n$

である。従って、

$$\begin{aligned} H &= -\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} \\ &= -n \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} \\ &= -\log_2 \frac{1}{n} = \log_2 n \text{ ビット} \end{aligned}$$

- (4) それぞれの個体数の割合が 0.2, 0.3, 0.5 のとき、 $H = 1.49$ ビット。3 種類が等しい割合でいるときは 1.58 ビットなので、それとくらべれば H は小さい (生物多様性は低い)。個体数の割合が 0.1, 0.2, 0.7 になったとき、 $H = 1.16$ ビット。このとき生物多様性は、より低くなったと考えられる。

答 528

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ (\cosh x)' &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \\ (\sinh x)' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \\ (\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' \\ &= \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \end{aligned}$$

答 529 略。

答 530

- (1) 式 (16.74) より自明。
(2) 図 16.10。描き方はリメディアル教材参照。

一問一答

- ランベルト・ベールの法則がいかに重要か良く分かりました。
... ついでに言うと、放射線が物体を通り抜けるときもランベルト・ベールの法則が成り立ちます。
- わからなかった問題も 1 日おくと解けたりして不思議。 / 定義の大切さを再び感じました。

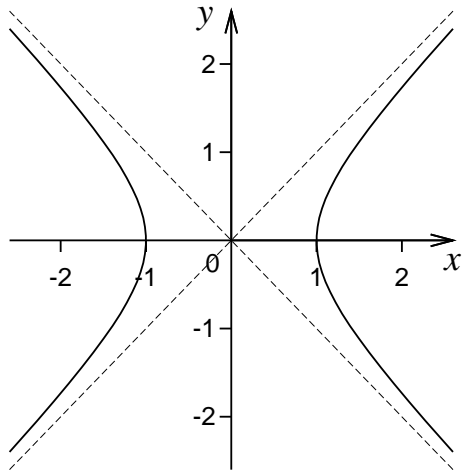


図 16.10 y 軸より右側は $(\cosh t, \sinh t)$ のグラフ。
 y 軸より左側は $(-\cosh t, \sinh t)$ のグラフ。点線は漸
 近線 ($y = \pm x$)

... 定義をしっかりと頭に入れて、時間をかけて考えると、「難しい」ことも、わかってくるものです。それが大変なのだけだね。皆さん頭やわらかいから大丈夫ですよ。

- 頭を柔らかくしたい。
 ... 先入観を捨てて素直になることとシンプルに考えることが大切。

第17章

微分方程式をコンピュータで解く

17.1 微分方程式の数値解

微分方程式を、理論的式変形だけで(つまり紙と鉛筆だけで)解くことを、「解析的に解く」という。解析的に解いた解を「解析解」という。解析解は、全く誤差の無い、完璧な解である。しかし、解析的に解ける微分方程式は、実は少ない。

そこで、多くの微分方程式は、計算機によって、微小量の関係式をもとに、愚直に積分を繰り返すことで解く。それを「数値的に解く」という。数値的に解かれた結果を「数値解」という。数値的な解法は、微分方程式の考え方を学ぶのに好適であるし、実用上も重要である。

一般に、未知の関数 $f(x)$ に関する微分方程式

$$f'(x) = F(f(x), x) \tag{17.1}$$

を考えよう。右辺の $F(f(x), x)$ は、 $f(x)$ および x に関する、具体的な数式である。

導関数の定義から、 Δx が十分に 0 に近ければ、

$$f(x + \Delta x) \doteq f(x) + f'(x)\Delta x \tag{17.2}$$

となる。

さて、ある x で $f(x)$ の値が定まっていれば、それと式 (17.1) を使って $f'(x)$ の値を求めることができる。ここで Δx を 0 に近い適当な数にとれば、式 (17.2) で $f(x + \Delta x)$ の値を推定できる。つまり $f(x)$ から、 $f(x + \Delta x)$ を推定できるのだ。

同じようなことをもう 1 回やってみよう: まず、式 (17.1) において、 x を $x + \Delta x$ と置き換えれば、

$$f'(x + \Delta x) = F(f(x + \Delta x), x + \Delta x) \tag{17.3}$$

となる。この式の右辺に、先に推定した $f(x + \Delta x)$ の値を代入すれば、 $f'(x + \Delta x)$ の値を推定できる。そして、式 (17.2) で x を $x + \Delta x$ とすることで

$$f(x + 2\Delta x) \doteq f(x + \Delta x) + f'(x + \Delta x)\Delta x \tag{17.4}$$

となり、この式の右辺に式 (17.3) で推定した $f'(x + \Delta x)$

を代入すれば $f(x + 2\Delta x)$ の値を推定できる。つまり $f(x + \Delta x)$ から、 $f(x + 2\Delta x)$ を推定できるのだ。

同じようなことをさらに何回も繰り返せば、 $f(x + 2\Delta x)$ から $f(x + 3\Delta x)$ を推定し、 $f(x + 3\Delta x)$ から、 $f(x + 4\Delta x)$ を推定し、... というふうに、いくらでも先の f の値を推定できる。こうして、関数 $f(x)$ の全貌が明らかになるのだ。

実際にやってみよう。数学リメディアル教材で学んだように、放射性炭素 ^{14}C の量 $C(t)$ は、以下の微分方程式に従う:

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha C \tag{17.5}$$

ここで α は定数であり、 t は時刻である。この方程式を、計算機で数値的に解いてみよう。上の説明との対応でいえば、 x はここでは t に相当し、 $f(x)$ はここでは $C(t)$ に相当し、 $F(f(x), x)$ はここでは $-\alpha C$ に相当する。時刻の単位として ky (キロイヤー; 1000 年を 1 とする単位) を採用する。 $\alpha = 0.12 / \text{ky}$ であることがわかっている。

まず、表計算ソフトで次のような表を用意しよう:

	A	B	C
1	t	$C'(t)$	$C(t)$
2	0.0	$=-0.12 * C2$	1.0
3	0.2		$=C2 + B2 * (A3 - A2)$
4	0.4		
5	0.6		
...	...		
102	20		

1 行目はメモである。A 列で与える t の刻み (Δt) は、諸君が自由に設定すれば良いが、ここでは 0.2 ky、すなわち 200 年としている。20 ky、すなわち 2 万年まで考えよう。

さて、セル C2 には、 $C(0)$ の値を入れる。ここでは 1.0

モデルとしよう。これが初期条件である。初期条件は、問題設定の段階で、人間が決めておく必要がある。初期条件の与えられていない微分方程式は、数値的に解くことはできない*1。

次に、セル B2 には、 $C'(t)$ を求めるルール、すなわち微分方程式そのものを記述する。セル C2 が C に相当するのだから、それに $-\alpha$ の値、つまり -0.12 をかければよい。従って、セル B2 には「 $=-0.12*C2$ 」と入力する。

次に、セル C3 に、 $C(t + \Delta t)$ を求めるルールを書き込む。これは式 (17.2) に相当する。式 (17.2) において、右辺の $f(x)$ は C2 に相当し、 $f'(x)$ は B2 に相当し、 Δx は A3-A2 に相当する。つまり、セル C3 に「 $=C2+B2*(A3-A2)$ 」と入力すればよい。これは「数学リメディアル教材」で学んだ数値積分と同じ ($C'(t)$ の数値積分) であることに気づくだろう。

あとは、セル B2 をセル B3 以下の B 列全体にコピーペーストし、セル C3 をセル C4 以下の C 列全体にコピーペーストすればよい。これで C 列に、微分方程式の数値解ができあがる。

問 531 A 列と C 列を選択して、 $C(t)$ のグラフを描いてみよう。また、D 列で、解析解である $C(t) = C(0) \exp(-\alpha t)$ を計算し、A 列と D 列を選択して $C(t)$ のグラフを描いてみよう。数値解 (C 列) と解析解 (D 列) はどのくらい一致するか?

注意: 計算機でグラフを作るときは、以下のことに気をつけるべきである:

- 1 枚のグラフ上の複数の線が見分けできるように。特に、白黒で印刷するとき。
- それぞれの線が何を表しているのか、凡例などに明記すること。

ここでやったように、数値的な解法では、まず初期条件 $C(0)$ が与えられ、そこから微分方程式そのものによって $C'(0)$ が定まり、それを積分して、 $t = 0$ からほんの少しだけ経過した時刻 $t = \Delta t$ での値 $C(\Delta t)$ が決まり、またそこから微分方程式そのものによって $C'(\Delta t)$ が決まり、それを積分して、またほんの少しだけ経過した時刻 $t = 2\Delta t$ での値 $C(2\Delta t)$ が決まる … というこ

はあるが、時間間隔 Δt を十分に小さくすることで、精度を改善できる。また、 C' の求め方を工夫して精度を劇的に改良する「ルンゲ・クッタ法」と呼ばれる技術もある (2 年生以降の授業でいずれ習うだろう)。

問 532 時間の刻み幅 Δt を短くすることで、数値解と解析解の差が縮小することを確認せよ (2 とおりの Δt を設定し、それぞれの場合について解析解と重ねてグラフを描け)。

このように、微分方程式は、コンピューターが解いてくれるので、人間の本質的な役割は、微分方程式を「作る」ことにある。何らかの問題に出会ったとき、その問題を微分方程式の形に仕立てあげることが、極めて重要な知的作業である。その訓練をしよう:

17.2 ロジスティック方程式

数学リメディアル教材でロジスティック方程式を学んだ。あれを数値的に解いてみよう。

問 533 ある微生物の個体数 $N(t)$ を考える。 $N(t)$ は以下のロジスティック方程式に従う (α, β は正の定数):

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2 \quad (17.6)$$

- (1) $\alpha = 1.0, \beta = 0.005$ とし、 $N(0) = 10$ として、この方程式を数値的に解き、グラフにせよ。時刻の刻みは、適当に設定せよ。
- (2) 式 (17.6) の解析解は、数学リメディアル教材でやったように、次式のようにになる:

$$N(t) = \frac{N_0 e^{\alpha t}}{1 + N_0 \beta (e^{\alpha t} - 1) / \alpha} \quad (17.7)$$

- $\alpha = 1.0, \beta = 0.005, N_0 = 10$ の場合について、表計算ソフトを使って式 (17.7) をグラフに描け。前小問のグラフと重ねて描け。
- (3) $\alpha = 1.0, \beta = 0.0$ とし (争いが無い場合)、 $N(0) = 10$ として、この方程式を数値的に解き、小問 (1)(2) のグラフに重ねて描け。

*1 解析的に解ける場合は、初期値が与えられないときは積分定数が残る。

問 534 式 (17.7) は、以下のように変形できること

を示せ：

$$N = \frac{\alpha}{2\beta} \left\{ \tanh\left(\frac{\alpha t}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{N_0\beta}{\alpha - N_0\beta}\right) + 1 \right\} \tag{17.8}$$

これで判明したように、個体群の成長曲線は、双曲線関数（ハイパボリックタンジェント）だったのである。

17.3 カオス

ロジスティック方程式 (17.6), すなわち

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2 \tag{17.9}$$

を数値的に解く時、パラメータ (α, β) と時間刻み (Δt) の設定によって、全く思いがけない状況に出くわすことがある。それを実際に体験してみよう。

まずこの方程式を、 $\alpha = 1.0, \beta = 0.005$ のパラメータ設定で数値的に解いてみよう。ただし、あとで t のきざみをいろいろ変えてみるので、 t のきざみの値をひとつのセルに表し、それを絶対参照するようにする。また、あとで初期値をいろいろ変えたときの影響も調べるので、 $N(0) = 10.0$ と $N(0) = 10.1$ の2つのケースについて、それぞれ解いておく（前者を $N(t)$ 、後者を $M(t)$ とする）。

	A	B	C	D	E
1	Δt	α	β		
2	0.1	1.0	0.005		
3	t	$N'(t)$	$N(t)$	$M'(t)$	$M(t)$
4	0.0		10		10.1
5					
6					
...					

セル A2 が t の刻みである。ここでは 0.1 としておこう。

セル A5 に「=A4+A\$2」と入れ（ドルマークを忘れないように！何度も言うが、これは「絶対参照」を指定するしるし）、これを A6 以下の A 列にコピーペーストする。こうすれば、A2 の値を任意に変えることで、 t の刻みが変更され、A5 以下の列全体に自動的に反映される。

次に、セル B4 に、ロジスティック方程式の内容、つまり「=\$B\$2*C4 - \$C\$2*C4*C4」と記述し（ドルマークの有無に注意！）、これを B5 以下の B 列にコピーペース

トする。次にセル C5 に積分のルール「=C4+B4*(\$A5-\$A4)」を記述し、C6 以下の C 列にコピーペーストする（ここで t の値が入っている A 列への参照を絶対参照にしたことに注意）。これで $N(t)$ が解けた。

同様に $M(t)$ についても解こう。セル D4 以下の D 列にはセル B4 の内容をコピーペーストし、セル E5 以下の E 列にはセル C5 の内容をコピーペーストすればよい。ここで先にセル C5 で A 列を絶対参照にしたことが効いてくる。このあたりは表計算ソフトをうまく使いこなすテクニックである。「絶対参照」と「相対参照」をうまく使い分ければ、表計算ソフトの扱いは、非常に効率的になるので、ここはきちんと理解してほしい（数学的には、別に大事なことではないのだが、情報処理技術としてはとても大事）。

問 535 上の操作を実際にパソコンで行い、

- (1) t がゼロから 250 までの範囲で $N(t)$ と $M(t)$ をグラフとして重ねて表示せよ。 $N(t)$ と $M(t)$ はほとんど 1 本の線として重なって見えるはずである。
- (2) t のきざみを、0.5, 1.0, 1.2, 1.3, ... というふうにしこしずつ増やして、そのつど、グラフがどう変化するか観察せよ。グラフが振動しはじめるのは、 t の刻みがどのくらいの大きさのときか？ $N(t)$ と $M(t)$ は、互いにほとんど等しいままか？
- (3) t のきざみが 2.6 を越えると、 $N(t)$ と $M(t)$ が微妙にずれはじめることを確認せよ。
- (4) t のきざみが 3.0 に近づくと、グラフが規則的な振動をしなくなり、ランダムな増減をするようになることを確認せよ。このとき、 $N(t)$ と $M(t)$ は、 $t = 50$ を越えるあたりから全く一致しなくなることを確認せよ。
- (5) t のきざみを 3.0 とする。 $M(t)$ の初期値、つまりセル E4 の値を、10 に非常に近いけど少しだけ違う数（10.001 とか）の範囲で、いろいろ試してみよ。それによって $M(t)$ のグラフが大きく変化することを確認せよ。

注：「確認せよ」との間に「確認した。」とだけ答える人がいるが、それは不十分。実際に確認したという証拠を出さないと、「確認した」とは言えないよね。「値を求めよ」という間に「求めた」だけでは答にならないのと同じ。

このように、ロジスティック方程式は、時刻の刻みを適当な値にすると、数値解が予測不能な変動を見せるという性質を持っている。しかも、この変動は、微分方程式の初期値を、ごくわずかだけ変えることによって、それまでとは全く異なる挙動を示すという不思議な特徴を持っている。このような変動は、ロジスティック方程式を含む「非線型微分方程式」というカテゴリーの微分方程式の多くが持っている性質であり、「カオス」と呼ばれる。

ロジスティック方程式自体は、解析的に厳密に解けばカオスは絶対に発生しない。カオスが発生したのは、ロジスティック方程式を、有限の大きさの時間刻みで近似的に数値的に解こうとしたからである。その意味では、ここで見た「カオス」は、計算誤差の一種とも言える。

しかしながら、自然の生物の個体数変動でも、このようなカオス現象が実際に観察されるのである。なぜならば、ある種の生物は、いつも生殖をするのではなく、外界の季節変化などの影響を受けながら、ある時期にまとまって生殖し、世代交替する、という性質を持つ。その場合、時間刻みは、本質的に、まさしく有限な値（半年とか 1 年とか）で表されるべきであり、そのような生物の個体数の増減は、数学的な条件が揃えば、カオス的な挙動をするのである。

カオスを内在する非線型微分方程式には、例えば気象学で大気の運動を表現するために使われるものもある。従って、天気（大気の運動の微分方程式で予測される！）にはカオスが内在するのである。初期値のわずかな違いによって、その後の挙動が大きくかわるのがカオスであるので、天気予報を正確に当てるのは大変に難しいのである。それをあらわす言葉として、「バタフライ効果」というものがある。興味ある人は、自分で調べてみよう。

17.4 ロトカ・ヴォルテラ方程式

これまで学んだロジスティック方程式の理論は、ひとつの生物種にしか適用できない。しかし自然の生態系は、複数の種が互いに競合しながら生きている。その様子を微分方程式によってモデル化してみよう。

いま、ひとつの島に、羊が $S(t)$ 匹、狼が $W(t)$ 匹いるとしよう。例によって t は時刻である。

羊は島に生える草を食べて生き（島の草は無尽蔵にあるとする）、増殖する。この増殖は羊の個体数（つまり親羊の数）に比例するので、時間間隔 Δt における羊の増殖数は、 $\alpha_1 S \Delta t$ となる（ α_1 は適当な正の定数で、羊

の自然増加率である）。ところが羊が狼に出会うと喰われてしまう。1 匹の羊が狼に出会う確率は狼の数 W に比例する。これが S 匹の羊すべてにあてはまるので、羊と狼の出会う数は W と S の積に比例する。従って、時間間隔 Δt において羊と狼が出会い、羊が喰われてしまう数は、 $\beta_1 SW \Delta t$ となる（ β_1 は適当な正の定数）。従って、時間間隔 Δt における羊の数の増分 ΔS は、

$$\Delta S \doteq \alpha_1 S \Delta t - \beta_1 SW \Delta t \quad (17.10)$$

となる。

一方、狼だが、彼らは羊と違って草を食べないので、羊という餌を捕まえないと、じわじわと死んでいく。その自然減少のぶんは $-\alpha_2 W \Delta t$ となる（ α_2 は適当な正の定数）。一方、狼が羊を喰うことによって寿命が延びたり生殖力が上がったりする。それによる増殖は、羊と狼の出会いの数に比例するとすれば、羊が狼に喰われるときと同じような理屈で、 $\beta_2 SW \Delta t$ となる（ β_2 は適当な正の定数）従って、時間間隔 Δt における狼の数の増分 ΔW は、

$$\Delta W \doteq -\alpha_2 W \Delta t + \beta_2 SW \Delta t \quad (17.11)$$

となる。

問 536 羊の増分の式では SW にかかる係数がマイナスであり、狼の増分の式では SW にかかる係数がプラスであること理由を述べよ。

問 537 羊と狼のそれぞれの増分の式から以下の微分方程式が得られることを示せ。

$$\frac{dS}{dt} = \alpha_1 S - \beta_1 SW \quad (17.12)$$

$$\frac{dW}{dt} = -\alpha_2 W + \beta_2 SW \quad (17.13)$$

よくある質問 3 羊の自然減、狼の自然増は考えなくてもよいのですか? ... 羊の自然減は、羊の自然増と同様に、羊の頭数に比例するので、結局は α_1 にまとめられるのです。狼の自然増についても同様。

式 (17.12) と式 (17.13) をまとめて、「ロトカ・ヴォルテラ方程式」と呼ぶ。ロトカ・ヴォルテラ方程式は、ひとつの変数 t を共有する複数の関数 $S(t)$, $W(t)$ に関す

る連立微分方程式である*2。

では実際にこの方程式を、数値的に解いてみよう。ここでは、 $S(0) = 2.0$, $W(0) = 1.0$, $\alpha_1 = 1.2$, $\alpha_2 = 1.1$, $\beta_1 = 0.6$, $\beta_2 = 0.7$ のケースを解いてみよう。

	A	B	C	D	E
1	Δt	α_1	α_2	β_1	β_2
2	0.1	1.2	1.1	0.6	0.7
3	t	$S'(t)$	$W'(t)$	$S(t)$	$W(t)$
4	0.0			2.0	1.0
5					
6					
...					

ここで、 t の刻み幅 Δt や各種パラメータ (α_1 など) の値を、第 2 行にまとめておき、それを参照しながら計算するようにさせよう。そうすれば、これらの値を後から簡単に変えてみるができる。第 1 行は第 2 行のためのメモである。

第 4 行には初期値 ($t = 0.0$ と、そのときの S , W の値) を入れる。

次に、セル A5 に「=A4+A\$2」と入れ (ドルマークを忘れないように！これは「絶対参照」を指定するしるし)、これを A6 以下の A 列にコピーペーストする。こうすれば、A2 の値を任意に変えることで、 t の刻みが変わり、A5 以下の列全体に自動的に反映される。

次に、セル B4 に、羊の微分方程式を「=B\$2*D4 - D\$2*D4*E4」と記述し (ドルマークの有無に注意！)、これを B5 以下の B 列にコピーペーストする。同様にセル C4 に狼の微分方程式を記述し、C5 以下の C 列にコピーペーストする。

積分は、これまで解いた微分方程式の例と全く同様であり、D5 以下の D 列には B 列の積分、E5 以下の E 列には C 列の積分、に関するルールを書き込めばよい (例：D5 には「=D4+B4*(A5-A4)」と記述)。

これで羊の数の計算結果が D 列に、狼の数の計算結果が E 列にできあがるはずである。

問 538 上の計算を実際にパソコンで、 $t = 0$ から $t = 25$ まで行い、 $S(t)$, $W(t)$ を、横軸を t とするグラフに重ねてかけ。

問 539 この島の、羊と狼で構成される生態系の生物多様性を情報エントロピーで表現し、その時間変動をグラフにせよ。ヒント： $p = S/(S+W)$ として、情報エントロピー $H = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$ を各時刻で計算する列を作る。

問 540 4 つのパラメータ $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ を適当にすこしずつ変化させて、 S と W のグラフがどう変化するか観察せよ。ヒント：第 2 行の値を変えるだけで、表計算ソフトは自動的に計算をやりなおし、グラフを書き直してくれるだろう。

問 541 この数値解のグラフをみると、羊が増えはじめるとその後を追うように狼が増え、やがて羊が減り、その後を追うように狼が減る。しばらくしたらまた羊が増えはじめ、その後を追うように... ということが繰り返されるのがわかる。なぜそうなるか、定性的に説明せよ。

このグラフでは、羊と狼が増減を繰り返すが、その振幅は次第に大きくなっていく。これは、おそらく島の草が無尽蔵にあると仮定したためである。

問 542 もし島の草が無尽蔵でなければ、羊が増えすぎると、草をめぐって羊どうしの競合が起きる。それによる羊の数の減少 (時間間隔 Δt における) を $\gamma S^2 \Delta t$ としよう (これはロジスティック方程式の考え方と同じである)。これを用いてロトカ・ヴォルテラ方程式を書き換えよ。ヒント： dS/dt の式の右辺に項がひとつ追加される。 dW/dt の式はかわらない。

問 543 上のように拡張された状況を、数値的に解け。 $\gamma = 0.1$ とし、その他の係数や初期条件は前問と同じとする。 γ を適当に変えると解はどう変化するか？

以上、見てきたように、単純な人口増加に関する理論から出発して、種内での競合に関する項を付け加えたり (ロジスティック方程式)、複数の種の競合関係 (捕食・被食) を考えたり (ロトカ・ヴォルテラ方程式) することで、微分方程式は複雑な仕組み (プロセス) をどんどん取り入れる。その積み重ねによって、微分方程式は、現実

*2 「連立微分方程式」と似た概念に、複数の変数によって記述される微分方程式、「偏微分方程式」がある。こちらは複数の変数に依存するひとつの関数に関する方程式である。混同しないように。

の複雑な自然・社会の現象に肉薄していくのだ。そういう発展性は、微分方程式の持ち味である。それを支えるのは、微分方程式という考え方のシンプルさである。

例えば、羊が生殖で子を増やすというプロセスと、羊が狼に喰われるというプロセスは、別々に考えて別々の項として表現する。この 2 つの活動が互いに影響を及ぼすことは無いと考えるのである。

このように個々のプロセスを別々の項として扱い、それらを組み合わせるといふ単純な考え方が可能なのは、「短い時間間隔 Δt 」で考えるからである。時間が短かければ、複数のプロセスが、ごちゃごちゃと複合的に起きるような時間的余裕は無いだろうから、単純になるのだ(例えば、君たちの人生は長く続くが、この 1 秒間に限れば、君たちはプリントの次の文字を読む、鉛筆を取る、席を立つ、くらのうちひとつしかできないだろう)。

微分方程式のシンプルさを支えるもうひとつの考え方は、線型近似である。短い時間間隔を考えれば、どんなにごちゃごちゃしたプロセスでも、ざっくり見て線型近似できてしまうことが多い。そうなれば、あとはこっちのものである。線型近似によってシンプルに表された項をあらたに微分方程式に付け加えるだけである。線型近似は「近似」ではあるが、時間間隔がゼロに近づくほど精度はどんどん良くなることを思い出してほしい。

さて、前述のように、微分方程式では、多くの場合、式の項のひとつひとつが、それぞれ独立したプロセスを意味するのである。だから、微分方程式の考え方にある程度慣れれば、微分方程式を「読む」ことができる。式をひとつひとつの項にばらして、それぞれの項について「ああ、この項はこういうプロセスを表現しているんだな」と判読できるようになる。

そうなる、微分方程式はもはや「言葉」であり、表現手段のひとつである。何かの現象の仕組みを表現し、伝達する手段として微分方程式が役立つのである。諸君が物理学や化学、生物学、経済学などの教科書や、専門的な参考書を読むとき、しばしば微分方程式に出会うだろう。その多くの場合は、微分方程式は表現手段として記載されているにすぎない。もちろん、原理的にはそれを解くこともできるのだろう。しかしそこで諸君に要求されるのはそれを「解く」ことではなく、むしろ「読む」ことであり、それによって、現象の背後にあるプロセスをシステムとして理解することである。

そう、微分方程式は、解けなくてもいいのである(その気になれば、どうせ計算機が解いてくれる)。大事なものは、微分方程式を読む力と作る力もきちんと身につける

ことである。

よくある質問 4 狼は、共食いはしないのですか? ... 狼の習性のことはよく知りませんが、もし共食いをすれば、ロジスティック方程式の考え方 ($-\beta N^2$ の部分) で、共食いを表現できます。もともとのロトカ・ヴォルテラ方程式には、共食いは入っていませんが、この考え方を使えば、共食いを追加することができます。つまり、ロトカ・ヴォルテラ方程式の狼の方程式に、この項を付け足せばいいのです。

問 544 ロトカ・ヴォルテラ方程式を拡張して、3 種の生物の食物連鎖を記述せよ。適当な初期条件と係数を設定して、数値的に解いてみよ。

17.5 化学反応速度論

ロトカ・ヴォルテラ方程式の考え方は、実は化学反応速度の考え方とよく似ている。そこで、ついでに化学反応速度について少し学んでおこう(コンピュータの話題からは少し外れるが)。

2 つの化学物質 A, B の間に、



という反応が成り立つ場合を考えよう。反応は左から右に一方方向にしか進まないとする。時間 dt の間に A から B に変化する量は、 dt に比例するだけでなく、 $[A]$ の 2 乗、すなわち $[A]^2$ にも比例すると考えられる。なぜか? これはロジスティック方程式を考えたのと同じ理屈だ。ひとつの A 分子が別の A 分子にぶつかることで反応が起きるのだから、反応の回数は「ぶつかり」の回数に比例するはずだ。そして、ぶつかりの回数は、A の個数の 2 乗に比例することは、ロジスティック方程式で考えたとおりである。従って、時間間隔 dt の間に A から B に変化する反応の回数は、 $[A]^2 dt$ に比例するはずである。この回数 (の 2 倍) だけ、 $[A]$ は減るわけだ。従って、 dt の間の $[A]$ の変化量 $d[A]$ は、ある定数 k (反応速度定数) を用いて、

$$d[A] = -k[A]^2 dt \quad (17.15)$$

となる。すなわち、 $[A]$ は、

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2 \quad (17.16)$$

という微分方程式を満たすだろう。式 (17.16) のように、反応速度が物質量の 2 次式で表現されるような化学反応を「2 次反応」という。

次に、3 つの化学物質 A, B, C の間に、

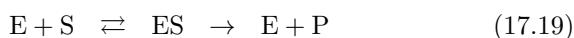


という反応が成り立つ場合を考えよう (A, B は式 (17.14) の A, B とは違う化学物質とする)。この場合もまた、反応は左から右に一方にしか進まないとする。これは、A 分子と B 分子の「ぶつかり」によって生じる反応なので、反応の回数は、 $[A][B]dt$ に比例する。これはロトカ・ヴォルテラ方程式でも出てきた考え方である。羊と狼が出会う頻度がそれぞれの頭数の積に比例したように、物質 A の分子と物質 B の分子が出会う (衝突する) 頻度は両者の濃度の積に比例する。分子同士が出会うことによって反応が起きるのだから、反応速度がこの頻度に比例するのは当然である。従って、 $[A]$ は、

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A][B] \quad (17.18)$$

という微分方程式を満たすだろう (この k は、式 (17.16) の k とは別である。)。式 (17.18) の右辺は 2 次式なので、これも「2 次反応」である。

では次に、化学反応に酵素 (触媒) が関与する場合を考えよう。材料となる物質 (反応前の物質) を物質 S と呼び (substrate の頭文字)、反応後の物質 (生成物) を物質 P と呼び (product の頭文字)。酵素を E と呼び (enzyme の頭文字)。反応は次式のようになる:



これは 2 段階の反応である。最初の反応では、E と S がくっついて、中間体 ES ができる (反応が右向きに進む場合; 反応速度定数を k_{+1} とする) のと、ES が分解して E と S に戻る (反応が左向きに進む場合; 反応速度定数を k_{-1} とする) のとが同時に起きる。2 段目の反応では、ES が E と P に変わる。この 2 段目の反応は右向き (反応速度定数を k_2 とする) だけであり、左向きには進まないことに注意しよう。また、2 段階の反応を経て、E は E に戻ることに注意。

また、酵素 E は最初に $[E_0]$ という濃度だったとし、反応中に新たに供給されたりどこかに流失したりはしないとする。すると、次式が成り立つはずである:

$$[E] + [ES] = [E_0] \quad (17.20)$$

問 545 式 (17.19) の反応において、次式が成り立つことを説明せよ:

$$\frac{d[E]}{dt} = -k_{+1}[E][S] + k_{-1}[ES] + k_2[ES] \quad (17.21)$$

$$\frac{d[P]}{dt} = k_2[ES] \quad (17.22)$$

さて、反応が定常状態であるとき (一定の速度で次々に P が生成され、それに応じて次々に S が供給されている時)、酵素 E の濃度 $[E]$ は一定と考えて良い。その場合、 $d[E]/dt = 0$ なので、式 (17.21) より、次式が成り立つ:

$$-k_{+1}[E][S] + k_{-1}[ES] + k_2[ES] = 0 \quad (17.23)$$

問 546

(1) 式 (17.20) と式 (17.23) から次式を示せ:

$$-k_{+1}[E_0][S] + [ES](k_{+1}[S] + k_{-1} + k_2) = 0 \quad (17.24)$$

(2) 式 (17.24) から次式を示せ:

$$[ES] = \frac{k_{+1}[E_0][S]}{k_{-1} + k_2 + k_{+1}[S]} \quad (17.25)$$

(3) 次式を示せ:

$$\frac{d[P]}{dt} = \frac{k_{+1}k_2[E_0][S]}{k_{-1} + k_2 + k_{+1}[S]} \quad (17.26)$$

(4) $k_2[E_0] = V_{\max}$ とし、 $(k_{-1} + k_2)/k_{+1} = K_m$ とする。次式を示せ:

$$v = \frac{V_{\max}[S]}{K_m + [S]} \quad (17.27)$$

式 (17.27) を「ミカエリス・メンテンの式」という。

問 547 式 (17.27) について考える。

- (1) $[S] = 0$ のとき $v = 0$ であることを示せ。
- (2) $[S] \rightarrow \infty$ の極限で、 v は V_{\max} に限りなく近づいていくことを示せ。
- (3) $[S] = K_m$ のとき、 $v = V_{\max}/2$ となることを示せ。
- (4) 以上を参考にして、式 (17.27) のグラフを描け。横軸を $[S]$ 、縦軸を v とせよ。基質の濃度は 0 以上なので、 $0 \leq [S]$ としてよい。

17.6 運動方程式の数値解

物理学で学んだように、物体の運動は、運動方程式:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (17.28)$$

を必ず満たす*3。ここで、 t は時刻、 \mathbf{F} は物体に働く力のベクトル、 \mathbf{r} は物体の位置ベクトルである。 \mathbf{F} と初期条件 (最初の時刻での物体の位置と速度) を知っていれば、物体の運動はこの微分方程式を数学的に解くことで完全に予想できる。

とは言っても、運動方程式を解析的に解くのは、一般的には簡単ではない。ここでは、運動方程式を数値的に解くことをやってみよう。

例 17.1 図 17.1 のように、壁に一端が固定されたバネの、もう一端に質量 m の物体がとりつけられた系を考えよう。物体と床面の間に摩擦力は働かないとする。物体やバネに働く空気抵抗は無視する。バネ自体の質量も無視する。バネはこの図の左右方向にのみ伸び縮みし、物体もこの図の左右方向にしか動かないとする。物体の動き得る線上に x 軸をとり、バネが自然長の状態であるときの物体の位置を原点 ($x = 0$) とし、バネが伸びる方向を x 軸の正の方向とする。

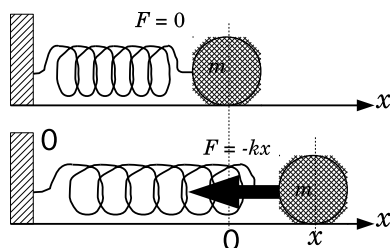


図 17.1 バネにつけられて振動する物体

この物体を、右から指で弾いたり、右から少し動かして放すと、物体は左右に振動運動をはじめるとは、諸君の日常経験から明らかだろう。この運動を物理的に考察しよう。

一般的に、バネは、自然長から x だけ伸びると、

$$F = -kx \quad (17.29)$$

という力を生じることが知られている。 k は「バネ定数」と呼ばれる、それぞれのバネに固有の正の定数である*4。

*3 $d^2 \mathbf{r}/dt^2$ を \mathbf{a} と書いて、左右を入れ替えて、 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ と書かれることも多い。

*4 式 (17.29) の右辺のマイナスは、力の方向が x とは逆方向であることを表す。例えば x が正なら、バネは伸びているが、そ

中学校で習ったように、この法則を「フック (Hooke) の法則」と呼び、このような力を「弾性力」と呼ぶ。

さて、この物体について運動方程式 (17.28) がどうなるか、考えよう。一般に、物体の位置ベクトルは、

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad (17.30)$$

のように、各成分を与えることで表現できる。しかし、この例では、運動は x 軸の方向に限定されているので、全ての時刻について、 $y = z = 0$ である。従って、物体の位置としては x 成分、つまり x の値が時刻とともにどう変わるかだけが解明されれば OK である。

物体に働く力も、 x 成分以外は 0 である (バネは x 軸に沿って伸び縮みするため)。そして、力の x 成分は式 (17.29) によって、 $-kx$ と与えられる。

そこで、運動方程式 (17.28) の x 成分だけを考えれば、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (17.31)$$

となる。この方程式を解けば、バネにつながった物体の運動が予測できるはずである。それがニュートンの主張なのだ! (例おわり)

問 548 上の微分方程式 (17.31) を、数値的に解いてみよう。

- (1) 式 (17.31) は、以下のような、2 つの関数 $x(t), v(t)$ に関する連立微分方程式に書き換えられることを示せ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x \end{cases} \quad (17.32)$$

- (2) $m=1.0$ kg, $k=1.0$ N/m, 初期条件 $x(0) = 1.0$ m, $v(0) = 0$ m/s のもとで、この連立微分方程式を、表計算ソフトで数値的に解け。ヒント: ロトカ・ヴォルテラ方程式と同様。 t のきざみは 0.02 秒以下とし、 t の範囲は 0 秒から 15 秒まで。計算結果の数値は印刷しなくてよい。

この結果、物体が振動運動するということを、コンピュータは君に教えてくれただろう。それは我々の体験的直感に一致する。

のときバネは縮もうとする力 (伸びとは逆方向の力) を生じる。逆に、 x が負なら、バネは縮んでいるが、そのときバネは伸びようとする力 (縮みとは逆方向) を生じる。

さて、ここで注意して欲しいのは、式 (17.31) のように 2 階の微分が入った微分方程式が、新たな関数 (この場合は $v(t)$) を導入することで、1 階の連立微分方程式 (17.32) に変形できた、ということである。一般に、 n を 2 以上の整数として、 n 階の微分を含む微分方程式は、 n 本の方程式からなる 1 階の連立微分方程式に帰着される。たとえどんなにたくさんの式が連立されていても、1 階の微分方程式ならば計算機で数値的に解くことができる。従って、皆さんは、たいていの微分方程式を計算機で数値的に解くことができるようになったのだ。

さて、式 (17.31) の状況に、少しだけ手を加えてみよう。すなわち、速度に比例する抵抗力 (それをストークス抵抗という) が物体にがかかるとしよう。すなわち、空気による抵抗力を $-\gamma v$ とする。

問 549 この系について、

- (1) 式 (17.31) は以下のような微分方程式に修正されることを示せ：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} \quad (17.33)$$

- (2) 式 (17.33) は、以下のような連立微分方程式に書き換えられることを示せ：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{\gamma}{m}v \end{cases} \quad (17.34)$$

- (3) $m=1.0$ kg, $k=1.0$ N/m, $\gamma=0.5$ N s/m とし、初期条件 $x(0) = 1.0$ m, $v(0) = 0$ m/s のもとで、この連立微分方程式を、数値的に解き、グラフを描け。ヒント：ロトカ・ヴォルテラ方程式と同様。 t のきざみは 0.02 秒以下とし、 t の範囲は 0 秒から 15 秒まで)。計算結果の数値は印刷しなくてよい。

この結果、振幅が減衰しながら振動する運動になることがわかるだろう。これは我々の体験的直感にも整合する。バネの振動は、放っておけばそのうち振幅が小さくなって、やがて止まってしまうものである。

17.7 解答

答 531 図 17.2

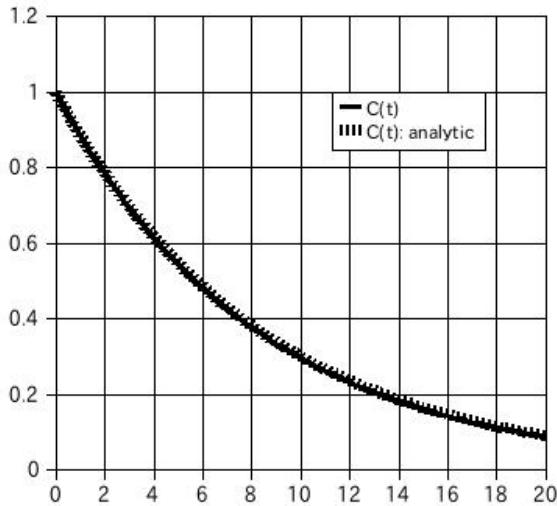


図 17.2 放射性炭素 14 の崩壊に関する数値解 (実線)。点線, すなわち”analytic” と書かれている線は解析解。

答 532 略。

答 533 図 17.3

答 534 式 (17.8) から出発して式 (17.7) まで変形しよう:

$$\exp\left(\frac{\alpha t}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{N_0 \beta}{\alpha - N_0 \beta}\right) = \sqrt{\frac{N_0 \beta}{\alpha - N_0 \beta}} e^{\alpha t/2} \tag{17.35}$$

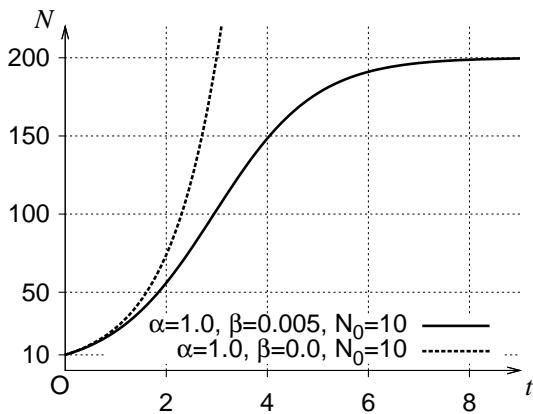


図 17.3 ロジスティック方程式の解。

となることを使くと, 式 (17.8) は, 以下のようになる:

$$N = \frac{\alpha}{2\beta} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{N_0 \beta}{\alpha - N_0 \beta}} e^{\alpha t/2} - \sqrt{\frac{\alpha - N_0 \beta}{N_0 \beta}} e^{-\alpha t/2}}{\sqrt{\frac{N_0 \beta}{\alpha - N_0 \beta}} e^{\alpha t/2} + \sqrt{\frac{\alpha - N_0 \beta}{N_0 \beta}} e^{-\alpha t/2}} + 1 \right\}$$

$$= \frac{\alpha}{2\beta} \left\{ \frac{2\sqrt{\frac{N_0 \beta}{\alpha - N_0 \beta}} e^{\alpha t/2}}{\sqrt{\frac{N_0 \beta}{\alpha - N_0 \beta}} e^{\alpha t/2} + \sqrt{\frac{\alpha - N_0 \beta}{N_0 \beta}} e^{-\alpha t/2}} \right\} \tag{17.36}$$

ここで分子分母にそれぞれ

$$\sqrt{(\alpha - N_0 \beta)(N_0 \beta)} e^{\alpha t/2} \tag{17.37}$$

をかけると,

$$N = \frac{\alpha}{2\beta} \frac{2N_0 \beta e^{\alpha t}}{(N_0 \beta) e^{\alpha t} + \alpha - N_0 \beta} \tag{17.38}$$

$$= \frac{N_0 e^{\alpha t}}{1 + N_0 \beta (e^{\alpha t} - 1)/\alpha} \tag{17.39}$$

以上の式変形を逆にたどればよい。

答 536 羊は狼に会うと喰われて減るのでマイナス, 狼は羊に会うと羊を喰って増えるのでプラスである。(β₁, β₂ はともに正であることに注意!)

答 537 ΔS = S(t+Δt) - S(t) であることに注意すれば,

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t) \doteq \alpha_1 S \Delta t - \beta_1 S W \Delta t$$

両辺を Δt で割って Δt をゼロに近づければ式 (17.12) を得る。式 (17.13) も同様。

答 538 図 17.4。

答 539 図 17.5。

答 540 例えば図 17.6。

答 541 羊が増えると, 狼の方程式の右辺第二項, すなわち羊を捕食することで狼が増える項が支配的になり, 狼の増加速度が高くなる。しかし, 同時に羊の方程式では第二項, すなわち狼に捕食される項が支配的になり, 狼が増えるに従って羊の増加率は減少し, いずれマイナスに転じる。すると羊が減り始め, こんどは狼の方程式の第一項, すなわち自然減少の項が支配的になり, 狼もいずれ減少に転じる。そうして狼がある程度少なくなると, こんどは羊の方程式の第一項, すなわち自然増加の項が支配的になり, 羊が増え始める。このくりかえし。

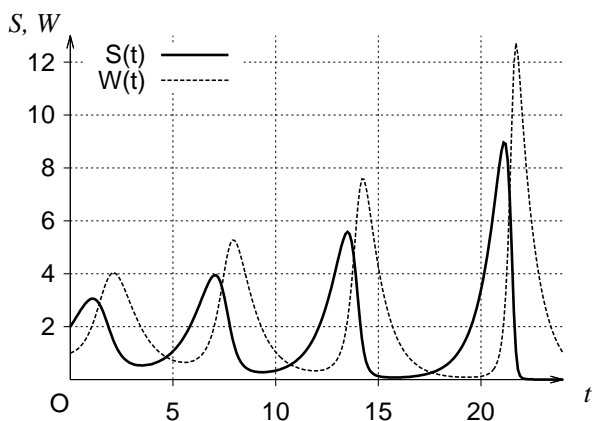


図 17.4 ロトカ・ヴォルテラ方程式の解。

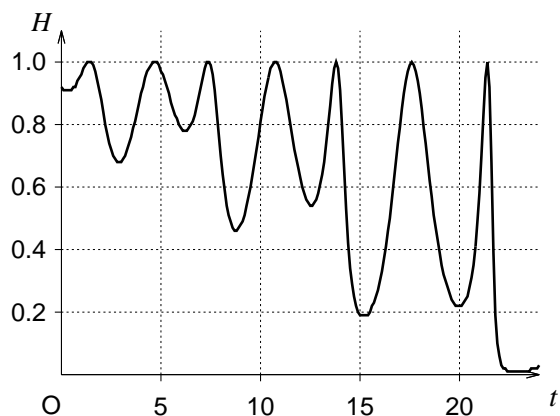


図 17.5 ロトカ・ヴォルテラ方程式の解における生物多様性。

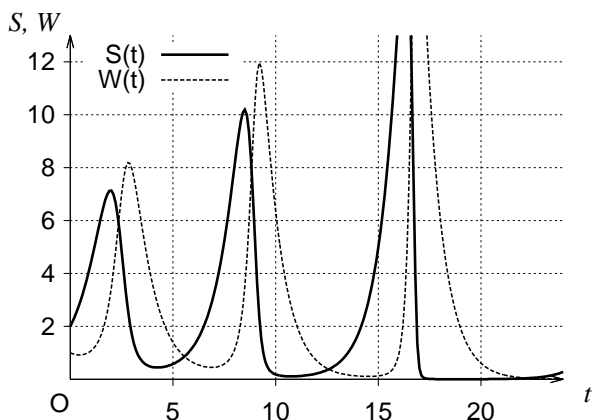


図 17.6 ロトカ・ヴォルテラ方程式の解。β₁ = β₂ = 0.4 に変えた場合。

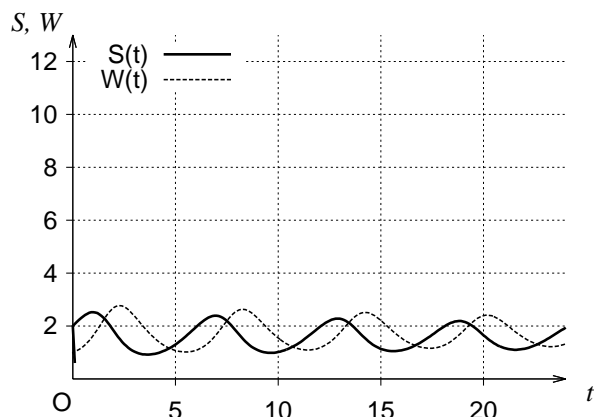


図 17.7 ロトカ・ヴォルテラ方程式の解。羊の変動にロジスティック項が加わった場合。

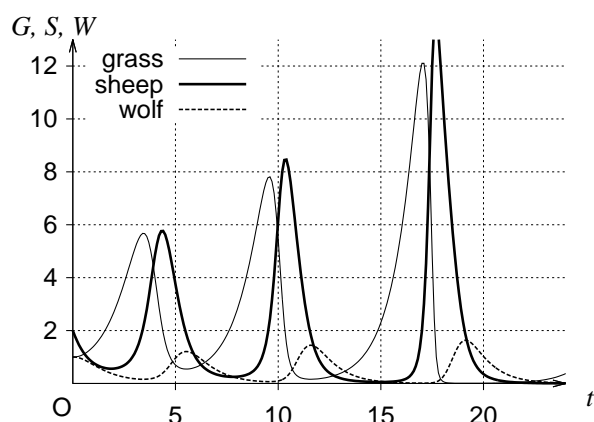


図 17.8 ロトカ・ヴォルテラ方程式の解。3種の生物の競合。grass (草), sheep (羊), wolf (狼)。

答 542

$$\frac{dS}{dt} = \alpha_1 S - \beta_1 S W - \gamma S^2$$

$$\frac{dW}{dt} = -\alpha_2 W + \beta_2 S W$$

答 543 図 17.7。

答 544 例えば、羊と狼に加えて、草 (G) を考える。草は羊に食べられ、羊は狼に食べられるとすれば方程式は、

$$\frac{dG}{dt} = \alpha_0 G - \beta_{01} G S$$

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha_1 S + \beta_{10} G S - \beta_{12} S W$$

$$\frac{dW}{dt} = -\alpha_2 W + \beta_{21} S W$$

例えば図 17.8 は、 $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1.0$, $\beta_{01} = \beta_{10} = \beta_{12} = \beta_{21} = 0.5$, $G(0) = 1, S(0) = 2, W(0) = 1$ の数

値解。

答 545 $E + S \rightleftharpoons ES$ という反応において、右向きで E が減少する速度は E は S と衝突する頻度に比例する。従ってそれは $[E][S]$ に比例する。比例係数を k_{+1} とすると、この反応による $[E]$ の変化速度は $-k_{+1}[E][S]$ となる (マイナスは「減少すること」を意味する)。また、左向きで E が増加する速度は、 $[ES]$ に比例する。比例係数を k_{-1} とすると、この反応による $[E]$ の変化速度は $k_{-1}[ES]$ となる。

また、 $ES \rightarrow E + P$ という反応において、 ES が分解することで E が増加する速度は、同様に $[ES]$ に比例する。比例係数を k_2 とすると、この反応による $[E]$ の変化速度は $k_2[ES]$ となる。これらの 2 つの反応による変化速度を足すと、式 (17.21) を得る。

P が生成する速度は、 $ES \rightarrow E + P$ という反応の速度であり、それは上述のように $k_2[ES]$ である。従って式 (17.22) が成り立つ。

答 546

- (1) 略 (2 つの式から $[E]$ を消去すればよい)。
- (2) 略 (式 (17.24) を変形するだけ。中学数学)。
- (3) 略 (式 (17.22) の $[ES]$ に前小問の式を代入)。
- (4) 略 (式 (17.26) の分子と分母を k_{+1} で割る)。

答 547 略。

答 548 略。結果は図 17.9

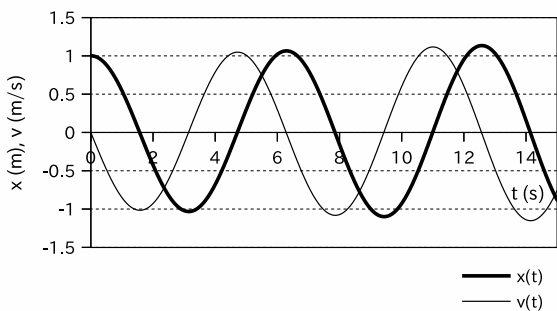


図 17.9 バネにつけられて振動する物体の運動の数値解。振幅が徐々に大きくなっているのは誤差のため (時刻の刻みを小さくすると改善する)。

答 549 略。結果は図 17.10

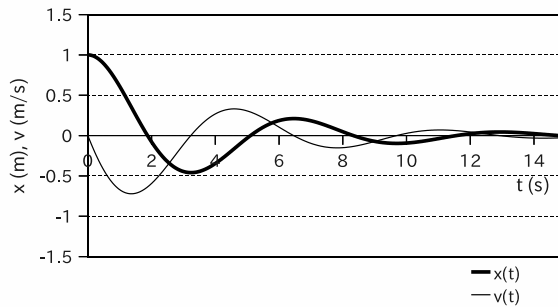


図 17.10 バネにつけられて振動する物体の運動 (空気抵抗つき) の数値解

一問一答

- 昨日の生物の授業でロジスティック方程式が出てきて感動しました。数学が他の分野でも役だっていることを実感しました。
... 「生物学」ではロジスティック方程式が持つ「生物学的な意味」をしっかりと勉強して下さい。
- ロトカ・ヴォルテラ方程式を描けて、感動しました。
... 私も昔、そうでした。意外に単純だよな。
- ロトカ・ヴォルテラ方程式が奇妙な形になりました。負の無限大に発散。
... 時間のきざみを小さくしてみてください。
- ロトカ・ヴォルテラって最初に連立微分方程式を考えた人の名前ですか?
... Alfred J. Lotka (アメリカの統計学者) と Vito Volterra (イタリアの数学者) だそうです (Wikipedia より)。
- パソコンすごっ!/ コンピューターで数学、面白い! / 実際に問題をもっと解きたい時、何をしたらよいのでしょうか。
... パソコン便利でしょ? もっと実際に問題を解きたいならば、何か具体的な分野を系統的に勉強するのがよいと思います。気象学なんかオススメ。あと、コンピュータで何かを予測する手法として、「モンテカルロ法」というものがあります。これは、ここで学んだ「微分方程式を数値的に解く」というのとは全く別の方法。そちらも面白いので勉強してみてください。

- 今回のレポートはめっちゃ楽しかったです。/ エクセルやって良かったです。「ペースト」ってなんだ!?!って思っていた私も、もうグラフ書けるようになりました。課題つらかったけど、先生に感謝しています。ありがとうございます。
... 数学は、コンピューターを使うと、すごく楽しく、わかりやすくなります。
- 問題, 少なくしてほしいです。
... 「若いうちの苦労は買ってでもせよ」
- そんなにたくさん勉強できません...
... だから本来、大学生には、バイトなどやってる暇は無いのです。
- 経済系に行こうと思っていて、物理学を受講していなかった自分がなさけなくなりました。/ 物理とっておけば良かったと今さら思ってます。
... 物理学と直接は「無関係」な学問や仕事も、世の中にたくさんありますが、物理学は多くの学問の基礎です。ある程度の物理学は、教養としても大切です。我々にとって切実な問題である気候変動やエネルギー問題などは、物理学が直接的に関わっています。民主主義の社会では、そのような問題についても市民(有権者)の判断が問われるのです。国の少ない予算をこれらの「物理学的な」問題の対策に振り向けるときに、それは他の事業、例えば社会保障や安全保障、教育等の事業とのトレード・オフになります。大型の科学予算を幹細胞の研究とニュートリノ物理学の研究のどちらに割り振るべきなのか? 原子力発電は続けるべきか? 高速増殖炉による核燃料リサイクルは進められるべきか? 温室効果気体の排出を規制する仕組みはうまくいくのか? そのような問題に対して、「自分にはよくわからないが、誰かがうまく考えて判断してくれるだろう」と皆が思ってしまうと、どうなってしまおうでしょうか?
- 「環境工学コースに進まないから」という理由で基礎数 II を履修するかどうか悩んでいた自分がゴミに見えてきました。超色々な所で数学を使うし、思ってたよりもずっと簡単なので。
... 私自身は環境工学コースの教員ですが、基礎数学を、環境工学コースに進む人だけのために授業しようと思ったことは一度もありません。生物資源学類は、どこのコースに行っても、食糧問題や環境問題などの、人類にとって、とても重要な問題を扱います。その最前線に立とうとする若者に、できるだけ強力で普遍的な「ものの見方」を授けてあげたいと思って授業をしています。恐らく他の授業の先生方も、それぞれそのように考えて授業されていると思います。
- 今さらですが、数学、物理、化学 etc... は総合的に勉強する必要があるなと思いました。
... ていうか、総合的に勉強する方が楽しいし、効率が良いのです。程度問題ですが、ご飯と同じで、あまり好きなものばかりを選んで摂取すると、良くないのです。
- 数学リメディアル教材を完全に理解したいと思いました。
... 完全に理解してください。でないと、本書を読むのは無理・無駄です。
- 自然(生物)的現象が数学的にきちんと表現できることを学び、改めて数学を学ぶことの大切さと数学の素晴らしさを感じました!!
... 楽しんでくれてよかった。実際、科学全体で、数学は驚くほど使われています。だから、数学がわかれば、科学の様々な分野を横断的に、しかも深く、理解することができます。ただし、狭く限定された分野だけを突き詰めようとしたら、必ずしも数学はそんなに「必要」ではありません。実際、生物資源学類にも「うちの研究室では数学は必要ないよ」という先生はたくさんおられます。それでもなお、我々が数学を勉強するのはなぜなのでしょう? それはやはり、人間が根源的に持つ好奇心のせいだと思います。表面的に「そういうものだ」と割りきって飲み込んでしまえば済むようなことを、あえて「きちんと理解したい」と思うことって、あるじゃないですか。数学は、その好奇心を照らしてくれる光なのだと思います。
あのファーブルは、数学が大好きで、昆虫を研究するか数学を研究するか、迷ったことすらあったそうです。ファーブルの昆虫記には、数式は出て来ませんから、表面的には、ファーブルの昆虫研究には数学は無用だったはずですが、それでも、ファーブ

ルは、自分の昆虫研究に数学の考え方がとても役に立った、と述べています。

第18章

線型代数1: 対称行列と直交行列

本章からしばらく「線型代数学」という数学を学ぶ。それは、主にベクトルと行列に関する数学である。普通の理系の大学では、線型代数学を、週1コマで1年かけて、まったり学ぶ。しかし我々にはそこまでの時間は無いので、応用に直結するような基礎を重点的に学ぶ。

とりわけ本章で学ぶ「対称行列」は、実用的に非常に重要である。なぜなら、世の中は対称行列で溢れているからだ! 例えば、農業機械やロボットを制御するには、部品の向きや回転を解析する必要があり、そこでは慣性モーメントという量が必要になる(物理学で学んだ!)。慣性モーメントは実は対称行列だ(それを慣性テンソルと呼ぶ)。灌漑用ダム設計や山崩れの防止などでは地盤の強さを解析する必要があるが、そこでは「応力テンソル」や「歪テンソル」と呼ばれる対称行列が活躍する。化学物質を調べるときに、NMR (nuclear magnetic resonance: 核磁気共鳴) や ESR (electron spin resonance: 電子スピン共鳴) などの、量子力学に基づく手法を使うが、ここでは「ハミルトニアン行列」という対称行列(を拡張したもの)が現れる。そして、本章後半で学ぶのは、統計学で出てくる「分散共分散行列」という対称行列である。

なお、本章では、特に断らないときは、 i, j, k, l, m, n, N を任意の自然数とする。

18.1 行列の積と数ベクトルの内積

数学リメディアル教材で学んだように、行列とは、数が格子状に並んだものであり、縦の並びを「列」、横の並びを「行」という。行列の第 i 行とは、上から数えて i 番目の「横の並び」であり、第 j 列とは、左から数えて j 番目の「縦の並び」である。第 i 行と第 j 列の交差するところにある数を、その行列の (i, j) 成分という。

本章では、記述の簡略化のために、行列 A の (i, j) 成分を、 $[A]_{ij}$ と書く(この添字の ij は「 i と j の積」ではない。 i と j を並べて書くことである)。例えば、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (18.1)$$

のとき、 $[A]_{11} = 1, [A]_{12} = 2, [A]_{21} = 3, [A]_{22} = 4$ である。

さて、2つの行列 A, B について、 A の列数(横幅)と B の行数(縦幅)が等しいときに限り、積 AB を次のように定義する:

$$[AB]_{ij} := \sum_{k=1}^m [A]_{ik} [B]_{kj} \quad (18.2)$$

ここで、 m, n, l は任意の自然数で、 n は A の行数、 m は A の列数かつ B の行数、 l は B の列数とする。 i, k, j はそれぞれ m, n, l 以下の自然数である。これは数学リメディアル教材で既に学んだことを書きなおしただけである。

式(18.2)を、 \sum を使わないで書きなおすと、

$$[AB]_{ij} = [A]_{i1}[B]_{1j} + [A]_{i2}[B]_{2j} + \cdots + [A]_{im}[B]_{mj} \quad (18.3)$$

となる。これは、数ベクトルの内積と見ることができる。

$$[AB]_{ij} = ([A]_{i1}, [A]_{i2}, \dots, [A]_{im}) \cdot \begin{bmatrix} [B]_{1j} \\ [B]_{2j} \\ \vdots \\ [B]_{mj} \end{bmatrix} \quad (18.4)$$

と書けるからだ。ここで、

$$([A]_{i1}, [A]_{i2}, \dots, [A]_{im})$$

は、行列 A の第 i 行の行ベクトルであり、

$$\begin{bmatrix} [B]_{1j} \\ [B]_{2j} \\ \vdots \\ [B]_{mj} \end{bmatrix}$$

は、行列 B の第 j 列の列ベクトルなので、式(18.4)は以下のように解釈できる: 行列 A, B について、その積 AB の (i, j) 成分は、 A の第 i 行ベクトルと B の第 j 列ベクトルの内積である。

このことを念のため、式でも書いておこう。 A の第 i

行ベクトルを \mathbf{a}_i , B の第 j 列ベクトルを \mathbf{b}_j とすると,

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{b}_l \\ \mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{b}_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n \bullet \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_n \bullet \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \bullet \mathbf{b}_l \end{bmatrix} \quad (18.5)$$

このような考え方は、後々、とても大切になってくる。

18.2 行列の積の結合法則

これから行列に関する大切な定理を証明していく。その前にいくつか準備をする。まず、総和 (Σ) の添字は、はじめの値と終わりの値 (Σ 記号の上下に書かれるべき値) を省略することがある。例えば式 (18.2) は、

$$[AB]_{ij} := \sum_k [A]_{ik} [B]_{kj}$$

と書いてもよいことにする。このとき、 k の動く範囲は A の列数 (かつ B の行数) 全体である。このように、可能な範囲全体を添字が動くときは、上記のような省略をする。

次に、複数の添字による総和は、順序を入れ替えても OK であることを確認しておこう。例えば、2 つの添字で表される量 a_{ij} について、

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 a_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 a_{ij}$$

という 2 つの式は同じである。なぜか? それぞれは

$$a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} + a_{31} + a_{32}$$

$$a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{12} + a_{22} + a_{32}$$

となり、これらは足し算の順序が違うだけで、本質的には同じである。 i, j の動く範囲がもっと大きくなってもそうなることは想像・理解できるだろう。

さて、話を戻す。いま、3 つの行列 A, B, C を考える。 A の列数 = B の行数であり、 B の列数 = C の行数であるとする。このとき、

$$(AB)C = A(BC) \quad (18.6)$$

が成り立つ (定理)。証明は以下のとおり: i, j を自然数

とする。式 (18.2) より、

$$\begin{aligned} [(AB)C]_{ij} &= \sum_l [AB]_{il} [C]_{lj} \\ &= \sum_l \left(\sum_k [A]_{ik} [B]_{kl} \right) [C]_{lj} \\ &= \sum_l \sum_k [A]_{ik} [B]_{kl} [C]_{lj} \\ &= \sum_k \sum_l [A]_{ik} [B]_{kl} [C]_{lj} \\ &= \sum_k [A]_{ik} \sum_l [B]_{kl} [C]_{lj} \\ &= \sum_k [A]_{ik} [BC]_{kj} \\ &= [A(BC)]_{ij} \end{aligned}$$

従って、 $(AB)C = A(BC)$ ■

式 (18.6) を「行列の積の結合法則」という。本章の後半では、この考え方が活躍する。

問 550 行列の積の結合法則の証明を再現せよ。

18.3 逆行列

数学リメディアル教材で学んだように、正方行列 A について、ある正方行列 B が、

$$AB = BA = I \quad (18.7)$$

となる場合 (I は単位行列)、 B は A の 逆行列 である、と言って、 $B = A^{-1}$ と書く。すなわち、

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (18.8)$$

である。全ての正方行列が逆行列を持つとは限らない。逆行列を持つ正方行列を 正則行列 と呼ぶ。

問 551 n 次正則行列 A, B について、次式を示せ:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (18.9)$$

次の節で、式 (18.9) に似た式が出てくる。それらは本章の後半で活躍する。

18.4 転置行列

行列 A の行と列を入れ替えてできる行列 (右上と左下をひっくり返した行列) を, 「 A の転置行列」とか, 縮めて「 A の転置」と呼び, tA とか A^T とあらわす*1。すなわち, 任意の (可能な) 自然数 i, j について,

$$[{}^tA]_{ij} := [A]_{ji} \quad (18.10)$$

である。

例 18.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ならば, } {}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad (18.11)$$

である。(例おわり) ■

当然ながら, 転置を 2 回行くと, もとの行列に戻る。すなわち, 任意の行列 A について, 次式が成り立つ:

$${}^t({}^tA) = A \quad (18.12)$$

証明: 任意の (可能な) 自然数 i, j について, 式 (18.10) より, $[{}^t({}^tA)]_{ij} = [{}^tA]_{ji} = [A]_{ij}$, 従って, $[{}^t({}^tA)] = A$ ■

また, 2 つの行列 A, B が足せるとき,

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \quad (18.13)$$

が成り立つ。証明: 任意の (可能な) 自然数 i, j について, 式 (18.10) より, $[{}^t(A+B)]_{ij} = [A+B]_{ji}$ 。ところが, $[A+B]_{ji} = [A]_{ji} + [B]_{ji}$ である (行列の和の定義)。従って, $[{}^t(A+B)]_{ij} = [A]_{ji} + [B]_{ji} = [{}^tA]_{ij} + [{}^tB]_{ij} = [{}^tA + {}^tB]_{ij}$, 従って, 与式が成り立つ。 ■

数ベクトルも行列の一種とみなせるから, その転置を考えることができる:

例 18.2

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ならば, } {}^t\mathbf{x} = (2, 1, -1) \quad (18.14)$$

注: 行ベクトルは, (2, 1, 3) のようにコンマでわけて書くこともあるし, (2 1 3) のように, 行列っぽく (コンマを入れない) で書くこともある。どちらでもよい。また, 括弧は丸括弧 () を使うことも角括弧 [] を使うこともある。どちらでもよい。(例おわり) ■

このように, 列ベクトルの転置は行ベクトルになる。同様に, 行ベクトルの転置は列ベクトルになる。

例 18.3

$$\mathbf{a} = (4, 5, -2) \quad (18.15)$$

という行ベクトル \mathbf{a} について, その転置 ${}^t\mathbf{a}$ は,

$${}^t\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (18.16)$$

となる。(例おわり) ■

問 552 2 つの 3 次元列ベクトル (3 行 1 列の行列):

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (18.17)$$

について, 以下を求めよ:

- (1) ${}^t\mathbf{a}\mathbf{x}$ (2) ${}^t\mathbf{x}\mathbf{a}$ (3) $\mathbf{a}{}^t\mathbf{x}$ (4) $\mathbf{x}{}^t\mathbf{a}$

問 553 実数を成分とする, 任意の 2 つの n 次元列ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} について, 次式が成り立つことを示せ:

$${}^t\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \quad (18.18)$$

行列の転置に関して, 以下のような重要な定理がある: 2 つの行列 A, B について, もし AB が計算できるなら (つまり A の列数と B の行数が等しいなら),

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA \quad (18.19)$$

が必ず成り立つ。また, その特別な場合として, 以下が成り立つ: n を任意の自然数とする。任意の n 次正方形 A と, n 次の任意の数ベクトル (列ベクトル) \mathbf{x} について,

$${}^t(A\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}{}^tA \quad (18.20)$$

式 (18.19), 式 (18.20) を証明する前に, 具体例で確認してみよう:

問 554 式 (18.11) の A と式 (18.14) の \mathbf{x} について,

- (1) $A\mathbf{x}$ を求めよ。

*1 肩の t や T は, transpose (転置) の頭文字を意味する。

- (2) ${}^t(Ax)$ を求めよ。
 (3) ${}^t x$ を求めよ。
 (4) ${}^t A$ を求めよ。
 (5) ${}^t x {}^t A$ を求めよ。
 (6) 以上より, ${}^t(Ax) = {}^t x {}^t A$ が成り立つことを示せ。

では, 式 (18.19) を証明しよう: A の列数= B の行数とする。任意の可能な i, j について, 式 (18.10) より,

$$[{}^t(AB)]_{ij} = [AB]_{ji} \quad (18.21)$$

である。一方, 式 (18.2) より,

$$[AB]_{ji} = \sum_k [A]_{jk} [B]_{ki} \quad (18.22)$$

である。式 (18.21), 式 (18.22) より,

$$[{}^t(AB)]_{ij} = \sum_k [A]_{jk} [B]_{ki} \quad (18.23)$$

である。ところが, 式 (18.10) より,

$$[A]_{jk} = [{}^t A]_{kj}, \quad [B]_{ki} = [{}^t B]_{ik}$$

であり, この 2 つの式を式 (18.23) に代入すると,

$$[{}^t(AB)]_{ij} = \sum_k [{}^t A]_{kj} [{}^t B]_{ik} \quad (18.24)$$

となる。この右辺の積の順序を入れ替えると (ただの数の積なので交換可能),

$$= \sum_k [{}^t B]_{ik} [{}^t A]_{kj} = [{}^t B {}^t A]_{ij} \quad (18.25)$$

となる。すなわち, ${}^t(AB)$ の (i, j) 成分と, ${}^t B {}^t A$ の (i, j) 成分は等しい。従って, ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$ が成り立つ。■

式 (18.19) と式 (18.9) が形式的に似ていることに注意しよう。これが後々, 大きな意味を持つてくるのだ。

問 555 式 (18.19) の証明を再現せよ。

18.5 トレース

正方行列の対角成分を全て足し合わせることを, トレース と呼ぶ。すなわち, n 次正方行列 A のトレース $\text{tr}(A)$ は,

$$\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n [A]_{ii} \quad (18.26)$$

と定義される。例えば,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad (18.27)$$

とすると, $\text{tr}(A) = 2 + 1 + 3 = 6$ となる。

それがどうした, と思うかもしれないが, トレースは, 後で出てくる「対称行列」で, おいおいと大切な働きをするのだ。

問 556 n 次正方行列 A, B について, 次式を示せ:

$$(1) \text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad (18.28)$$

$$(2) \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (18.29)$$

$$(3) \text{tr}(A) = \text{tr}({}^t A) \quad (18.30)$$

(2) のヒント: 式 (18.2)

よくある間違い 4 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$ が成り立つと思っている... この式は (一般的には) 成り立ちません。例えば A も B も 2 次の単位行列の場合, AB も 2 次の単位行列だから, $\text{tr}(AB) = 2$ ですが, $\text{tr}(A)\text{tr}(B) = 2 \times 2 = 4$ になってしまい, 両者は一致しません。

18.6 対称行列

正方行列 A が, ${}^t A = A$ を満たすとき, A を 対称行列 (symmetric matrix) という (定義)。例えば,

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad (18.31)$$

は対称行列である。

対角成分 (行番号と列番号が同じ成分) 以外の成分が全て 0 であるような正方行列を 対角行列 という。例えば,

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (18.32)$$

は対角行列である。明らかに, 対角行列は対称行列である。

問 557 A を任意の行列とする (正方行列とは限らない)。以下の行列が対称行列であることを示せ:

$$(1) {}^tAA \quad (2) A{}^tA$$

ヒント: 対称行列の定義に戻って考えれば簡単。式 (18.19) を使う。 ${}^t({}^tA) = A$ であることに注意。

問 558 任意の正方行列 A について,

$$A + {}^tA \quad (18.33)$$

は対称行列であることを示せ。

18.7 分散共分散行列

対称行列は実用的に重要である。ここでは特に、統計学で頻出する、以下の行列を考えよう。

例 18.4 ある大学の入試が数学と英語の 2 科目を必須とするとき、 k 番目の生徒の成績は、数学の得点 X_k と英語の得点 Y_k という、2 つの項目からなる。そのように、2 つの項目からなるようなデータが N セットあるような標本 (全生徒の中から N 人を抽出して、彼らの得点を並べたもの):

$$\{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)\} \quad (18.34)$$

を考える。さて、 \bar{X}, \bar{Y} をそれぞれ数学と英語の標本平均とし、 s_X^2, s_Y^2 をそれぞれ数学と英語の標本分散とする。すなわち、

$$\bar{X} := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k, \quad \bar{Y} := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k$$

$$s_X^2 := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})^2 \quad (18.35)$$

$$s_Y^2 := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (Y_k - \bar{Y})^2 \quad (18.36)$$

とする。以下で定義される量:

$$s_{XY} := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y}) \quad (18.37)$$

を、標本共分散 という。このとき、

$$S := \begin{bmatrix} s_X^2 & s_{XY} \\ s_{XY} & s_Y^2 \end{bmatrix} \quad (18.38)$$

で定義される行列 S を、この標本の 分散共分散行列、あるいは単に 共分散行列 と呼ぶ。分散共分散行列 S の (1, 2) 成分と (2, 1) 成分はともに s_{XY} だから互いに等

しい。従って ${}^tS = S$ であり、従って S は対称行列である。(例おわり)

このように、複数の項目からなるようなデータを扱う統計学を、多変量解析という。共分散や分散共分散行列は、多変量解析において中心的な役割を演じる概念である。

ちなみに、

$$r := \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} \quad (18.39)$$

と定義される量 r を、標本相関係数 という。ここではその理由を詳しくは述べないが、標本相関係数 r は、2 種類の量が互いにどれだけ強く連動しているかを表す無次元量である。 r は -1 以上 1 以下の値をとる。

よくある間違い 5 式 (18.39) の分母を $s_X^2 s_Y^2$ としてしまう ... 間違いです。これは次元を考えればすぐわかります。 s_{XY} の次元は X の次元と Y の次元の積です (s_{XY} の定義から明らか)、 s_X^2 の次元は X の次元の 2 乗です (これも標本標準分散の定義から明らか)。なので、これだと X の次元が打ち消しあわずに残ってしまう。

よくある間違い 6 式 (18.38) を、

$$S := \begin{bmatrix} s_{XY} & s_X^2 \\ s_Y^2 & s_{XY} \end{bmatrix} \quad (\text{これは間違い!!}) \quad (18.40)$$

と勘違いしてしまう。... これじゃ対称行列にならないよ...

上の例について、以下のような N 行 2 列の行列を考える:

$$D_c = \begin{bmatrix} X_1 - \bar{X} & Y_1 - \bar{Y} \\ X_2 - \bar{X} & Y_2 - \bar{Y} \\ \vdots & \vdots \\ X_N - \bar{X} & Y_N - \bar{Y} \end{bmatrix} \quad (18.41)$$

この行列 D_c は、データをただ単に並べたものではなく、各データから、その項目の標本平均を引いてある。このような操作 (各データから標本平均を引くこと) を「中心化」(mean centering) と呼ぶ (D_c の下付き添字の c は centering を表す)。式 (18.41) のように、中心化されたデータを並べてできる行列を、「中心化されたデータ行列」という。

問 559 この、中心化されたデータ行列 D_c と分散共

分散行列 S の間に次式が成り立つことを示せ:

$$S = \frac{1}{N} {}^t D_c D_c \quad (18.42)$$

式 (18.42) は、後で学ぶ「主成分分析」の仕組みを理解する鍵である。

問 560 ある高校の小テスト (数学と英語, 各 5 点満点) の結果から, 7 人の生徒 (つまり $N = 7$) の成績を抽出し ($k = 1$ から $k = 7$ までの番号を付与), 数学と英語の得点について以下のような標本を得た:

k	数学得点 (X_k)	英語得点 (Y_k)
1	4	3
2	3	4
3	1	2
4	3	3
5	4	5
6	5	5
7	2	2

- (1) 数学得点 X_k と英語得点 Y_k のそれぞれについて, 標本平均 \bar{X}, \bar{Y} を求めよ。
- (2) 問 559 で述べた, 「中心化されたデータ行列」 D_c は, 以下のようになることを示せ (電卓を使って計算し, ここに出ていない小数点以下 3 桁まで述べよ。4 桁以降を切り捨ててよい):

$$D_c = \begin{bmatrix} 0.85 \cdots & -0.42 \cdots \\ -0.14 \cdots & 0.57 \cdots \\ -2.14 \cdots & -1.42 \cdots \\ -0.14 \cdots & -0.42 \cdots \\ 0.85 \cdots & 1.57 \cdots \\ 1.85 \cdots & 1.57 \cdots \\ -1.14 \cdots & -1.42 \cdots \end{bmatrix} \text{点} \quad (18.43)$$

- (3) 式 (18.42) に基づいて分散共分散行列 S を求めよ。
- (4) 数学得点の標本分散 s_X^2 , 英語得点の標本分散 s_Y^2 , 数学得点と英語得点の標本共分散 s_{XY} をそれぞれ求めよ。
- (5) 数学得点と英語得点の標本相関係数 r を求めよ。

以上のような考え方は, 3 つ以上の確率変数が組み合わさった場合についても, 自然に拡張される。例えば上

の例で, さらに国語の得点 Z があるような場合,

$$D_c = \begin{bmatrix} X_1 - \bar{X} & Y_1 - \bar{Y} & Z_1 - \bar{Z} \\ X_2 - \bar{X} & Y_2 - \bar{Y} & Z_2 - \bar{Z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_N - \bar{X} & Y_N - \bar{Y} & Z_N - \bar{Z} \end{bmatrix} \quad (18.44)$$

とすると, 分散共分散行列 S は,

$$S = \frac{1}{N} {}^t D_c D_c = \begin{bmatrix} s_X^2 & s_{XY} & s_{XZ} \\ s_{XY} & s_Y^2 & s_{YZ} \\ s_{XZ} & s_{YZ} & s_Z^2 \end{bmatrix} \quad (18.45)$$

という 3 次の正方行列として定義される。これも, 明らかに対称行列である。

18.8 直交行列

正方行列 Q が,

$${}^t Q = Q^{-1} \quad (18.46)$$

を満たすとき, Q を 直交行列 (orthogonal matrix) という (定義)。

式 (18.46) の両辺に右から Q をかけると次式になる (I は単位行列):

$${}^t Q Q = I \quad (18.47)$$

また, この式の両辺に右から Q^{-1} をかけると式 (18.46) になる。従って, 式 (18.46) と式 (18.47) は, 互いに同値である。従って, 式 (18.47) (をみたすような Q のこと) を直交行列の定義としてもよい。ある行列が直交行列かどうかを確認するには, 式 (18.46) よりも式 (18.47) の方が便利ながが多い。

問 561 以下の行列が直交行列であることを示せ。ただし, n は任意の自然数とし, θ は任意の実数とする。

- (1) n 次の単位行列 I

$$(2) Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (18.48)$$

$$(3) Q_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (18.49)$$

$$(4) Q_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18.50)$$

$$(5) Q_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (18.51)$$

問 562 任意の直交行列 Q を考える。 Q を構成する列ベクトルは、いずれも大きさが 1 であり、互いに直交していることを示せ。ヒント: ${}^tQQ = I$ の計算を、列ベクトルに着目して考えてみる。18.1 節で学んだ、行列の積をベクトルの内積で解釈する考え方を使う。

問 563 n 次元の列ベクトル n 個が、互いに直交し、しかもそれぞれの大きさが 1 であるとする。これらの列ベクトルを並べてできる n 次正方形行列 P は直交行列であることを示せ。(ヒント: tPP の成分を、これらのベクトルの内積として考えよ。)

問 564 任意の直交行列について、列ベクトルどうしは互いに直交し、かつ、各列ベクトルの大きさは 1 であることを示せ。(ヒント: 前問と同じような考え方で)

18.9 対称行列の固有ベクトルは直交する!

問 565 n を 2 以上の整数とする。 n 次対称行列 A を考える。 λ_1, λ_2 はともに A の固有値であり、かつ、 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるとする。 \mathbf{x}_1 を λ_1 に対応する固有ベクトルとし、 \mathbf{x}_2 を λ_2 に対応する固有ベクトルとする(いずれも列ベクトルとする)。 \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 は互いに直交することを証明しよう: まず、

$$\psi := {}^t\mathbf{x}_1(A\mathbf{x}_2) \quad (18.52)$$

という量を考える。

- (1) $\psi = \lambda_2 {}^t\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ となることを示せ。
- (2) $\psi = {}^t\mathbf{x}_1({}^tA\mathbf{x}_2)$ となることを示せ。
ヒント: 対称行列の定義
- (3) $\psi = ({}^t\mathbf{x}_1{}^tA)\mathbf{x}_2$ となることを示せ。ヒント: 行列の積の結合法則(式(18.6))を前小問に適用。
- (4) $\psi = {}^t(A\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2$ となることを示せ。ヒント: 式(18.20)。
- (5) $\psi = \lambda_1 {}^t\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ となることを示せ。
- (6) $\lambda_1 {}^t\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 = \lambda_2 {}^t\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ となることを示せ。ヒント: 小問(1),(5)。
- (7) $(\lambda_1 - \lambda_2){}^t\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 = 0$ であることを示せ。
- (8) ${}^t\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 = 0$ であることを示せ。ヒント: 最初に $\lambda_1 \neq \lambda_2$ という条件があったことを思い出せ。
- (9) \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 が直交することを示せ。

問 565 で示した定理は極めて重要である。これを「対称行列の固有ベクトルの直交性」という。大事なので大きく書いておこう:

対称行列の固有ベクトルの直交性
対称行列の固有ベクトルは、互いに直交する!

注: これにはやや語弊があるのでもう少し詳しく述べておく: 対称行列 A について、 $\lambda_1 = \lambda_2$ のとき、すなわちひとつの固有値に複数の固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ が存在するときは、上の定理の適用範囲外である。しかし、それらの固有ベクトルを線型結合することによって、互いに直交する固有ベクトル $\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b$ を構成できる(それをグラム・シュミットの直交化法という)。従って、 $\lambda_1 = \lambda_2$ のときも含めて、一般的に、対称行列の固有ベクトルは互いに直交する(ように選ぶことができる)。

問 566 以下の対称行列について固有値・固有ベクトルを求め、固有ベクトルが互いに直交することを確かめよ。

(1)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

注: 3 次正方形行列 A の固有値を求めるときも、2 次の場合と同様に、 $\det(A - \lambda I) = 0$ という特性方程式を立てて解けばよい。

ところで、固有ベクトルは、その大きさを任意にとることが許されるので、特に大きさが 1 になるように選ぶこともできる。従って、対称行列の固有ベクトルは、互いに直交し、なおかつ大きさが 1 であるように選ぶことができる。

正方形行列 A の固有ベクトルを列ベクトルとして並べてできる行列を P とすると、 $P^{-1}AP$ は対角行列になる。このような操作を対角化という。このとき、 P のことを「 A を対角化する行列」という。

上述のように、対称行列 A の固有ベクトルは、互いに直交し、なおかつそれぞれの大きさが 1 になるように選択できる。これらを並べてできる行列 Q は、問 563 で見たように、直交行列になる。 Q は A を対角化する行列

なのだから、結局、以下の定理が成り立つ。これも大切な定理なので大きく書いておこう。

対称行列は、直交行列によって対角化される!

n 次対称行列 A に対して、ある直交行列 Q を用いると、

$${}^tQAQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

とすることができる。このとき $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は A の固有値である。 A の固有ベクトル (列ベクトル) を全て大きさ 1 に揃えて横に並べたものが Q である。

問 567 以下の対称行列を直交行列で対角化せよ。対角行列の対角成分は、最も大きい値が左上になり、値が大きい順に左上から右下に並ぶようにせよ。

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

問 568 n 次正則行列 A が、行列 P によって、以下のように対角化されるとする:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

このとき、

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \tag{18.53}$$

となることを示せ。ヒント: 式 (18.29) を使う。

この問題からわかるように、ある正方行列のトレースは、その行列の固有値の総和に等しい。

18.10 主成分分析

分散共分散行列を対角化することを主成分分析 (principal component analysis: PCA) という。主成分分析

は、多変量解析の基盤となる考え方であり、その応用範囲は極めて大きい。

式 (18.38), 式 (18.45) で見たように、 n 項目の数値 (例えば n 科目の得点) が組み合わさって 1 個のサンプルデータを構成するような標本では、分散共分散行列 S は n 次の対称行列である。従って、それは適当な n 次の直交行列 Q によって、以下のように対角化できるはずだ:

$${}^tQSQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{18.54}$$

ここで、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は、 S の固有値である。主成分分析では、固有値は大きい順に並べると約束する。すなわち、 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ とする。 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ に対応する、大きさ 1 の固有ベクトルを、それぞれ $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ とすると、それらを列ベクトルとして横に並べたものが直交行列 Q になる。

問 569 問 560 で求めた分散共分散行列 S を、上述のように直交行列 Q で対角化せよ。

i を 1 以上 n 以下の整数とする。 \mathbf{q}_i 、つまり、分散共分散行列の、 i 番目に大きい固有値に対応する、大きさ 1 の固有ベクトルのことを、第 i 主成分ベクトル と呼ぶ (定義)。主成分ベクトルのことを、ローディングベクトル (loading vector) ともいう。

主成分ベクトルどうしは直交する。すなわち、 i, j を n 以下の任意の自然数とし、 $i \neq j$ ならば

$$\mathbf{q}_i \bullet \mathbf{q}_j = 0 \tag{18.55}$$

である。これは、対称行列の固有ベクトルどうしが直交することから明らかである。

問 570 問 569 において第 1 主成分ベクトルと第 2 主成分ベクトルを述べよ。

標本の中の k 番目のデータについて、各項目の値からその標本平均を引いた値、つまり中心化された値を並べた数ベクトルを \mathbf{d}_k とする。すなわち、

$$\mathbf{d}_k := (X_k - \bar{X}, Y_k - \bar{Y}, \dots) \tag{18.56}$$

とする。これを、 k 番目の「中心化されたデータベクトル」とする。

ル」と呼ぶ。

問 571 問 560 の生徒 3 について、中心化されたデータベクトルを求めよ。

中心化されたデータベクトル \mathbf{d}_k を、主成分ベクトルを使って、

$$\mathbf{d}_k = c_1 \mathbf{q}_1 + c_2 \mathbf{q}_2 + \cdots + c_n \mathbf{q}_n \quad (18.57)$$

というふうに表すことを考えよう (この形を「線型結合」と呼ぶことを後に学ぶ)。この式の両辺に対して \mathbf{q}_i との内積をとれば、

$$\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{q}_i = c_1 \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_i + c_2 \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_i + \cdots + c_n \mathbf{q}_n \cdot \mathbf{q}_i \quad (18.58)$$

となる。ところが、主成分ベクトルどうしは直交しているので、上の右辺の各項に含まれる内積は、 $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i$ を残して全部 0 になる。すなわち、

$$\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{q}_i = c_i \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i \quad (18.59)$$

となる。また、主成分ベクトルの定義から、 $|\mathbf{q}_i| = 1$ なので、 $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i = 1$ である。従って上の式は、

$$\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{q}_i = c_i \quad (18.60)$$

となる。このように、式 (18.57) の右辺の係数 c_i は、中心化されたデータベクトル \mathbf{d}_k と第 i 主成分ベクトルの内積をとることだけで求まる。 \mathbf{d}_k と第 i 主成分ベクトルの内積のことを、そのデータの 第 i 主成分スコア と呼ぶ。上の例では、例えば、生徒 3 の中心化されたデータベクトル (数学と英語のそれぞれから平均点を引いた値を並べた数ベクトル) と \mathbf{q}_2 との内積が、生徒 3 の得点の第 2 主成分スコアである。

幾何学的には、第 i 主成分スコアは、標本平均を原点として、中心化されたデータベクトルを、第 i 主成分ベクトルの方向に正射影した大きさである、と考えてよい (図 18.1)。

問 572 問 560 の生徒 3 の得点の第 1 主成分スコアと第 2 主成分スコアを求めよ。

上の例では、第 1 主成分スコアを数学と英語の両方を加味した総合成績の指標と解釈すると、第 2 主成分スコアは、「数学と英語のどちらが得意か」(あえて言えば、理系向きか文系向きか) に関する指標と解釈することができる。

問 573 問 560 の生徒 3 は理系向きか、文系向きか、考察せよ。

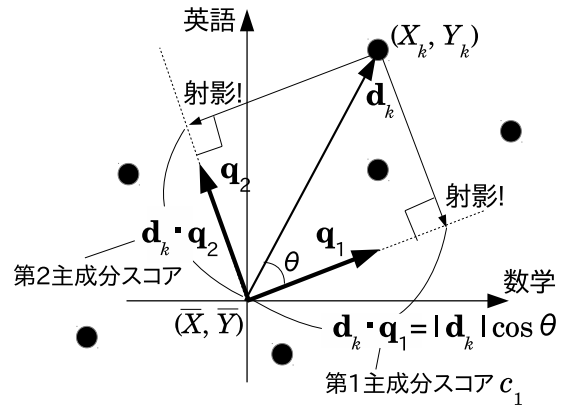


図 18.1 中心化されたデータベクトル \mathbf{d}_k を主成分ベクトルで分解する。分解の係数 (式 (18.57) の c_1, c_2 など) は、 \mathbf{d}_k と主成分ベクトル ($\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ など) との内積で得られる。それが各主成分スコアである。それは、 \mathbf{d}_k を主成分ベクトルに正射影 (垂直に下ろすこと) したものである (内積の定義から、 $\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{q}_1 = |\mathbf{d}_k| |\mathbf{q}_1| \cos \theta$ 。 θ はこれらの 2 つのベクトルのなす角。いま、 $|\mathbf{q}_1| = 1$ であることに注意すれば、これが正射影になっていることは明らかだろう)。

注: 世間では、「主成分」という言葉が単体で使われることがある。そのような場合は、「主成分」は、以下のいずれかの意味を指す:

- 主成分ベクトル (ローディングベクトル)
- 主成分スコア
- 物質を構成する化学的な組成のうち、最も大量に含まれるもの。

これらは互いに意味が違うので、どれを指すのかを、文脈から適切に判断しなければならない。そのような混乱を避けるために、諸君は、「主成分」という言葉を、できるだけ単体では使わないようにしましょう。

注: 第 1 主成分を PC1, 第 2 主成分を PC2, ... のように言うこともある。例えば、「第 1 主成分スコア」を「PC1 スコア」と言ったり、「第 2 主成分ベクトル」を「PC2 ベクトル」と言ったりする。

さて、主成分分析の意味やからくりを、少し調べてみよう。分散共分散行列 S は、式 (18.42) や式 (18.45) のように、中心化されたデータ行列 D_c から求められる。簡単のため、ここでは項目数=2 で考える (項目数 3 以上であっても議論の本質は同じ)。式 (18.42) を式 (18.54) に代入してみよう。すなわち ${}^t Q S Q$ は以下のようになる:

$${}^t Q \left(\frac{1}{N} {}^t D_c D_c \right) Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (18.61)$$

この左辺は、以下のように変形できる:

$${}^t Q \left(\frac{1}{N} {}^t D_c D_c \right) Q = \frac{1}{N} ({}^t Q {}^t D_c) (D_c Q) \quad (18.62)$$

$$= \frac{1}{N} {}^t (D_c Q) (D_c Q) \quad (18.63)$$

式 (18.62) から式 (18.63) への変形は式 (18.19) を使った。ここで、 $D_c Q$ という行列を改めて D'_c と置こう。つまり、

$$D'_c := D_c Q \quad (18.64)$$

とする。すると、式 (18.63) はさらに以下のように変形できる:

$$\frac{1}{N} {}^t D'_c D'_c \quad (18.65)$$

となる。これは、式 (18.42) の右辺とよく似ている。つまり、これは D'_c という行列が作る分散共分散行列である。

D'_c , つまり $D_c Q$ という行列は、 D_c に右から Q をかけたものである。式 (18.5) の考え方を使えば、 $D_c Q$ は D_c の行ベクトルと、 Q の列ベクトル (つまり S の主成分ベクトル) の内積で作られる行列である。すなわち、

$$D'_c = D_c Q = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \bullet \mathbf{q}_1 & \mathbf{d}_1 \bullet \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{d}_2 \bullet \mathbf{q}_1 & \mathbf{d}_2 \bullet \mathbf{q}_2 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{d}_N \bullet \mathbf{q}_1 & \mathbf{d}_N \bullet \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \quad (18.66)$$

となる。ここで、 \mathbf{d}_i は D_c の第 i 行ベクトル (生徒 i の得点を表す行ベクトル), \mathbf{q}_j は Q の第 j 列ベクトル (第 j 主成分ベクトル) である。従って、 $\mathbf{d}_i \bullet \mathbf{q}_j$ は、生徒 i の得点の第 j 主成分スコアに相当する。つまり、 D'_c は、各生徒の主成分スコアを並べた行列である。 D'_c は、生徒全体の成績を表す、 D_c とは別の新しい表現法である。 D_c は各科目の得点を (中心化して) 並べたものだが、 D'_c は各主成分のスコアを並べたものである。

例えば、問 569 の Q, D_c について、 $D'_c = D_c Q$ は以下の行列になる:

$$D'_c = D_c Q = \begin{bmatrix} 0.33 \cdots & -0.90 \cdots \\ 0.29 \cdots & 0.51 \cdots \\ -2.54 \cdots & 0.42 \cdots \\ -0.40 \cdots & -0.22 \cdots \\ 1.70 \cdots & 0.56 \cdots \\ 2.43 \cdots & -0.12 \cdots \\ -1.81 \cdots & -0.26 \cdots \end{bmatrix} \text{点} \quad (18.67)$$

この「新しい表現法」には、面白い特徴がある: 式

(18.61), 式 (18.65) より、

$$\frac{1}{N} {}^t D'_c D'_c = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (18.68)$$

である。つまり、この表現法では、分散共分散行列が対角行列になるのだ。これは、主成分スコアどうしの共分散が 0 ということだ (分散共分散行列の非対角成分が共分散を表すから。わからない人は、式 (18.38) を見直すべし)。共分散が 0 になるなら、式 (18.39) より、相関係数も 0 である。すなわち、主成分スコアどうしは互いに連動しない。というよりも、そうなるような操作が主成分分析なのである。テストの得点は、あるていど科目間で連動するだろう。それを整理して、互いに連動していない (いわば互いに「独立」な) 指標を作るのが主成分分析なのである。

先ほどの例で言えば、第 1 主成分スコアが全体的な成績の良さ、第 2 主成分スコアが理系的か文系的かを表すと考えると、意図的にこれらの間の連動性を消して (相関係数を 0 にして)、それぞれを独立・純粋に評価しようというのが、主成分分析の発想である。

図 18.2 に、もとの行列 D_c で表される成績 (数学と英語の各得点から平均点を引いたもの) の散布図、図 18.3 に、行列 D'_c で表される成績 (第 1, 第 2 主成分スコア) の散布図を示す。これを見ると、もとの得点の散布図では、数学の点が良ければ英語の点も良い、というおおまかな傾向が見える。つまり、両科目が連動している。ところが、主成分スコアの散布図を見ると、そのような連動する傾向は見えなくなっている。

このからくりは実は簡単である。すなわち、図 18.2 を、原点を中心に右まわりに適当に回転させたら図 18.3 になるのだ。逆に言えば、このような連動が見られなくなるように、散布図全体を回転するのが主成分分析である。そして、 Q はベクトルに回転を施す行列なのである。

また、分散共分散行列の固有値は、各主成分のスコアの分散に等しいことが、式 (18.68) からわかる。ところで、分散共分散行列のトレースを「全分散」という。問 568 より、それは分散共分散行列の固有値 (各主成分スコアの分散) の総和である。先の例で言うと、数学の分散と英語の分散の和は、第 1 主成分スコアの分散と、第 2 主成分スコアの分散の和に等しい。

分散共分散行列の i 番目の固有値、すなわち、第 i 主成分のスコアの分散を全分散で割ったものを

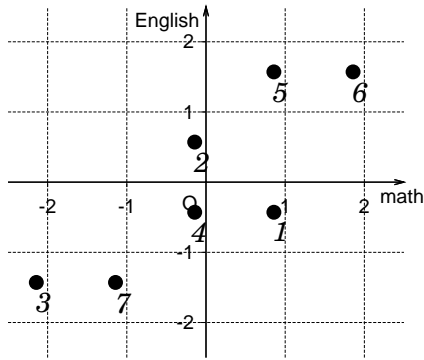


図 18.2 式 (18.43) の散布図。各科目の得点から平均点 (標本平均) を引いた点数のプロット。番号は受験者の通し番号 k 。

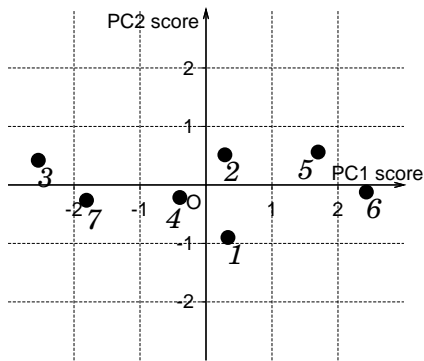


図 18.3 式 (18.67) の散布図。第 1 主成分スコアを横軸, 第 2 主成分スコアを縦軸とするプロット。番号は図 18.2 に対応する。

第 i 主成分の寄与率 という。

問 574 問 569 において, 第 1 主成分の寄与率と, 第 2 主成分の寄与率を求めよ。そこからどういうことが言えるか考察せよ。

その他, まだまだ主成分分析にはいろんな用語や考え方があ。それらについては, 「数理科学演習」で実例とともに学んで欲しい。いずれにせよ, 対称行列の理論をきちんと理解すれば主成分分析は簡単であり, そういう理解の方が正しく主成分分析を使えるし, 応用も効くのだ。

よくある質問 5 なぜ世の中には対称行列が多いのですか? ... いくつかのもののどうしの関係性を表すのに対称行列が適しているからです。例えば, 分散共分散行列は, ざっくり言えば, 数学と英語という 2 種類の成績が, 互いにどのように関係しているかを表すものと言えます。関係というものは多くの場合,

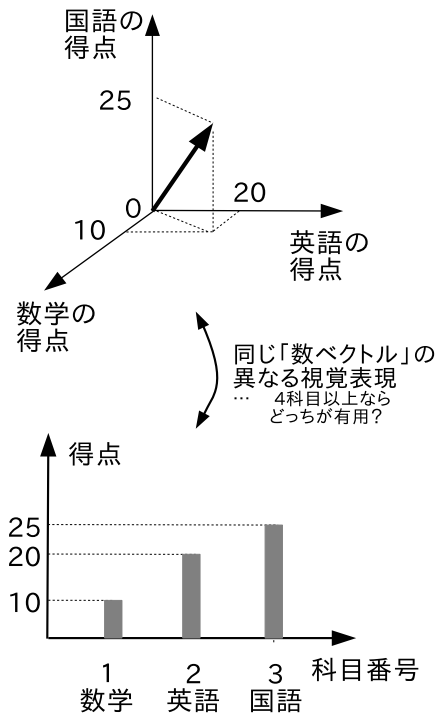


図 18.4 生徒 A 君の「成績ベクトル」の視覚表現 (2 通り)

対称的です。実際, 「数学と英語の関係」は「英語と数学の関係」と言い換えても差し支えないでしょう。

18.11 数ベクトルの視覚表現

これまで見たように, 多変量解析では, 個々のデータを数ベクトルとして扱う。例えば, 数学, 英語, 国語という 3 科目からなる試験を実施した結果は, 受験者それぞれについて, 各科目の得点を並べた数ベクトルが, データとなる (多くの場合はそれを中心化して扱うのだが, ここではとりあえず中心化は考えない)。例えば, 生徒 A 君の得点が, 数学: 10 点, 英語: 20 点, 国語: 25 点だとしたら, (10 点, 20 点, 25 点) という数ベクトルが, A 君に関するデータである。

さて, 諸君は, この数ベクトルを視覚的にイメージせよと言われたらどうするだろう? おそらく, 3 次元空間をイメージし, 各科目の得点を, 互いに直交する軸にとって, 数ベクトルが座標となるような空間中の 1 点もしくは, そこへ向う矢印をイメージするだろう (図 18.4 上)。

一方, これは, 図 18.4 下のように, 各科目を横にならべて, 棒グラフで表すこともできる。これら 2 つの表現

方法は違うが、表される「数ベクトル」は同じものである。どちらの表現が正しいというものでもない。そもそも数ベクトルは数を並べたものにすぎないのだから。

ところが、試験の科目数が 4 以上になるとどうだろう？ 明らかに、上の表現（矢印）は破綻する。人間は、視覚的にイメージできるのは 3 次元までだからだ。しかし下の表現（グラフ）は、全く問題なく通用する。横に項目を増やしていけばよいだけだ。

そう考えると、諸君が高校時代から「ベクトル」について素朴に抱いていた「矢印」のイメージ（図 18.4 上）は、実は数ベクトルの実体を表すには不便だと気づくだろう。むしろ、図 18.4 下のような、「グラフ」の方が、ベクトルのイメージとしては柔軟ではないか？

問 575 数ベクトルを矢印ではなくグラフでイメージすることについて、君自身はどう感じるか？

18.12 解答

答 550 略。

答 551 (略解) AB の右から $B^{-1}A^{-1}$ をかけると,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\{B(B^{-1}A^{-1})\} \quad (18.69)$$

となる。ここで式 (18.6) を使った (式 (18.6) の C を $B^{-1}A^{-1}$ とした)。この右辺の $\{$ 内に再び式 (18.6) を使うと (式 (18.6) を右辺から左辺に向けて使う。式 (18.6) の A を B とし, 式 (18.6) の B を B^{-1} , C を A^{-1} とする), 式 (18.69) の右辺は,

$$A\{B(B^{-1}A^{-1})\} = A\{(BB^{-1})A^{-1}\} \quad (18.70)$$

となる。逆行列の定義から, $BB^{-1} = I$ なので, 式 (18.70) の右辺は,

$$A\{(BB^{-1})A^{-1}\} = A(IA^{-1}) = AA^{-1} = I \quad (18.71)$$

となる。式 (18.69), 式 (18.70), 式 (18.71) より,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I \quad (18.72)$$

が成り立つ。同様に, AB の左から $B^{-1}A^{-1}$ をかけると (... 中略...),

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I \quad (18.73)$$

が成り立つ。式 (18.72), 式 (18.73) と, 逆行列の定義より, $B^{-1}A^{-1}$ は (AB) の逆行列である。すなわち式 (18.9) が成り立つ。

答 552

$$(1) \quad ax + by + cz \quad (2) \quad ax + by + cz$$

$$(3) \quad \quad \quad (4) \quad \quad \quad$$

$$\begin{bmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ax & bx & cx \\ ay & by & cy \\ az & bz & cz \end{bmatrix}$$

答 553 略 (行列の積の定義から導く。簡単!)

答 554 略。

答 555 略。

答 556

(1)

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A+B) &= \sum_i [A+B]_{ii} = \sum_i ([A]_{ii} + [B]_{ii}) \\ &= \sum_i [A]_{ii} + \sum_i [B]_{ii} = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AB) &= \sum_i [AB]_{ii} \\ &= \sum_i \sum_k [A]_{ik} [B]_{ki} \\ &= \sum_i \sum_k [B]_{ki} [A]_{ik} \\ &= \sum_k \sum_i [B]_{ki} [A]_{ik} \\ &= \sum_k [BA]_{kk} = \operatorname{tr}(BA) \end{aligned}$$

(3)

$$\operatorname{tr}({}^t A) = \sum_i [{}^t A]_{ii} = \sum_i [A]_{ii} = \operatorname{tr}(A)$$

答 557

(1) 式 (18.19) より,

$${}^t({}^t AA) = {}^t A {}^t({}^t A) \quad (18.74)$$

また, ${}^t({}^t A) = A$ だから, 式 (18.74) 右辺は, ${}^t AA$ となる。従って, ${}^t({}^t AA) = {}^t AA$ となる。すなわち, ${}^t AA$ は対称行列。(2) は略。

答 558 略 (簡単!)

答 559

$$\begin{aligned} {}^t D_c D_c &= \begin{bmatrix} X_1 - \bar{X} & X_2 - \bar{X} & \cdots & X_N - \bar{X} \\ Y_1 - \bar{Y} & Y_2 - \bar{Y} & \cdots & Y_N - \bar{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \bar{X} & Y_1 - \bar{Y} \\ X_2 - \bar{X} & Y_2 - \bar{Y} \\ \vdots & \vdots \\ X_N - \bar{X} & Y_N - \bar{Y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (X_1 - \bar{X})^2 + \cdots & (X_1 - \bar{X})(Y_1 - \bar{Y}) + \cdots \\ (X_1 - \bar{X})(Y_1 - \bar{Y}) + \cdots & (Y_1 - \bar{Y})^2 + \cdots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})^2 & \sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y}) \\ \sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y}) & \sum_{k=1}^N (Y_k - \bar{Y})^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18.75)$$

これを N で割ると, 式 (18.35), 式 (18.36), 式 (18.37)

より,

$$\begin{bmatrix} s_X^2 & s_{XY} \\ s_{XY} & s_Y^2 \end{bmatrix} = S \quad (18.76)$$

となる。

答 560 以下, 数値は小数点以下 2 桁まで書くが, 諸君はレポートでは小数点以下 4 桁までを書くこと (それを自力で計算した証拠とみなす)。

(1) $\bar{X} = 3.14 \dots$ 点, $\bar{Y} = 3.42 \dots$ 点

(2) 略。

(3)

$$S = \frac{1}{7} {}^t D_c D_c = \begin{bmatrix} 1.55 \dots & 1.22 \dots \\ 1.22 \dots & 1.38 \dots \end{bmatrix} \text{点}^2$$

(4) 前小問より, $s_X^2 = 1.55 \dots \text{点}^2$,

$$s_Y^2 = 1.38 \dots \text{点}^2, s_{XY} = 1.22 \dots \text{点}^2.$$

(5) $s_{XY}/(s_X s_Y) = 1.22 \dots / \sqrt{1.55 \dots \times 1.38 \dots} = 0.83 \dots$ 。

ちなみに, この問題を, 統計解析ソフト R を使ってやる方法 (コマンド) を以下に示す:

```
math <- c(4,3,1,3,4,5,2)
```

(数学得点を並べた数ベクトルを math と定義)

```
eng <- c(3,4,2,3,5,5,2)
```

(英語得点を並べた数ベクトルを eng と定義)

```
mean(math)
```

(数学の標本平均)

```
mean(eng)
```

(英語の標本平均)

```
Dc = cbind(math - mean(math), eng - mean(eng))
```

(行列 D_c を定義。)

```
Dc
```

(行列 D_c の成分を表示)

```
S = t(Dc) %*% Dc / 7.0
```

(式 (18.42) を計算)

```
S
```

(行列 S の成分を表示)

```
S[1,2] / (sqrt(S[1,1] * S[2,2]))
```

(式 (18.39) を計算)

```
cor(math, eng)
```

(念の為, R の標準関数を使って相関係数を計算。上の計算と合っていることを確認)

答 561 略 (いずれも式 (18.47) が成り立つことを計算で

確かめればよい)。

答 562 直交行列

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

の第 i 列ベクトルを, \mathbf{q}_i とする。すなわち,

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \\ \vdots \\ q_{ni} \end{bmatrix}$$

とする。すると,

$$\begin{aligned} {}^t Q Q &= \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1n} & q_{2n} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{q}_n \\ \mathbf{q}_2 \bullet \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 \bullet \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_2 \bullet \mathbf{q}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_n \bullet \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_n \bullet \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_n \bullet \mathbf{q}_n \end{bmatrix} \quad (18.77) \end{aligned}$$

となる。積の (i, j) 成分は ${}^t Q$ の第 i 行ベクトルと Q の第 j 列ベクトル \mathbf{q}_j の内積であり, なおかつ, ${}^t Q$ の第 i 行ベクトルは Q の第 i 列ベクトル \mathbf{q}_i の転置ベクトルであることから, 積の (i, j) 成分は $\mathbf{q}_i \bullet \mathbf{q}_j$ であることを使った。一方, Q は直交行列なので, 直交行列の定義から,

$${}^t Q Q = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (18.78)$$

となるはず。式 (18.77) と式 (18.78) を比べる。対角成分どうしの比較から,

$$\mathbf{q}_i \bullet \mathbf{q}_i = |\mathbf{q}_i|^2 = 1$$

が成り立つ。すなわち $|\mathbf{q}_i| = 1$, すなわち Q の列ベクトルは大きさが 1 である。また, 非対角成分どうしの比較から,

$$\mathbf{q}_i \bullet \mathbf{q}_j = 0$$

である ($i \neq j$ とする)。すなわち, Q の列ベクトルどうしは互いに直交する。 ■

答 563 互いに直交し, それぞれの大きさが 1 であるよう

な n 次元の列ベクトル n 個が, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ であるとする。これらを横に並べてできる n 次正方行列 P は,

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \quad (18.79)$$

となる。従って, その転置行列 tP は以下ようになる。

$${}^tP = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{p}_1 \\ {}^t\mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{p}_n \end{bmatrix} \quad (18.80)$$

(${}^t\mathbf{p}_i$ 等は n 次の行ベクトルであることに注意)。従って,

$$\begin{aligned} {}^tPP &= \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{p}_1 \\ {}^t\mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{p}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \bullet \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1 \bullet \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_1 \bullet \mathbf{p}_n \\ \mathbf{p}_2 \bullet \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \bullet \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_2 \bullet \mathbf{p}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{p}_n \bullet \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_n \bullet \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \bullet \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18.81)$$

となる。ここで, 任意の i について $\mathbf{p}_i \bullet \mathbf{p}_i = 1$ であり (大きさが 1 だから!), 任意の i, j ($i \neq j$ とする) について $\mathbf{p}_i \bullet \mathbf{p}_j = 0$ である (互いに直交するから!) ことから, 式 (18.81) の最終項は, 対角成分が 1, 非対角成分が 0 の正方行列, つまり単位行列になる。つまり, ${}^tPP = I$ となる。従って, P は直交行列。 ■

答 564 略解: Q を n 次の直交行列として,

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix} \quad (18.82)$$

と置く ($\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots$ は Q を構成する列ベクトル)。式 (18.81) と同様に考えて,

$${}^tQQ = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{q}_n \\ \mathbf{q}_2 \bullet \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 \bullet \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_2 \bullet \mathbf{q}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_n \bullet \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_n \bullet \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \bullet \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$$

Q は直交行列なのだから, これは単位行列に等しい, つまり対角成分は 1 で非対角成分は 0 になる。対角成分は, Q の各列ベクトルの大きさの 2 乗であり, それが 1 に等しいことから, Q の各列ベクトルの大きさは 1 である。また, 非対角成分は, Q の列ベクトルどうしの内積であり, それらが 0 であることから, Q の列ベクトルどうしは直交する。 ■

答 565 略。ヒントに従って考えよう!

答 566 略。

答 567 以下, 略解。レポートでは途中経過も記すこと。注: 固有ベクトルは大きさ 1 にすること。でないとならぬとそれを並べた時に直交行列にならない。

$$(1) Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad {}^tQAQ = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(2) Q = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}, \quad {}^tQAQ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

注: 上の各行列で, 各列ベクトルが ± 逆になっていても OK。例えば (1) では

$$Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

でも OK。

答 568 式 (18.29) より,

$$\begin{aligned} \text{tr}(P^{-1}AP) &= \text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) \\ &= \text{tr}(A(PP^{-1})) = \text{tr}(AI) = \text{tr}(A) \end{aligned}$$

従って, $\text{tr}(A)$ は, 対角化された行列 $P^{-1}AP$ のトレースに等しい。 $P^{-1}AP$ の対角成分は $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ なので, $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ 。 ■

答 569 (略解) 以下, 数値は小数点以下 2 桁で書くが, 諸君はレポートでは小数点以下 4 桁以上を書くこと (それを自力で計算した証拠とみなす)。まず, 特性方程式を立てて解く (2 次方程式の解の公式を使う) と, 固有値は $\lambda_1 = 2.69\dots, \lambda_2 = 0.24\dots$ と求まる。それを元に固有ベクトルを求めると,

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0.73\dots \\ 0.68\dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -0.68\dots \\ 0.73\dots \end{bmatrix} \quad (18.83)$$

となる。従って,

$$Q = \begin{bmatrix} 0.73\dots & -0.68\dots \\ 0.68\dots & 0.73\dots \end{bmatrix} \text{として}, \quad (18.84)$$

$${}^tQSQ = \begin{bmatrix} 2.69\dots & 0 \\ 0 & 0.24\dots \end{bmatrix} \text{点}^2 \quad (18.85)$$

注: 分散共分散行列の固有値は, 分散と同じ次元を持つ (この場合は点²) と考え, 固有ベクトルの成分は無次元と考えると都合が良い。従って, ここでは tQSQ に点² という単位をつけ, 他の数値には単位をつけない。

答 570 式 (18.83) の q_1, q_2 がそれぞれ第 1 主成分ベクトルと第 2 主成分ベクトル。

答 571 生徒 3 の数学と英語の得点はそれぞれ 1 点と 2 点。それぞれから数学の平均点と英語の平均点を引いて並べると, $(-2.14, -1.42)$ 点となる (これは式 (18.43) の第 3 行ベクトルである)。

答 572 問 571 より, 生徒 3 の中心化されたデータベクトルは $(-2.14, -1.42)$ 点である。この行ベクトルを d とする。式 (18.83) の q_1, q_2 を使って, 第 1 主成分スコア $= d \cdot q_1 = -2.54 \dots$, 第 2 主成分スコア $= d \cdot q_2 = 0.42 \dots$ 。

答 573 第 2 主成分スコアがプラスである, すなわち, 数学よりも英語の方ができるという傾向が見える。文系にも数学は必要だし理系にも英語は必要なので一概には言えないが, どちらかと言えば文系...?

答 574 $\lambda_1 = 2.69, \lambda_2 = 0.24, \text{tr}(S) = 2.94$ 。従って, 第 1 主成分の寄与率 $= 2.69/2.94 = 0.92$ 。第 2 主成分の寄与率 $= 0.24/2.94 = 0.08$ 。この結果を見ると, 第 1 主成分の寄与率が圧倒的に大きい。つまり, この試験結果を数学と英語の 2 次元数ベクトルの集合とみたときのばらつき (全分散) は, 両科目の総合的な成績 (第 1 主成分スコア) のばらつきが主たる要因であり, それは理系的か文系的かという適性 (第 2 主成分スコア) によるばらつきよりもずっと大きく寄与していると考えられる。

答 575 略。君自身の感じ方を述べよ。「何も感じない」はダメ。

一問一答

- ${}^t a x$ の答が内積で $a {}^t x$ の答が行列になるのがおもしろかったです。

... だから数学の記号は丁寧に扱わなければいけないね。

- なんだそういうことだったのか。

... 数学ってそうなんだよね。

- 全てをやりなおそうと思いました。大変だけど逃げ

ないようにしたいです。

... じっくり根気よく。

- 数学ってうまいことつじつまが合うもんだと思いました。

... つじつま合います。

- テキストを読めばわかるものを説明するのは無駄だと思う。

... 素晴らしい。「読めばわかる」(自力で学べる) という人を育てるのが, 大学です。自分で本や資料を読んで考える方が重要なのです。

- 数学がこれほど密に統計や化学と結びついてるとは知りませんでした。

... まだまだ, こんなもんじゃありません。

- いつもできなかった問題に限って「略」が多くて困ってます。

... 「略」は十分な誘導やヒントが既に与えられている問題です。なので, 学生さんに自分の頭で考えて, それを客観的・論理的に表現して欲しいのです。大学の勉強は, 正解を全て与えられてそのとおりにやるものではありません。多少表現が違ってても, 本質的に正しければ良いのです。わからなければ, 個別に質問に来てください。提出前のレポート課題でも質問 OK ですよ。「質問する勇氣」を養うことも「略」の狙いです。

第19章

線型代数2: 線型空間

ここまでの話は高校数学の延長で、わりと理解・イメージしやすかっただろう。まあ、準備運動みたいなものだ。

さてここからいよいよ、本格的に大学の数学に入る。それはあまりに抽象的で、諸君は戸惑うかもしれない。大学の数学はそういうもので、辛抱が必要だ。とにかくよく読んで、定義を覚え、反芻しよう。そのうち、光が差し込むようになってくる。「最初はわけわからなかったけど、実は単純で簡単なことだった」と思えるだろう。それまで辛抱するのだ。

繰り返すが、定義は覚えねばならない。高校数学くらいなら、イメージでわかるので、定義など「当たり前」過ぎて覚えるまでもない、むしろ「問題の解き方」を覚える方が効率が良い、と思うかもしれない。そういう勉強法は、大学数学には通用しない。何よりも定義が大切なのだ。わからなくなったら定義に戻る、という癖を、徹底的に身につけなければ、大学の数学を理解することはできない。

なお、ここからしばらくの間は、「数学リメディアル教材」の第13章で学んだ概念や数学記号がたくさん出てくる。h

19.1 「閉じている」とは

リメディアル教材の最初の部分で、自然数から始まって複素数に至るまで、次第に「数」の概念を拡張し、定義した。その結果、実数どうしの四則演算（足し算・引き算・掛け算・割り算）の結果（0で割る以外）は実数になり、同様に、複素数どうしの四則演算の結果（0で割る以外）は複素数になるのだった。

そのような状況を、数学では、「閉じている」と表現する。正確に言うと、ある種の数の集合について、その集合内の任意の2つをとりだして、ある種の演算を施した時、その結果もその集合に含まれる、ということが確実な場合、その集合はその演算について「閉じている」という（定義）。

演算とは、2つのものから別の1つのものを作る規則だ。例えば、 $3+4=7$ という演算（足し算）は、3と4という2つの数から7というひとつの数を作る。

自然数という「数の集合」は「足し算」という演算に関して閉じているが、「引き算」に関しては閉じていなかった。そこで、引き算に関して閉じるように拡張したのが整数だった。そして、整数を割り算（0で割る以外）

について閉じるように拡張したのが有理数だった。h

19.2 体

ある集合について、要素どうしに四則演算（0で割る以外）が定義されており（それらは「数学リメディアル教材」第1章で学んだ「四則演算の公理」を満たしていること!）、四則演算に関して閉じているとき、そのような集合を、数学では「体」（「たい」と読む）という。例えば、実数全体の集合 \mathbb{R} 、複素数全体 \mathbb{C} は、いずれも体である。整数の集合 \mathbb{Z} は体ではない。

問 576

- (1) 体とは何か? (2) \mathbb{N} は体か? (3) \mathbb{Q} は体か?

19.3 線型空間

まず、次の定義を、必ず記憶せよ。

線型空間の定義

ある集合 X が、ある体 K について、以下の2つの条件を満たすとき、 X を「 K を体とする線型空間」という：

$$\forall x \in X, \forall \alpha \in K, \alpha x \in X \quad (19.1)$$

$$\forall x, \forall y \in X, x + y \in X \quad (19.2)$$

線型空間は、どれかの体とセットである。ただし、諸君がこれから出会う線型空間の例のほとんどは、その体として \mathbb{R} を採用する（つまり $K = \mathbb{R}$ とする）。また、このテキストの後ろの方にある「計量空間」では、 \mathbb{C} を体とする（つまり $K = \mathbb{C}$ とする）ような線型空間が出てくる。 \mathbb{R} 、 \mathbb{C} 以外をその体とするような線型空間の例は稀だ。

ある線型空間を議論するとき、その線型空間とセットになっている体 K の要素のことを、「スカラー」と呼ぶ。式 (19.1) における α がスカラーである。前述のように、線型空間を考えるとときの体は多くの場合は \mathbb{R} か \mathbb{C}

なので、とりあえずスカラーとは実数が複素数のことだと思っただけでよい。以下、特に断らない限り、体は \mathbb{R} とする(つまりスカラーとは実数のこととする)。

問 577 スカラーとは何か?

数学記号に不慣れな人^{*1}のために、式 (19.1) を普通の言葉で書くと、以下ようになる:「 X の任意の要素 x および K の任意の要素 α について、 αx が X の要素になる。」

また、式 (19.2) を普通の言葉で書くと、以下のようになる:「 X の任意の 2 つの要素 x および y について、 $x + y$ が X の要素になる。」

式 (19.1)、式 (19.2) において、 X の要素を x, y のように太字で書いたことに注意しよう。その理由は、じきに明らかになる。

式 (19.1) は、「集合 X がスカラー倍について閉じている」ということであり、式 (19.2) は、「集合 X が足し算について閉じている」ということを主張している。厳密に言えば、「スカラー倍」とか「足し算」とはどういうことか、をはっきりさせねばならないのだが、そのあたりは常識的なことばかり(分配法則や結合法則が成り立つこと、など)だからあまり気にしないでよい^{*2}。

要するに、「線型空間とは、スカラー倍と足し算が可能で、それぞれについて閉じている集合のことだ」と認識しておけばよろしい。「空間」という言葉のイメージに引きずられて、何か広がりのあるものをイメージしたくなる人もいられるかもしれないが、そのようなイメージは不要である(むしろ理解の邪魔)。ここで使われる「空間」という言葉は、いわば、「集合」という言葉の言い換えに過ぎない^{*3}。

諸君にとって、このような抽象的な話は、最初は、不安かもしれない。なんじゃこれ? とか、こんなものを考えて何になるんだ? などと思うかもしれない。でも大丈夫。大学の数学には、このような抽象的な話がたくさん出てくるが、そういうときは、ひとつひとつの言葉の定義を確認し、その次に、例をいくつか考えてみよう。そうすれば、抽象的な概念も、だんだん身近に感じられるようになり、それが絶妙にうまくできていることに気づ

*1 そういう人は、「数学リメディアル教材」の「論理・集合・記号」の章を復習しよう!

*2 気になる人は、長谷川浩司「線型代数」日本評論社 p. 219 などを参照せよ。

*3 ならば「線型集合」でいいじゃないか、と思うかもしれないが、「線型空間」と言うのが慣習だから仕方がない。

き、そのうちその概念を身近に感じるだろう。

問 578 線型空間の定義を 10 回、書いて記憶せよ。

例 19.1 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ で定義される集合 A は、線型空間だろうか? 例えば $x, y \in A$ として、 $x = 1, y = 5$ を考えると、 $x + y = 6$ となり、これは A の要素ではない。従って式 (19.2) が成り立たない場合が存在する。従って、この集合 A は線型空間ではない。 ■

例 19.2 $S = \{\text{赤木, 三井, 宮城, 流川, 桜木}\}$ で定義される集合^{*4}を S とする。 S は線型空間だろうか? 例えば $x \in S$ として $x = \text{赤木}$ を考えれば、そのスカラー倍(赤木の 0.1 倍とか -2.5 倍とか)なんて、そもそも何のこともやわわからない。まして、赤木 + 三井とか、何のこともやわさっぱりわからない(ふたりのペアではなく、ふたりを合わせてできるはずのひとりの人間)。意味不明、というか無意味だ。つまり、この集合 S の要素には、「スカラー倍」や「足し算」ができない。従って、式 (19.1) や式 (19.2) は、無意味であり、成り立つわけがない。従って、この集合 S は、線型空間ではない。 ■

例 19.3 実数全体の集合 \mathbb{R} は線型空間だろうか? 任意の $x \in \mathbb{R}$ について、そのスカラー倍(つまり実数倍) αx は、 α がどんな実数であっても、実数であるので、 $\alpha x \in \mathbb{R}$ である。従って、式 (19.1) が成り立つ。また、任意の $x, y \in \mathbb{R}$ について、その和は実数であるから、 $x + y \in \mathbb{R}$ だ。従って、式 (19.2) も成り立つ。従って、 \mathbb{R} は線型空間である。 ■

このように、どのような集合も、線型空間か、線型空間でないか、どちらかに分類される。式 (19.1) と式 (19.2) の両方が成り立てば線型空間だし、そうでなければ(片方もしくは両方が不成立ならば)線型空間でない。

さて、線型空間のことを、「ベクトル空間」と呼ぶこともある。そして、

ベクトルの定義

線型空間(つまりベクトル空間)の要素のことを、「ベクトル」と呼ぶ。

ちょっと待て!!! 「ベクトル」とは、平面や 3 次元空間

*4 これは漫画「スラムダンク」の湘北高校バスケットボール部のスターティングファイブである。

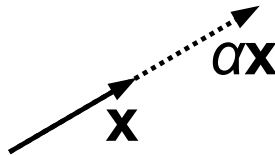


図 19.1 幾何ベクトル x のスカラー倍 αx も幾何ベクトルになる。

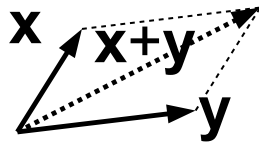


図 19.2 幾何ベクトル x, y の和 $x+y$ も幾何ベクトルになる。

の中で、「向きと大きさを持つもの」であるという認識（矢印のイメージ）で、我々は高校から数学を勉強してきた。現在も、「物理学」などの講義では、空間における物理的対象（位置とか速度とか力とか）をあらわすときに、平面や 3 次元空間の「矢印」としてのベクトルの恩恵に浴している。その「ベクトル」がなぜ、上記のような、抽象的な、へんてこりんなものになってしまったのだろうか？

実は、「向きと大きさを持つもの」は、正確には「幾何ベクトル」というものであり、ベクトルの一種に過ぎない。それは、以下の例を考えればわかる：

例 19.4 平面における全ての幾何ベクトルからなる集合 X は、線型空間だろうか？ 任意の幾何ベクトル $x \in X$ について、その実数倍 αx は、確かに幾何ベクトルになる（図 19.1）。つまり式 (19.1) を満たす。また、任意の 2 つの幾何ベクトル $x, y \in X$ について、その和 $x+y$ も、確かに幾何ベクトルになる（図 19.2）。つまり式 (19.2) も満たす。従って、この X は線型空間である。 ■

この例 19.4 でわかるように、幾何ベクトルの集合は線型空間になるのだから、幾何ベクトルは線型空間の要素だ。上の「ベクトルの定義」によれば、線型空間の要素はベクトルと呼んで良い。従って、幾何ベクトルをベクトルと呼ぶことが許されるのだ。つまり、上の抽象的な「ベクトルの定義」は、幾何ベクトルのこともきちんと含んでおり、何の矛盾も無いのだ。「幾何ベクトル」は、一般的な「ベクトル」の概念の中に収まる、ひとつの具体例にすぎないのだ。

ところで、我々に馴染みの深い「ベクトル」にはもうひとつの側面がある。すなわち「数を並べて」表現できるということだ。(2, 3) や (-3, 1, 1.5) などだ。実は、これは「数ベクトル」というものである。これまで我々は数ベクトルと幾何ベクトルをごっちゃにしていたが、ここではそれらを切り離して、別のものとする。単に「数を並べたもの」を数ベクトルというのだ。

例 19.5 n を正の整数としよう。任意の実数を n 個、並べたものを、「 n 次元の数ベクトル」と呼ぶ。「 n 次元の数ベクトル」は上の「ベクトルの定義」にあてはまるのだろうか？

「 n 次元の数ベクトル」からなる集合を \mathbb{R}^n と書く*5。例えば、

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1.1 \end{bmatrix} \quad (19.3)$$

は 4 次元の数ベクトルであり、 \mathbb{R}^4 の要素である*6。さて、 \mathbb{R}^n は線型空間だろうか？ $x \in \mathbb{R}^n$ であれば、適当な実数 x_1, x_2, \dots, x_n を使って、

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (19.4)$$

と書けるはずだ。このとき、任意の実数（スカラー） α について、

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} \quad (19.5)$$

も、当然ながら \mathbb{R}^n の要素だ。つまり式 (19.1) が成り立

*5 \mathbb{R}^n の「 n 乗」は、数の掛け算ではなく、集合の直積である。つまり、

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$$

であり、この式の \times は直積である。「直積」の概念を理解していない人は、「数学リメディアル教材」第 10 章を復習すること。

*6 このように数ベクトルを縦に並べて表記したものを「列ベクトル」と呼ぶ。同様に、数ベクトルを横に並べたものを「行ベクトル」と呼ぶ。数ベクトルや行列をあらわすときの括弧として、丸括弧“()”を使っても角括弧“[]”を使っても、どちらでもよい。

つ。また、 \mathbb{R}^n の別の要素として

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (19.6)$$

を考えて、 \mathbf{x} と \mathbf{y} の「足し算」を

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad (19.7)$$

と定めれば、これも当然ながら \mathbb{R}^n の要素だ。つまり式 (19.2) も成り立つ。従って、 \mathbb{R}^n は線型空間である。従って数ベクトルは線型空間の要素だ。従って数ベクトルはベクトルの一種である。だから数「ベクトル」と呼んでも誰も怒らないのだ^{*7}。 ■

ここで書き方の注意。例 19.3 では、任意の実数 x はベクトルである、ということがわかった。ところが諸君は、「ベクトルは太字で書け」と、さんざん言われてきたので、実数 x と書くべきではないか、と思う人もいるかもしれない。しかしそうではないのだ。これは慣習の問題だが、実数は確かにベクトルとしての性質を持っているが、それをあえてベクトルとして扱う場面は、数学ではほとんど発生しない。それよりも、実数はスカラーとして扱うことの方が多い。なので、普通は、実数 x というふうに細字で書けばよい。

また、線型空間 X の要素 (つまりベクトル) \mathbf{x} と、スカラー α について、「 \mathbf{x} の α 倍」を $\alpha\mathbf{x}$ と書くのが普通だが、これをたまに、 $\mathbf{x}\alpha$ と書いてしまう人がいる。これは慣習的に不適切である。あくまで、スカラーが前、ベクトルが後になるように書こう。

さて、ここまでの話を読んで、「なんだ、結局、幾何ベクトルと数ベクトルが出てくるならば、高校数学と変わらないじゃないか」と思う人もいるかもしれない。そうではないのだ。後で出てくるが、幾何ベクトルと数ベクトルのほかにも、いろんな対象が、「ベクトル」としての性質を持ち、ベクトルとして取り扱われるのだ。それを知ったら、諸君のもつ「ベクトル」のイメージは、根底か

^{*7} 数ベクトルは、幾何ベクトルを座標で表したものである、と思っていた人もいるかもしれないが、それはちょっと違う。この例で明らかのように、数ベクトルは、数ベクトルの性質 (スカラー倍と足し算ができること) だけで既に立派な「ベクトル」なのだ。

ら覆されるだろう。

君がもし「自分にはどうせこんな抽象的な数学は関係ないや」と思っているとしたら、甘い。線型空間の考え方は、大学の数学の根幹をなすだけでなく、物理学 (振動・波動・電磁気学・量子力学等) や統計学やその他の数理的な学問でも、根幹をなすのだ。はっきり言おう。この話から逃げたら、君の数学はここで終わりだ。もし君がもうちょっとでも数学を学びたいのであれば、恐らくこの「線型空間」の概念を避けて通ることはできない。それは、果てしなく広く、力強く、実用的で、美しい、数学への扉なのだ。ここから逃げては先に行けないのだ。

問 579 ベクトル空間とは何か?

問 580 ベクトルとは何か?

例 19.6 整数全体の集合 \mathbb{Z} 。 \mathbb{Z} の要素として、例えば $x = 2$ を選び、スカラーとして $\alpha = 0.1$ を選んだら、 $\alpha x = 0.2$ となる。これは整数ではないので、 \mathbb{Z} の要素ではない。このように、式 (19.1) が成り立たない場合がある。従って \mathbb{Z} は線型空間ではない^{*8}。 ■

ここで諸君は違和感を感じるかもしれない。「例 19.3 より、 \mathbb{R} は線型空間なので、その要素、例えば 2 とかはベクトルと呼べるはずだ。しかし、例 19.6 では、 \mathbb{Z} は線型空間でないのに、その要素である 2 はベクトルと呼べない。いったい、2 はベクトルと呼べるのか呼べないのか、どちらなんだ?」

ここは微妙なところだ。何かひとつのものがベクトルと言えるかどうかは、それがどのような集合に属すとみなすかで決まるのだ。整数の集合に限定すれば整数はベクトルとは言えない。しかし実数全体の集合 (それは線型空間である!) の中では整数はベクトルである^{*9}。

^{*8} でも、「体として \mathbb{Z} を選ぶ」ことにすれば、スカラーも整数に限定されるから、スカラー倍について閉じることになり、 \mathbb{Z} は線型空間になるのではないかと、思う人がたまにいる。それは違う。そもそも \mathbb{Z} は体になる資格はない (割り算について閉じていない) のだ。

^{*9} これは、あるサッカー選手が「良い選手」かどうかという話に似ている。所属するクラブチームでは素晴らしい選手であるにもかかわらず、日本代表チームに入るとさっぱりダメ、という選手がいる。この選手が「良い選手」と言えるかどうかは、どのチームに彼を入れるかによって変わるのだ。

問 581 以下, 断らない限りは \mathbb{R} を体とする。

- (1) $B = \{2n \mid n \text{ は } 1 \text{ 以上の整数}\}$ は線型空間でないことを示せ。
- (2) \mathbb{C} は, \mathbb{R} を体とする線型空間であることを示せ。
- (3) \mathbb{C} は, \mathbb{C} を体とする線型空間であることを示せ。
- (4) $\{0\}$ は線型空間であることを示せ。
- (5) $\{1\}$ は線型空間でないことを示せ。

例 19.7 全ての実数係数 2 次関数からなる集合を P_2 としよう*10。すなわち,

$$P_2 = \{f(x) = px^2 + qx + r \mid p, q, r \in \mathbb{R}\} \quad (19.8)$$

とする。 P_2 は線型空間だろうか? まず, P_2 の任意の要素 $f(x) = px^2 + qx + r$ について, その α 倍を考えよう (α は任意の実数):

$$\alpha f(x) = \alpha(px^2 + qx + r) = \alpha px^2 + \alpha qx + \alpha r$$

これも実数係数 2 次関数なので, P_2 の要素である。従って式 (19.1) を満たす。また, P_2 の別の要素 $g(x) = sx^2 + tx + u$ について ($s, t, u \in \mathbb{R}$),

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (px^2 + qx + r) + (sx^2 + tx + u) \\ &= (p+s)x^2 + (q+t)x + (r+u) \end{aligned}$$

も実数係数 2 次関数なので, P_2 の要素である。従って式 (19.2) を満たす。従って, この集合 P_2 は線型空間であり, その要素, すなわち実数係数 2 次関数は, ベクトルである。 ■

例 19.8 集合 Y を, $f(x) = p \exp(qx)$ という形の, 実数 x に関する関数の集合とする (p, q は任意の実数)。すなわち,

$$Y = \{f(x) = p \exp(qx) \mid p, q \in \mathbb{R}\} \quad (19.9)$$

とする。 Y は線型空間だろうか? これは線型空間ではなさそうだとみて, 線型空間の定義に反する例 (反例) を探そう。

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \exp(x), \quad f_2(x) = -\frac{1}{2} \exp(-x) \quad (19.10)$$

とすれば, $f_1 \in Y, f_2 \in Y$ だが,

$$f_1(x) + f_2(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad (19.11)$$

は, Y の要素ではない。なぜならば, 式 (19.11) は, どんなにがんばっても $p \exp(qx)$ という形には変形できないからだ。それは, 直感的にはグラフを考えればわかる。式 (19.11) は $\sinh x$ であり, そのグラフは図 16.4 のように, 正と負の値を両方とりえるが, $f(x) = p \exp(qx)$ の値は, p の値の正負と同じ符号しかとり得ない。従って Y は線型空間ではない。 ■

例 19.9 実数 x に関して, $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で連続な関数 $f(x)$ の集合 X 。もし $f(x) \in X$ なら, そのスカラー倍 $\alpha f(x)$ も $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で連続な関数なので, $\alpha f(x) \in X$ 。また, もし $f_1(x), f_2(x) \in X$ ならば, $f_1(x) + f_2(x)$ も $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で連続な関数なので, $f_1(x) + f_2(x) \in X$ 。従って, この集合 X は線型空間であり, その要素, すなわち $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で連続な関数は, ベクトルである。 ■

例 19.7 の集合 P_2 や例 19.8 の集合 Y は, 例 19.9 の集合 X に含まれることに注意せよ。線型空間の部分集合は, 線型空間になることもあれば, 線型空間にならないこともあるのだ。

例 19.7 や例 19.9 のような「関数」には「向きと大きさ(長さ)を持つもの」というイメージは全くないから, これらがベクトルだと言われても, 高校数学に慣れた諸君は, すぐには納得できないかもしれない*11。しかしとにかくこのように, 関数の集合は, (ある種の制約をつけることによって) 線型空間になり, そこに属する関数はベクトルになる。そのように, 関数からなる線型空間のことを 関数空間 と呼ぶ。ベクトルの概念を拡張することの最大の功用は, 関数をベクトルとして扱えるようになること, すなわち関数空間の概念だ。実は, 関数空間は, 関数を解析するための強力な足場となるのだ。

ここで注意。関数空間の中の 0 は, 「恒等的に 0 になる関数」のことだ。例えば例 19.7 で, $f(x) = x^2 - 1$ は, $f(-1) = f(1) = 0$ になるが, それ以外では $f(x)$ は 0 ではない。つまり「恒等的に 0」ではない。そういう意味で, この関数は, ベクトルとしては 0 ではないのだ。

さて, 関数がベクトルであるという発想は, 実は, P.41

*10 一次関数も, x^2 の係数が 0 であるような 2 次関数として, P_2 の中に含まれる。定数関数も同様である。

*11 驚くべきことかもしれないが, 拡張されたベクトルの概念には, そもそも大きさや方向は必要ないのだ。ただし, ちょっと工夫すれば, 例 19.7 や例 19.9 のような「ベクトル」にも「長さ」を考えることはできる。一般に, 「長さ」が定義されている線型空間を「ノルム空間」と呼ぶ。

図 18.4 に戻ると、さほど不自然なものではない。図 18.4 下のように数ベクトルをグラフで視覚的に表現すれば、数ベクトルの次数 (並べる数の個数) をどんどん増やしていくと、カクカクした棒グラフはやがて、緻密な点からなるグラフになるだろう。それが関数である。関数は、いわば数を無数に緻密にならべた数ベクトルである。

例 19.10 以下の方程式を考えよう:

$$x + 2y + z = 0 \quad (19.12)$$

これは式が 1 本で未知数が 3 個、つまり式の数が未知数の数よりも少ないから、解が定まらない*12。つまり、この連立方程式の解は無数にある。例えば、

$$(x, y, z) = (-1, 1, -1) \quad (19.13)$$

$$(x, y, z) = (0, 1, -2) \quad (19.14)$$

などは、この方程式の解だ。これらを含めて、この方程式の解の集合:

$$X = \{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0\}$$

は線型空間になるのだ。それを証明しよう: まず、

$$(x_1, y_1, z_1) \in X \quad (19.15)$$

$$(x_2, y_2, z_2) \in X \quad (19.16)$$

とする。すなわち、

$$x_1 + 2y_1 + z_1 = 0 \quad (19.17)$$

$$x_2 + 2y_2 + z_2 = 0 \quad (19.18)$$

である。さて、任意の実数 α について、 $\alpha(x_1, y_1, z_1)$ 、つまり、 $(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ を、式 (19.12) 左辺に代入すると、

$$\alpha x_1 + 2\alpha y_1 + \alpha z_1 = \alpha(x_1 + 2y_1 + z_1) = 0$$

となる (最後の変形で式 (19.17) を使った)。従って、 $\alpha(x_1, y_1, z_1)$ は式 (19.12) の解である。従って、 $\alpha(x_1, y_1, z_1) \in X$ である (式 (19.1) が成り立つ!)。また、 $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$ 、つまり $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ を式 (19.12) 左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2) + z_1 + z_2 \\ = (x_1 + 2y_1 + z_1) + (x_2 + 2y_2 + z_2) = 0 \end{aligned}$$

となる (最後の変形で式 (19.17) と式 (19.18) を使った)。従って、 $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$ は式 (19.12) の解である。従って、 $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in X$ である (式 (19.2) が成り立つ!)。

従って、 X は線型空間である。(例おわり) ■

問 582 α, β, γ を、実数の定数とする。以下の方程式の解 (x, y, z) の集合は線型空間であることを示せ。

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad (19.19)$$

ヒント: 例 19.10 と同じように考えればよい。

注意: ベクトルは上付き矢印か太字で表す約束だったが、幾何ベクトルと数ベクトル以外のベクトルは、上付き矢印や太字で表されないこともある (例えば、例 19.3 のように \mathbb{R} を線型空間とみなしたときの個々実数や、例 19.9 のように関数の集合が線型空間になるときの個々の関数など)。しかし、線型空間の一般論を述べるときには、ベクトル (線型空間の要素) の記号にはなるべく太字を使うことにしよう。

問 583 以上で示した例やその類似例を除いて、

- (1) 線型空間の例を 3 つ、それぞれ理由と共に挙げよ。
- (2) 線型空間でない集合の例を 3 つ、それぞれ理由と共に挙げよ。

注意: 線型空間の例として、たとえば

$$X = \{\ln x \mid 0 < x \in \mathbb{R}\} \quad (19.20)$$

を挙げる人がいる。 $\alpha \ln x = \ln x^\alpha \in X$, $\ln x_1 + \ln x_2 = \ln x_1 x_2 \in X$ が成り立つから。しかし、この X は、要するに \mathbb{R} だ。 \mathbb{R} は \mathbb{R} を体とする線型空間であることは既に示してあるのだから、上の式のような書き方をわざわざする意味は無いし、新しい例としても認められない。また、

$$X = \{f(x) = \ln x \mid 0 < x \in \mathbb{R}\}$$

を挙げる人もいる。これは式 (19.20) と違って $f(x) = \ln x$ という関数ひとつからなる集合だ。しかし、この関数に -2 をかけたら $f(x) = -2 \ln x$ という別の関数になってしまい、それはこの集合には含まれない。従ってこの集合は線型空間ではない。このように、数の集合を定義したいのか、関数の集合を定義したいのかを、はっきり区別することが重要である。

また、線型空間でない例として、たとえば、

$$X = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\} \quad (19.21)$$

*12 そのことを「不定」という。数学リメディアル教材参照。

を挙げる人がいる。これは要するに、

$$X = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 1\} \quad (19.22)$$

であり、式 (19.21) のようなまわりくどい書き方は不適切だ。

19.4 線型結合と重ね合わせ

線型空間の要素（つまりベクトル）を、スカラー倍して足し合わせることを 線型結合 とか 一次結合 という。すなわち、 K を体とする線型空間 X において、その n 個の要素 (n は 1 以上の整数とする)：

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in X$$

と、 n 個のスカラー：

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$$

によって、

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n \quad (19.23)$$

すなわち、

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{x}_k \quad (19.24)$$

のようにあらわされるものを、「線型結合」もしくは「一次結合」という。

物理学では、線型結合のことを「重ね合わせ」(superposition) とも呼ぶ。

問 584 以下の用語の定義を述べよ。

- (1) 線型結合 (2) 一次結合 (3) 重ね合わせ

問 585 線型空間 X の要素の線型結合は、 X の要素であることを示せ。ヒント：線型空間の定義を使うこと。

問 586 線型空間の 2 つの定義式 (式 (19.1) と式 (19.2)) は、次式と同値^{*13}であることを示せ^{*14}：

$$\forall \mathbf{x} \in X, \forall \mathbf{y} \in X, \forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \\ \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in X \quad (19.25)$$

問 586 でわかるように、大雑把に言えば、線型空間とは、「線型結合について閉じている集合」のことであり、

ベクトルとは、「線型結合できるもの」である。

さて諸君はこれを読んで、どう思っただろうか？ これまで馴染んできた幾何ベクトル (の集合) や数ベクトル (の集合) は、線型結合できる (線型結合について閉じている) ので、「ベクトル」の名に値する。でも、逆に線型結合ができれば何でも「ベクトル」と言ってよい、というのは、抽象的過ぎて、腑に落ちないかもしれない。

しかし、この「抽象性」こそが、数学の真骨頂なのだ。抽象的なものは、適用範囲が広い。「向きと大きさ (長さ) を持つ量」とか「矢印」のような「具体的なイメージ」は、数学を学ぶ上で、時には助けになるが、時には「固定観念」となって諸君の足をひっぱるのだ。その固定観念では、ベクトルは空間の幾何学的な性質を調べる道具に過ぎない。それはそれで有用なのだが、ベクトルは、そういうものから解き放たれて抽象的に拡張されること (それを一般化という) によって、さらに威力を発揮するのだ。

とは言うものの、例えば関数の集合を線型「空間」と呼ぶのは奇妙だ。我々のイメージでは、空間とは広がりをもった場所のことであり、2次元平面や3次元空間こそが「空間」の名にふさわしいように思える。しかし、この「空間」という言葉は、数学用語であり、「ある構造を持った集合」という意味である。なので、「空間」という言葉でこのような奇妙な対象を表すことに違和感を覚えることは無用である^{*15}。数学や科学の概念を、その用語の日常的な意味やイメージで理解しようとしてはならない。大切なのは、それぞれの言葉がどのように「定義」されているかである。

演習問題

演習問題 1 任意の 2 つの線型空間 X, Y について、 X, Y の体が同じであれば、 $X \times Y$ も線型空間になることを示せ。ヒント： \times は「集合の直積」である。どんな問題でも、わからなければ実例を考えてみるとよい。例えば、 \mathbb{R} は線型空間であり、 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 、つまり \mathbb{R}^2 も線型空間であることは諸君は知っているだろう。なぜ \mathbb{R}^2 が線型空間なのかを考えれば、この問題へのヒントが見つかるはずだ。

^{*13} 「同値」の意味を忘れた人は「リメディアル教材」を参照せよ。

^{*14} なので、式 (19.25) を線型空間の定義式とする人もいる。

^{*15} この辺の事情は、例えば、我々が日常的に使う「仕事」という言葉と、物理学における「仕事」という用語が異なる意味を持つのと同ようなことだ。

19.5 解答

答 576

- (1) 要素どうしに四則演算 (0 で割る以外) が定義されており, 四則演算について閉じているような集合
- (2) 例えば, $3, 5 \in \mathbb{N}$ について, $3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}$ である。従って, 引き算について閉じていない*16。従って, 自然数の集合 \mathbb{N} は体でない。
- (3) 有理数どうしに加減乗除 (0 での除算を除く) の結果は有理数である。従って, 有理数の集合 \mathbb{Q} は, 体である。

答 577 線型空間とセットになっている体の要素のこと。多くの場合は, 実数または複素数である。 ■

答 578 略

答 579 線型空間のこと。 ■

答 580 線型空間 (ベクトル空間) の要素。 ■

答 581

- (1) $2 \in B, 0.1 \in \mathbb{R}$ について, $0.1 \times 2 = 0.2 \notin B$ 。従ってスカラー倍ができないことがある。
- (2) 任意の複素数をスカラー倍 (実数倍) したら複素数になる。また, 任意の 2 つの複素数どうしを足したら複素数になる。スカラー倍と足し算が可能だから線型空間。
- (3) 任意の複素数をスカラー倍 (複素数倍) したら複素数になる。また, 任意の 2 つの複素数どうしを足したら複素数になる。スカラー倍と足し算が可能だから線型空間。
- (4) 集合 $\{0\}$ の要素は 0 しかない。そして, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha 0 = 0 \in \{0\}$ だから, スカラー倍したのも $\{0\}$ の要素 (というか 0 そのもの) である。また, $0 + 0 = 0 \in \{0\}$ だから, 足し算したのも $\{0\}$ の要素 (というか 0 そのもの) である。スカラー倍と足し算が可能だから, $\{0\}$ は線型空間。
- (5) $1 \in \{1\}, 2 \in \mathbb{R}, 2 \times 1 = 2 \notin \{1\}$ 。従ってスカラー倍ができないことがある。

答 582 ~ 答 583 略。

答 584

- (1) 略。
- (2) 線型結合のこと。
- (3) 線型結合のこと。

答 585 $x_1, x_2, \dots, x_n \dots \in X, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \dots \in K$ とする。 X は線型空間なので, $\alpha_1 x_1 \in X$ 。

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \quad (19.26)$$

と定義すると, $S_1 = \alpha_1 x_1 \in X$ 。今, ある $n \in \mathbb{N}$ について, $S_n \in X$ が成り立つと仮定する。

$$x_{n+1} \in X, \quad \alpha_{n+1} \in K \quad (19.27)$$

なので, 式 (19.1) より,

$$\alpha_{n+1} x_{n+1} \in X \quad (19.28)$$

である。従って, 式 (19.2) より,

$$S_n + \alpha_{n+1} x_{n+1} \in X \quad (19.29)$$

この左辺は S_{n+1} である。従って, $S_{n+1} \in X$ 。従って, (数学的帰納法により), X の任意個の要素の線型結合も X の要素である。 ■

答 586 式 (19.1) が成り立てば, $\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in X, \forall y \in X$ について, $\alpha x \in X$ かつ $\beta y \in X$ である。ここで式 (19.2) も成り立てば, $\alpha x + \beta y \in X$ である。つまり式 (19.25) が成り立つ。逆に, 式 (19.25) が成り立てば, $\beta = 0$ とすれば式 (19.1) と同様の式になり, $\alpha = \beta = 1$ とすれば式 (19.2) と同様の式になる。従って式 (19.1) かつ式 (19.2) が成り立つ。以上より, 「式 (19.1) かつ式 (19.2)」と, 式 (19.25) は, 同値。 ■

答 1 略。

一問一答

- 線型空間はスカラー倍と足し算ができる集合のことだったんですね...

... そうです。

- 線型結合って期待値に (形は) 似てませんか?

... 似ています。量子力学では, この式が期待値と線型結合の意味を同時に持ちます。

*16 閉じていないということを示すには, このように反例を 1 つ示せば十分である。

第20章

線型同次微分方程式

線型代数学は、ある種の方程式を取り扱う上で、非常に役に立つことがある。ここでは、それを体験するために、少し線型代数そのものの学習を休んで、線型代数と方程式の織りなす豊かな世界(笑)を垣間見よう。それは、本書の後半への大きな伏線である。

20.1 線型同次方程式

P.52 例 19.10 で見たように、ある種の方程式は、その解の集合が線型空間になる。そのように、解の集合が線型空間になる(言い換えれば、解の線型結合も解になる)ような方程式を、「線型同次方程式」という(定義)^{*1}。「その方程式は線型同次である」と言ったりもする。

問 587 以下の連立方程式は線型同次方程式であることを示せ。ヒント: この連立方程式の解の集合が線型空間になることを示せばよい。

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad (20.1)$$

ある方程式が線型同次方程式でないことを示すには、その方程式の解のスカラー倍や線型結合が、その方程式を満たさないような具体的な例(反例)を示せばよい。

例 20.1 2つの変数 x, y に関する、以下の方程式を考える:

$$xy = 1 \quad (20.2)$$

これは線型同次方程式だろうか? この方程式の解として、 $(x, y) = (1, 1)$ を考えよう。もしこの式が線型同次方程式なら、例えばこの解の2倍、つまり $(x, y) = (2, 2)$ もこの式を満たすはずだ。しかし、実際は、 $2 \times 2 = 4 \neq 1$ となり、 $(2, 2)$ はこの式を満たさない(反例)。従って、この式は線型同次方程式ではない。 ■

^{*1} 「同次」のことを「斉次」ということもある。

問 588 以下の方程式は線型同次方程式でないことを示せ。

$$x^2 + y^2 + z = 0 \quad (20.3)$$

20.2 線型同次微分方程式

例 19.10 や式 (20.1) のような代数方程式だけでなく、以下の例で示すように、ある種の微分方程式も「線型同次方程式」になることがある。線型同次方程式であるような微分方程式(つまり、解の線型結合も解であるような微分方程式)のことを、「線型同次微分方程式」という^{*2}。

例 20.2 関数 $x(t)$ の微分方程式:

$$\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (20.4)$$

を考えよう^{*3}。これは、変数分離法で簡単に解けて、その結果は、 $x(t) = Ae^{-t}$ である。ここで A は任意の実数であり、 A の値は初期条件によって一意に定まるはずだ。しかしここでは、初期条件は考えないで、式 (20.4) を満たす関数 $x(t)$ ならどんな関数でも許容しよう。すると、そのような関数の集合 X 、すなわち、

$$X = \{x(t) = Ae^{-t} \mid \forall A \in \mathbb{R}\} \quad (20.5)$$

が線型空間であることは、すぐわかるだろう。なぜならば、「 e^{-t} の定数倍」という形の関数をスカラー倍したり、そのような形の関数同士を足したりしても、係数 A の値が変わるだけで、依然として「 e^{-t} の定数倍」という形をしているからである。従って、式 (20.4) は線型同

^{*2} 線型同次方程式ではない微分方程式も存在する。例えば、ここでは証明はしないが、 $dx/dt = x^2$ や、ロジスティック方程式がその例である。

^{*3} 以後、 $x(t)$ 等の「 (t) 」は、式の中では、適宜、省略して書く。これは煩雑を避けるためである。

次微分方程式である。 ■

しかし、このように具体的に解を求めなくても、式 (20.4) が線型同次方程式かどうかは判定できるのである。こうやるのだ: 関数 $x_1(t), x_2(t)$ がともに X の要素である (つまり式 (20.4) の解である) とする。すなわち、

$$\frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0 \quad (20.6)$$

$$\frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0 \quad (20.7)$$

であるとする。さて、任意の実数 α について、 $\alpha x_1(t)$ は X の要素である (つまり式 (20.4) の解である)。なぜなら、

$$\frac{d(\alpha x_1)}{dt} + (\alpha x_1) = \alpha \left(\frac{dx_1}{dt} + x_1 \right) = 0 \quad (20.8)$$

となるからである (式 (20.6) より)。従って、 X の要素をスカラー倍したのも X の要素であることが言えた。また、 $x_1(t) + x_2(t)$ という関数も、 X の要素である。なぜなら、

$$\frac{d(x_1 + x_2)}{dt} + (x_1 + x_2) \quad (20.9)$$

$$= \left(\frac{dx_1}{dt} + x_1 \right) + \left(\frac{dx_2}{dt} + x_2 \right) = 0 \quad (20.10)$$

となるからである (式 (20.6), 式 (20.7) より)。従って、 X の要素同士の和も X の要素であることが言えた。以上から、 X は線型空間である。従って、式 (20.4) は線型同次微分方程式である。 ■

このようなやり方は、多くの場合で、具体的に解を求めるよりもずっと簡単で、なおかつ汎用性が高い。

前章で、関数の集合が線型空間であるとき、その集合を関数空間ということをした。線型同次微分方程式の解の集合は関数空間である!

問 589 以下の式は線型同次微分方程式であることを示せ。

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0 \quad (20.11)$$

問 590 以下の微分方程式は線型同次微分方程式であることを示せ。ただし、 m, k, γ は 0 でない定数と

する。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} \quad (20.12)$$

注: これは式 (17.33) と同じ方程式である。

20.3 演算子法

式 (20.11) や式 (20.12) は、独立変数 t に関する二階の微分を含む微分方程式、つまり「二階微分方程式」である。これらは、既に学んだように、数値的に解くことはできるが、解析的に解くことはできないだろうか? 実は、できる (こともある) のだ。

これまで諸君が解析的に解いた微分方程式は、式 (16.4) や式 (17.6) のように、一階微分方程式ばかりだった。一階微分方程式ならば、運が良ければ「変数分離法」が使えた*4。

これから学ぶ「演算子法」という工夫を使えば、式 (20.11) や式 (20.12) のような二階の線型同次微分方程式を変数分離法で解くことができる*5。

例 20.3 関数 $x(t)$ に関する以下の微分方程式を解いてみよう (これは式 (20.11) と全く同じ):

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0 \quad (20.13)$$

ただし、初期条件を

$$t = 0 \text{ で, } x = 5 \text{ かつ } \frac{dx}{dt} = -2$$

とする。

この方程式には直接的には変数分離法は通用しない。なぜなら、左辺に dx だけでなく d^2x という、これまで出てこなかったような量 (2 次の微少量) があるからである。発想を転換しよう。

この式 (20.13) の各項は、全て、それぞれ「微分する」とか「係数をかける」というふうに、関数 $x(t)$ に何か

*4 一階微分方程式であっても、変数分離法が通用しないものもある。例えば、

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2$$

は、一階微分方程式だが、変数分離法では解けない。

*5 演算子法は二階以上の線型同次微分方程式を解く方法だが、万能ではない。演算子法で解けないような二階以上の線型同次微分方程式もたくさんある

「操作」するという意味を持っている。そこで、これらの操作を関数から切り離してひとまとめにして、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} - 2\right)x = 0 \quad (20.14)$$

というふうに、形式的に書き換えよう。式 (20.14) 左辺の () 内のように、関数に対する微分や係数倍などの操作を、関数から切り離してまとめたものを、演算子 (operator) という。

さて、驚くべきことだが、この演算子は以下のように「因数分解」できるのだ：

$$\left(\frac{d}{dt} - 2\right)\left(\frac{d}{dt} + 1\right)x = 0 \quad (20.15)$$

実際、この式を右から順番にほぐしていけば、式 (20.14) に、そして式 (20.13) に戻ることは明らかだろう。

すると、因数分解された 2 つの演算子のうち、右のほう ($x(t)$ に先にかかるほう) が $x(t)$ にかかったときに恒等的にゼロになってしまうと、残されたもうひとつの演算子が何をしようが、この微分方程式は成立する。すなわち、

$$\left(\frac{d}{dt} + 1\right)x = 0 \quad (20.16)$$

つまり

$$\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (20.17)$$

を恒等的に満たす $x(t)$ は、式 (20.15) の解、つまり式 (20.13) の解である！

一方、式 (20.14) は

$$\left(\frac{d}{dt} + 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)x = 0 \quad (20.18)$$

と変形することもできる。この場合も、上と同様に考えて、

$$\left(\frac{d}{dt} - 2\right)x = 0 \quad (20.19)$$

つまり

$$\frac{dx}{dt} - 2x = 0 \quad (20.20)$$

を恒等的に満たす $x(t)$ も、式 (20.13) の解である！

問 591 以上を参考にして、式 (20.13) を解いてみよう。

- (1) 式 (20.17) の解は、次式であることを示せ (a_1 は任

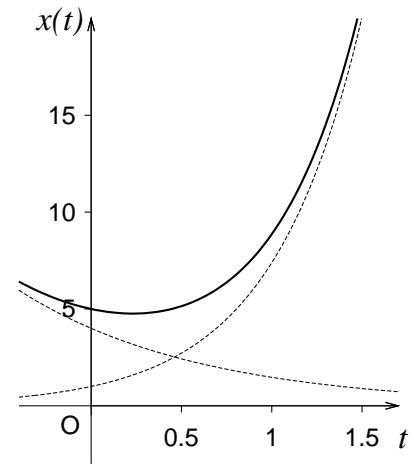


図 20.1 $x(t) = 4e^{-t} + e^{2t}$ のグラフ。点線は $4e^{-t}$ と e^{2t} 。 $t = 0$ での傾きが負であることに注意。

意の数)

$$x(t) = a_1 \exp(-t) \quad (20.21)$$

- (2) 式 (20.20) の解は、次式であることを示せ (a_2 は任意の数)

$$x(t) = a_2 \exp(2t) \quad (20.22)$$

- (3) これらの線型結合、すなわち

$$x(t) = a_1 \exp(-t) + a_2 \exp(2t) \quad (20.23)$$

は、式 (20.13) を満たすことを確認せよ。

- (4) 初期条件から係数 a_1, a_2 を決定し、以下の解を導け：

$$x = 4e^{-t} + e^{2t} \quad (20.24)$$

ちなみにこの関数のグラフは図 20.1 のようになる。

このように、 $x(t)$ にかかる係数や微分演算を形式的に演算子としてくりだせば、代数的な式変形 (今の場合は因数分解) ができ、それによって複雑な微分方程式を、複数の単純な微分方程式に分割できる。そして、単純化された微分方程式を解き、その解の線型結合を作ると、それが「一般解」になる (一般解とは、その微分方程式の全ての解を含むように一般的に表した式のことである)。最後に、初期条件を満たすように、線型結合の係数を決めてつじつまをあわせる。こういうやりかたを「演算子法」と呼ぶ。

このやり方の「キモ」は、方程式の解を線型結合 (重ね合わせ) する、ということにある。つまり、この方程式が内在していた「解の線型結合も解である」という性質、つまりこの方程式が線型同次であることを、最大

限に活用したのだ。

演算子の計算には、以下のルールを設ける：

- 分配法則が成り立つ。
- 結合法則が成り立つ。
- 交換法則は (必ずしも) 成り立たない。

例えば式 (20.14) は分配法則を (逆向きに) 使ったものだし、式 (20.15) から式 (20.16) を切り出したのは、結合法則による。一方で、演算子はその右側にある関数や演算子に作用すると考えるので、式 (20.16) を

$$x\left(\frac{d}{dt} + 1\right) = 0 \quad (20.25)$$

のように書いてはいけない (交換法則を認めない)。

ここで、演算子を因数分解する手順をもう少し詳しく説明しておく。まず、演算子の中の、 d/dt という部分を形式的に λ という変数に置き換えてみる。例えば、式 (20.14) では、

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad (20.26)$$

となる。この式を、 λ に関する代数方程式 (2 次方程式) とみなして、普通に (中学校数学で) 因数分解する：

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \quad (20.27)$$

この式の λ を d/dt に戻せば、演算子の因数分解のできあがりである。式 (20.26) のような式、つまり d/dt を λ に置き換えてできる代数方程式を、その線型同次微分方程式の「特性方程式」という。

問 592 例 17.1 を解析的に解いてみよう。

(1)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (20.28)$$

とすると、微分方程式 (17.31) は以下のように書き換えられることを示せ：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0 \quad (20.29)$$

(2) 式 (20.29) の解の集合は線型空間になることを示せ。

(3) さらに、この微分方程式は、形式的には以下のように

に書き換えられることを示せ：

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right)x = 0 \quad (20.30)$$

(4) さらに、特性方程式を考えて、それを因数分解することで、式 (20.30) は、形式的には以下のように書き換えられることを示せ (i は虚数単位)：

$$\left(\frac{d}{dt} - i\omega_0\right)\left(\frac{d}{dt} + i\omega_0\right)x = 0 \quad (20.31)$$

(5) a_1, a_2 を任意の複素数として、以下のような一般解を導け：

$$x = a_1e^{i\omega_0t} + a_2e^{-i\omega_0t} \quad (20.32)$$

(6) 初期条件を「 $t = 0$ で $x = x_0, v = v_0$ 」とする。以下を示せ：

$$x_0 = a_1 + a_2 \quad (20.33)$$

$$v_0 = i\omega_0(a_1 - a_2) \quad (20.34)$$

(7) 上の 2 つの式を、 a_1, a_2 に関する連立方程式とみて、次式を導け：

$$a_1 = \left(x_0 + \frac{v_0}{i\omega_0}\right)/2 \quad (20.35)$$

$$a_2 = \left(x_0 - \frac{v_0}{i\omega_0}\right)/2 \quad (20.36)$$

(8) この結果を使って、式 (20.32) から次式を導け。ヒント：オイラーの公式。

$$x = x_0 \cos \omega_0t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0t \quad (20.37)$$

(9) 上の式は、適当な実数 a, δ によって、

$$x = a \sin(\omega_0t + \delta) \quad (20.38)$$

と変形できることを示せ。

このように、演算子の因数分解で虚数が出てくる場合は、オイラーの公式が活躍して、三角関数が現れるのだ。最終的な解は実数であっても、解法の途中で複素数を考えることが有用なのだ。

問 593 演算子法を用いて、P.25 の問 549(3) を解析的に解いてみよう。

(1) 解くべき方程式は、次式のようになることを示せ (以後、単位は省略する)：

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2x = 0 \quad (20.39)$$

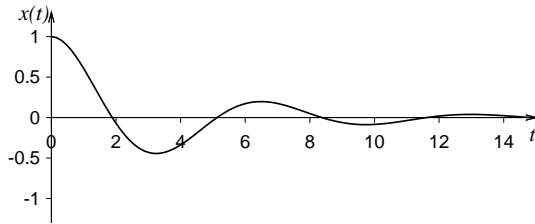


図 20.2 式 (20.42) のグラフ。図 17.10 と比較せよ。

初期条件: $t = 0$ で $x = 1$, $dx/dt = 0$

- (2) この方程式を演算子法で解き、以下の一般解を得よ。
ただし、 a_1, a_2 は任意の複素数とする。

$$x(t) = a_1 \exp\left(\frac{-1 + \sqrt{15}i}{4}t\right) + a_2 \exp\left(\frac{-1 - \sqrt{15}i}{4}t\right) \quad (20.40)$$

- (3) これを変形すると次式のようにすることを示せ:

$$x(t) = e^{-t/4} \left\{ a_1 \exp\left(\frac{\sqrt{15}i}{4}t\right) + a_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{15}i}{4}t\right) \right\} \quad (20.41)$$

- (4) 初期条件を用いて、 a_1, a_2 の値を決め、次式を示せ:

$$x(t) = e^{-t/4} \left(\cos \frac{\sqrt{15}}{4}t + \frac{1}{\sqrt{15}} \sin \frac{\sqrt{15}}{4}t \right) \quad (20.42)$$

- (5) 表計算ソフトを用いて、この解を、問 549(3) で得た数値解といっしょにグラフに描け。

問 594 3 種類の化学物質 A, B, C について、以下のような化学反応が、一方向にのみ進むとする:



A \longrightarrow B の速度定数を k_1 , B \longrightarrow C の速度定数を k_2 とする。

- (1) 次式が成り立つことを示せ:

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A] \quad (20.44)$$

$$\frac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_2[B] \quad (20.45)$$

$$\frac{d[C]}{dt} = k_2[B] \quad (20.46)$$

- (2) 前小問をもとに、次式が成り立つことを示せ:

$$\frac{d^2[B]}{dt^2} + (k_1 + k_2) \frac{d[B]}{dt} + k_1 k_2 [B] = 0 \quad (20.47)$$

- (3) 前小問をもとに、次式が成り立つことを示せ:

$$\left(\frac{d}{dt} + k_1\right) \left(\frac{d}{dt} + k_2\right) [B] = 0 \quad (20.48)$$

- (4) a, b を適当な定数として、次式が成り立つことを示せ:

$$[B] = ae^{-k_1 t} + be^{-k_2 t} \quad (20.49)$$

- (5) $t = 0$ のとき、 $[A] = A_0$, $[B] = 0$ だとすると、次式が成り立つことを示せ:

$$[B] = \frac{k_1 A_0}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \quad (20.50)$$

このように、一次反応の連鎖によって生じる化学反応は、線型同次微分方程式によって表現でき、物質量の時間変化を解析的に解くことができる。ちなみに、二次反応やそれ以上の次数の反応については、このように話がうまくいくとは限らない。

20.4 常微分方程式と偏微分方程式

ところで、これまで微分方程式といえば、ロジスティック方程式や、式 (20.4) や式 (20.11) のように、ひとつの独立変数に関する微分しか含まない微分方程式を扱ってきた。そのような微分方程式を常微分方程式と呼ぶ。力学の基本法則である、ニュートンの運動方程式 (17.28) も、時刻 t という独立変数に関する微分だけを含むので、常微分方程式である*6。

問 595 常微分方程式とは何か?

ある常微分方程式が線型同次微分方程式でもあるとき、その方程式を「線型同次常微分方程式」と呼ぶ。式 (20.4) や式 (20.11) は線型同次常微分方程式である。

*6 ニュートンの運動方程式は、物体の位置 $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t))$ に関する方程式なので、 $x(t), y(t), z(t)$ という 3 つの関数 (座標成分) に関する常微分方程式 (連立常微分方程式) である。3 つの関数のいずれもが、独立変数としては t しか持たない (x, y, z は従属変数である)。同様に、ロトカ・ヴォルテラ方程式も、連立常微分方程式である。

一方、世の中には、複数の独立変数に関する微分 (偏微分) を含む微分方程式もある。そのような微分方程式を、偏微分方程式と呼ぶ。その場合、関数は複数の独立変数を持つ「多変数関数」であり、個々の独立変数に関する微分は偏微分になる*7。

偏微分方程式は、実用上、極めて重要である。電磁気学や量子力学の基本法則は偏微分方程式 (マクスウェル方程式・シュレーディンガー方程式) であらわされる。それらのことはおいおい学ぶとして、ここでは、シンプルだが実用上も重要な偏微分方程式である、「ラプラス方程式」を学ぼう*8。

2 変数関数 $f(x, y)$ に関する以下の偏微分方程式を 2 次元ラプラス方程式と呼ぶ:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (20.51)$$

また、3 変数関数 $f(x, y, z)$ に関する以下の偏微分方程式を 3 次元ラプラス方程式と呼ぶ:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (20.52)$$

要するに、ラプラス方程式とは、各独立変数による 2 階偏微分を全部足したら 0 になる、という偏微分方程式である。覚えているだろうか? 諸君は既に数学リメディアル教材の最終章で、ラプラス方程式とその解を体験している。

問 596 偏微分方程式とは何か?

問 597 以下の $f(x, y)$ が、それぞれ、2 次元ラプラス方程式 (20.51) を満たすことを示せ。

- (1) $f(x, y) = x^2 - y^2$
 - (2) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
- (ただし $(x, y) \neq (0, 0)$ とする)

問 598 次の 3 変数関数 $f(x, y, z)$ は、3 次元ラプラ

ス方程式 (20.52) を満たすことを示せ。

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (20.53)$$

(ただし $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ とする)

このように、ラプラス方程式にはたくさんの解がある。そして、次の問でわかるように、ラプラス方程式の解は、スカラー倍しても解であるし、足し算しても解である。つまり、ラプラス方程式の解の集合は線型空間になる。つまり、ラプラス方程式は、線型同次方程式でもある。このように、ある偏微分方程式が線型同次方程式でもあるとき、その方程式を「線型同次偏微分方程式」と呼ぶ。

問 599 2 次元ラプラス方程式 (20.51) を満たすような 2 変数関数 $f(x, y)$ の集合を X とする。

- (1) $f_1(x, y) \in X$ とする。つまり $f = f_1(x, y)$ は式 (20.51) を満たすとする。このとき、 α を任意の実数として、 $f = \alpha f_1(x, y)$ も式 (20.51) を満たすことを示せ。
- (2) $f_1(x, y), f_2(x, y) \in X$ とする。つまり $f = f_1(x, y)$ と $f = f_2(x, y)$ は両方とも式 (20.51) を満たすとする。このとき、 $f = f_1(x, y) + f_2(x, y)$ も式 (20.51) を満たすことを示せ。
- (3) X は線型空間であることを示せ。

ラプラス方程式は、実用的にも重要な方程式である。

例 20.4 物理学実験のテーマ II-1 「定常電流の作る電場」で現れる、アナライザー・ペーパー (表面に電気抵抗物質が塗られている紙) の上の電位 ϕ の分布は、実は、ラプラス方程式に従う (その理由はここでは述べない):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (20.54)$$

実際、「物理学実験 1 テキスト」P.44 式 (8) には、アナライザー・ペーパー上の 1 点のピン電極から円形電極に向かって電流 I が流れる場合、

$$\phi = \frac{\rho_s I}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r} \quad (20.55)$$

となる、とされているが (ρ_s は面積抵抗率、 r は電極からの距離、 r_0 は円形電極の半径)、これは式 (20.54) の解になっていることを確認してみよう。

*7 「解析力学」という物理学を学べば、ニュートンの運動方程式は偏微分方程式に書き換えられ、より一般的になることがわかるだろう。

*8 ラプラス (Pierre-Simon Laplace) は、18-19 世紀のフランスの数学者。

まず、式 (20.55) で、電極が原点にあるとすれば、原点から点 (x, y) までの距離 r は、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (20.56)$$

と書ける。

問 600 この例 20.4 について、

- (1) 式 (20.56) を式 (20.55) に代入すると次式になることを示せ。

$$\phi = -\frac{\rho_s I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) + \frac{\rho_s I}{2\pi} \ln r_0 \quad (20.57)$$

- (2) 式 (20.57) は式 (20.54) を満たすことを示せ。ヒント: 式 (20.57) を式 (20.54) の左辺に代入して、それが恒等的に 0 になることを示せばよい。

20.5 重ね合わせの原理

ところで、問 599 で見たように、ラプラス方程式の解の集合は線型空間になる。従って、ラプラス方程式の解は、線型結合、つまり「重ね合わせ」ができる。例 20.4 で述べたように、アナライザー・ペーパーを電流が流れるときの電位分布もラプラス方程式の解になるから、「重ね合わせ」ができる。つまり、アナライザー・ペーパー上に電極が複数個あるときの電位分布は、個々の電極が単独で存在する時の電位分布を足し合わせ（重ね合わせ）たものになる。それが、物理学実験 I テキスト P.46 の実験 (4) である。

このような状況は、物理学では頻繁に出てくるので、特別な名前がついている：

重ね合わせの原理

基本法則が線型同次微分方程式で記述される現象は、いくつかの現象の重ね合わせ（線型結合）も実現可能な現象であるし、ひとつの現象をいくつかの現象の重ね合わせとして表現することもできる。

この「原理」は、論理的に考えれば、線型同次微分方程式の定義を言い換えただけであり、何か新しいことを言っているわけではない。線型同次微分方程式が通用する現象が世の中にあまりにも多いことと、「解の重ね合わせ」という観点があまりにも便利で強力であることを強調する教訓のようなものである。諸君は、どんな問題でも、「もしかして重ね合わせの原理が使えるかもしれ

ない」という目を持って取り組むべきである。本書の後の方でも、波や拡散現象、量子力学、電磁気学などで、重ね合わせの原理が成り立ち、それらが大活躍する様子を学ぶ。

例 20.5 線型同次微分方程式を解析的に解く時には、ほとんど全ての場合において重ね合わせの原理を使う。例えば、式 (20.23) と初期条件から式 (20.24) を導いた過程がそうである。

例 20.6 高校物理で学んだ「波の回折」は、「波は、たくさんの点状の波源から出る球面波の重ね合わせで表現できる」という「ホイヘンスの原理」の帰結である。この原理は、波に関する重ね合わせの原理そのものである。

線型同次微分方程式は、物理学だけでなく、化学・生物学・経済学等にも、頻繁に現れる。そして、そこで使われる数学的手法は同じである。

どんなに複雑な現象であっても、それを記述する微分方程式が線型同次微分方程式であれば、重ね合わせの原理が効くので、複雑な状況をいくつかのシンプルな状況に分解し、それぞれのシンプルな状況について方程式を解いて、それを重ね合わせて複雑な状況を解析することができる^{*9}。これは、諸君が高校数学で平面や空間のベクトルの問題をいろいろ考えるとき、いくつかの特定の方向のベクトルに分解して、それらの重ね合わせとして考えたことによく似ている。というか、本質的には同じことなのである。

問 601 重ね合わせの原理とは何か？

問 602 上述した実例以外で、重ね合わせの原理が出てくる実例を見つけて、説明せよ。

^{*9} 例えばフーリエ変換という手法は、現象を三角関数（正弦波）の重ね合わせで表現する。

演習問題

演習問題 2 微分方程式 (17.33) を考える。式 (20.28) で定義される ω_0 と、次式:

$$\alpha = \frac{\gamma}{2m} \quad (20.58)$$

で定義される α を使うと、式 (17.33) は以下のように書き換えられる:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (20.59)$$

- (1) この微分方程式を演算子法によって解け。それによって得られる 2 つの解を $x_1(t)$, $x_2(t)$ とする。
- (2) $\alpha \geq \omega_0$ のとき, $x_1(t)$, $x_2(t)$ はともに, t が大きくなるにつれて 0 に単調に (つまり振動せずに) 近づくことを示せ。
- (3) $\alpha < \omega_0$ のとき, $x_1(t)$, $x_2(t)$ はともに, 振動しながら 0 に近づくことを示せ。

演習問題 3 (発展) ロジスティック方程式 (17.6) が、線型同次微分方程式でないことを数値的に示そう。もし仮に線型同次微分方程式ならば、解のスカラー倍も解のはずだ。ならば、 $\alpha = 1.0$, $\beta = 0.005$ とし、 $N(0) = 20$ とし、この方程式を数値的に解けば、その解は、問 533(3) のちょうど 2 倍になるはずだ。そうなるかどうか、試してみよ。

演習問題 4 (発展) 式 (20.13) を、演算子法ではないやり方で解析的に解いてみよう。

- (1) $x'(t)$ を $y(t)$ と書くことにすると、式 (20.13) は、以下のような連立微分方程式に書き換えられることを示せ:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = y(t) + 2x(t) \end{cases} \quad (20.60)$$

- (2) 式 (20.60) は次式のように書き換えられることを示せ:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (20.61)$$

- (3) 式 (20.61) の右辺に現れた行列を A とする。行列 A の特性方程式^{*10}は、線型同次微分方程式 (20.13)

の特性方程式、つまり、式 (20.26) に一致することを示せ。つまり、これらの 2 つの「特性方程式」という言葉は、定義こそまったく違うものの、同じような実体を持っているのだ。

- (4) 行列 A を対角化せよ。すなわち、2 つの定数 λ_1, λ_2 と、適当な 2 次正方行列 P によって、

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (20.62)$$

となることを示せ (λ_1, λ_2, P を具体的に求めよ)。

- (5) すると、式 (20.61) は次式のようにできることを示せ:

$$\frac{d}{dt} P^{-1} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (20.63)$$

ヒント: まず、式 (20.62) を $A =$ の形に変形する (両辺の左から P を、右から P^{-1} を、それぞれ掛ければよい)。その A の式で、式 (20.61) の右辺の行列を置き換える。そうやってできた式の左から P^{-1} を掛ければよい。

- (6) ここで、

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (20.64)$$

とすると、次式が成り立つことを示せ。

$$\begin{cases} X'(t) = \lambda_1 X(t) \\ Y'(t) = \lambda_2 Y(t) \end{cases} \quad (20.65)$$

- (7) 上の式を解いて、 $X(t), Y(t)$ を t の関数として具体的に求めよ。このとき、 $X(t), Y(t)$ のそれぞれに任意の定数が 1 つずつ残ることに注意せよ。
- (8) 式 (20.64) を逆に解いて、 $x(t)$ を求めよ。このとき、前小問で出た 2 つの任意定数を残しておくこと。
- (9) 初期条件: $x(0) = 5$ かつ $x'(0) = -2$ を用いて、2 つの任意定数の値を定め、解を確定せよ。

一問一答

- 定義ってほんまに大事なやつて実感しました。... それ、これからどんどん身に染みてくるよ。
- どんなものもベクトルのような気がしてきました。価値観が変わりました。

*10 行列の特性方程式の定義を忘れた人は、リメディアル教材を参

照せよ。

... ベクトルではないものもたくさんあります。でも、価値観というか世界観は変わるよね。

- 関数まであらわせるなんてベクトルすごい!!!
... 関数をベクトルとして扱うことで、人類は新たな広大な数学の世界を拓いたのです。
- 印刷の X 等が太字かどうかよく見えないのですが
... 太字は立体でもあります。斜体なのはたいてい細字。 X と X , x と x など。
- 集合は抽象的で難しいけれど、一つ一つ具体的に考えれば分かりそうだと思います。
... 例を考えることは、効果的な勉強法です。
- ここで行列が出てくるとは思いませんでした。行列は何者ですか?
... 行列の底力は、計りしれないものがあります。

20.6 解答

答 587 式 (20.1) の解の集合を X とする。 $(x_1, y_1, z_1) \in X$, $(x_2, y_2, z_2) \in X$ とする。すなわち,

$$x_1 + 2y_1 + z_1 = 0 \quad (20.66)$$

$$x_1 + y_1 - z_1 = 0 \quad (20.67)$$

$$x_2 + 2y_2 + z_2 = 0 \quad (20.68)$$

$$x_2 + y_2 - z_2 = 0 \quad (20.69)$$

とする。まず、任意のスカラー α について、 $\alpha(x_1, y_1, z_1)$, すなわち $(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ を考える。これを式 (20.1) の 2 つの式のそれぞれ左辺に代入すると,

$$\alpha x_1 + 2\alpha y_1 + \alpha z_1 = \alpha(x_1 + 2y_1 + z_1) = 0$$

$$\alpha x_1 + \alpha y_1 - \alpha z_1 = \alpha(x_1 + y_1 - z_1) = 0$$

となり、式 (20.1) を満たすことがわかる。従って、 $\alpha(x_1, y_1, z_1) \in X$ 。

次に、 $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$, すなわち $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ を考える。これを式 (20.1) の 2 つの式のそれぞれ左辺に代入すると,

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \\ = (x_1 + 2y_1 + z_1) + (x_2 + 2y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) \\ = (x_1 + y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 - z_2) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

となり、式 (20.1) を満たすことがわかる。従って、 $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in X$ 。従って、 X は線型空間の 2 つの条件 (式 (19.1), 式 (19.2)) を満たすため、線型空間である。従って、式 (20.1) は線型同次方程式。■

答 588 もしこの方程式が線型なら、そのような解どうしの和も解になるはずである。ところが、 $(2, 0, -4)$ と $(1, 0, -1)$ はともにこの方程式の解だが、これらの和、すなわち $(3, 0, -5)$ をこの方程式の左辺に代入すると、 $3^2 + 0^2 - 5 = 4$ となり、0 にならない。つまりこの方程式の解にならない (反例)。■

答 589 式 (20.11) の解の集合を X とする。 $x_1(t)$, $x_2(t) \in X$ とする (以後、 (t) は省略する)。すなわち,

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{dx_1}{dt} - 2x_1 = 0 \quad (20.70)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{dx_2}{dt} - 2x_2 = 0 \quad (20.71)$$

とする。 α を任意のスカラーとして、 $x = \alpha x_1$ を式

(20.11) の左辺に代入すると,

$$\frac{d^2(\alpha x_1)}{dt^2} - \frac{d(\alpha x_1)}{dt} - 2(\alpha x_1) = \alpha \left\{ \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{dx_1}{dt} - 2x_1 \right\}$$

となる。式 (20.70) より、上の式の右辺は $\alpha \times 0$, すなわち 0 となる。従って αx_1 は式 (20.11) の解である。また、 $x = x_1 + x_2$ として、 $x = \alpha x_1$ を式 (20.11) の左辺に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} - \frac{d(x_1 + x_2)}{dt} - 2(x_1 + x_2) \\ = \left\{ \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{dx_1}{dt} - 2x_1 \right\} + \left\{ \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{dx_2}{dt} - 2x_2 \right\} \end{aligned}$$

となる。式 (20.70), 式 (20.71) より、上の式の右辺は $0 + 0$, すなわち 0 となる。従って $x_1 + x_2$ は式 (20.11) の解である。従って、 X は線型空間の 2 つの条件を満たすので、 X は線型空間。従って与式は線型同次微分方程式。■

答 590 略。

答 591

- (1) 略 (変数分離法で解けばよい)。
- (2) 略 (変数分離法で解けばよい)。
- (3) 略 (式 (20.23) を式 (20.13) の左辺に代入して、 $= 0$ となることを確認すればよい)。
- (4) $t = 0$ のとき $x = 5$ より、 $5 = a_1 + a_2$ 。 $t = 0$ のとき $dx/dt = -2$ より、 $-2 = -a_1 + 2a_2$ 。これらから、 $a_1 = 4, a_2 = 1$ 。これを式 (20.23) に代入して与式を得る。

答 592

- (1) 略。
- (2) 略。
- (3) 略。
- (4) 略。
- (5) 式 (20.31) は、以下の 2 つの微分方程式と同じである:

$$\left(\frac{d}{dt} - i\omega_0 \right) x = 0, \quad \left(\frac{d}{dt} + i\omega_0 \right) x = 0$$

この 2 つの微分方程式のうち左側について、変数分離すると,

$$\frac{dx}{x} = i\omega_0 dt$$

両辺積分して、 $x_1 = a_1 e^{i\omega_0 t}$ を得る。同様に、右の微分方程式について、 $x_2 = a_2 e^{-i\omega_0 t}$ を得る。与えられた方程式の解は線型空間をなすから、ここで得た解の線型結合も解である。従って、

$$x = a_1 e^{i\omega_0 t} + a_2 e^{-i\omega_0 t}$$

(6) 略。

(7) 略。

(8) 略。

(9) $a = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}$ とし、また、 $\sin \delta = x_0/a$, $\cos \delta = v_0/(a\omega_0)$ となるように δ を選べば、与式のようになる (三角関数の合成)。

答 593 略。

答 594

(1) $A \rightarrow B$ の反応速度は、 A の量に比例する。その比例係数を k_1 とすると、式 (20.44) が成り立つ*11。 $B \rightarrow C$ の反応では、 B の量 (つまり $[B]$) に比例する速度で C が生成され、その比例係数は k_2 であるから、式 (20.46) が成り立つ。さて、 B は $k_2[B]$ という速度で C に変化する (そのぶん $[B]$ は減っていく) が、一方で、 A が $k_1[A]$ という速度で B に変化する (そのぶん $[B]$ は増えていく)。これらを合わせて考えれば、式 (20.45) が成り立つ。

(2) 略解: 式 (20.45) の両辺を t で微分すると、次式になる:

$$\frac{d^2[B]}{dt^2} = k_1 \frac{d[A]}{dt} - k_2 \frac{d[B]}{dt}$$

この式の、右辺第 1 項の $d[A]/dt$ を、式 (20.44) で置き換えると、

$$\frac{d^2[B]}{dt^2} = -k_1^2[A] - k_2 \frac{d[B]}{dt}$$

この式の、右辺第 1 項の $[A]$ を、式 (20.45) で消去すると、

$$\frac{d^2[B]}{dt^2} = -k_1 \left(\frac{d[B]}{dt} + k_2[B] \right) - k_2 \frac{d[B]}{dt}$$

これを整理すると、式 (20.47) を得る。

(3) 略 (式 (20.47) に演算子法の考え方を適用する。)

(4) 略 (演算子法)

(5) 式 (20.49) において、 $t = 0$ とすると、 $[B](0) = a + b$ 。

ところが、 $[B](0) = 0$ だから、 $a + b = 0$ 。従って、 $b = -a$ 。従って、式 (20.49) は、

$$[B] = a(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \quad (20.72)$$

となる。この両辺を t で微分すると、

$$\frac{d[B]}{dt} = a(-k_1 e^{-k_1 t} + k_2 e^{-k_2 t}) \quad (20.73)$$

この式に $t = 0$ を代入すると、 $t = 0$ で $d[B]/dt = a(-k_1 + k_2)$ となる。ところが、式 (20.45) より、 $t = 0$ のときは $d[B]/dt = k_1 A_0$ であるから、結局、 $t = 0$ で $d[B]/dt = a(-k_1 + k_2) = k_1 A_0$ となる。従って、

$$a = \frac{k_1 A_0}{k_2 - k_1}$$

となる。これを式 (20.72) に代入して、式 (20.50) を得る。

答 595 略。

答 596 略。

答 597

(1)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \quad (20.74)$$

よって、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (20.75)$$

(2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (20.76)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (20.77)$$

よって、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 + 4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad (20.78)$$

*11 これがわからない人は「数学リメディアル教材」の第 6 章の中の「化学反応速度論」の節を復習せよ。

答 598

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} + \frac{3x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5}$$

同様に,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} + \frac{3y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{-1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} + \frac{3z^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5}$$

従って,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= \frac{-3}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} + \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5} = 0 \end{aligned}$$

答 599

(1) $f_1(x, y) \in X$ とする。すなわち,

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0$$

である。すると,

$$\frac{\partial^2(\alpha f_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\alpha f_1)}{\partial y^2} = \alpha \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \right) = 0$$

である。従って, $\alpha f_1(x, y) \in X$ 。(2) $f_1(x, y) \in X$ かつ $f_2(x, y) \in X$, すなわち,

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = 0$$

とする。すると,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2(f_1 + f_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(f_1 + f_2)}{\partial y^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。従って, $f_1(x, y) + f_2(x, y) \in X$ 。(3) (1) と (2) より, X は線型空間の 2 つの条件を満たす。従って X は線型空間。 ■

答 600~2 略。

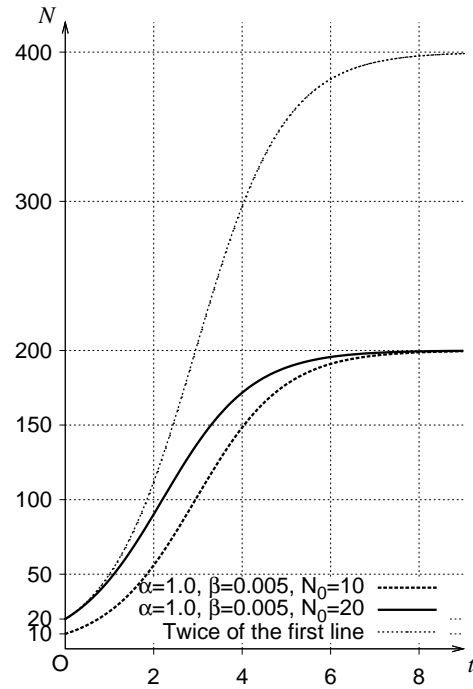
答 3 (発展) $N_0 = 20$ のときの解は, 図 20.3 の実線のようにになる。一方, $N_0 = 10$ のときの解 (図 20.3 の太い

図 20.3 ロジスティック方程式の解 (薄い点線以外)。

点線) を 2 倍したものは, 図 20.3 の細い点線のようにになる。もしロジスティック方程式が線型同次微分方程式なら, 実線と細い点線は一致するはずだが, 見て明らかのように, 実際は一致しない。従ってロジスティック方程式は線型同次微分方程式ではない。 ■

第21章

線型代数3: 線型写像と線型微分演算子

線型代数の舞台は線型空間だが、そこで活躍する主役は2つ: ひとつはベクトル, もうひとつは本章で学ぶ「線型写像」という概念である。線型写像はシンプルな概念だが、とても適用範囲が広い。微分や積分までもが線型写像とみなされてしまうのだ。それは、ベクトルの数学を、微分積分と融合するという離れ業をやっているのだ。

21.1 写像

ふたつの集合について、片方の集合(ここでは集合 X と呼ぼう)のそれぞれの要素に、もう片方の集合(ここでは集合 Y と呼ぼう)の要素をひとつずつ対応させるような対応関係のことを、「集合 X から集合 Y への写像(mapping)」という。

例 21.1 学食のメニュー(かつどん, ざるそば, 等)には、それぞれ整数(円)で値段がついている。この場合、「学食の値段」とは、「学食の全てのメニューからなる集合」から「整数の集合」への写像である。(例おわり)

例 21.2 諸君は、それぞれ、出身高校を持っている。この場合、「出身高校」とは、「筑波大学生物資源学類の学生からなる集合」から「世の中の全ての高校の集合」への写像である。(例おわり)

ここで、注意してほしいのだが、「集合 X から集合 Y への写像」というとき、集合 X の要素にはかならず集合 Y の要素がどれか対応しなければならないが、その逆、つまり集合 Y の要素にはかならずしも集合 X の要素は対応していなくてもよいのだ^{*1}。

例 21.3 例 21.1 の続きを考える。学食では、かつどんは 400 円, ざるそばは 300 円, というように、全てのメ

ニューに整数(値段)がついていなければならないけど、「-300 円」とか「1 億円」などという値段のメニューは、学食にはふつう、存在しない。(例おわり)

例 21.4 例 21.2 の続きを考える。筑波大学生物資源学類に卒業生を輩出していない高校も世の中にたくさんある。(例おわり)

もうひとつ注意してほしいのは、「集合 X から集合 Y への写像」というとき、集合 X の要素に対応する集合 Y の要素は、必ず「ひとつだけ」でなくてはならない。

例 21.5 例 21.3 の続きを考える。ざるそばの値段が 300 円と 400 円という 2 つのケースがある、というのはダメである。商売としてダメというのではなく、「写像」という数学的な考え方に乗らないという意味でダメ。(例おわり)

一方、集合 Y の要素に対応する集合 X の要素は、複数あってもかまわない^{*2}。ざるそばとざるうどんが同じ値段 300 円であってもかまわないし、同じ高校を卒業した複数の学生がこの学類に入学する、ということはよくある。

「集合 X から集合 Y への写像」というときの「集合 Y 」が数(整数, 実数, 複素数などなど)の集合であるような場合、写像と言わずに「関数」と言うこともある。つまり、関数は写像の一種である。行き先が数であるような写像を関数と言うのだ。上の例 21.1 では、「学食の値段」は関数と言えるが、例 21.2 の「出身高校」は関数とは言えない。

問 603 写像とは何か?

^{*1} 集合 Y のどの要素にも集合 X の要素が対応しているような写像を「全射」と呼ぶ。

^{*2} 集合 Y の要素に対応する集合 X の要素が複数存在することがないような写像を「単射」と呼ぶ。

問 604 関数とは何か?

さて、「ある写像 f は、集合 X から集合 Y への写像である」ということを、

$$f: X \rightarrow Y \quad (21.1)$$

と書く*3。上の例 21.1・例 21.2 では、

学食の値段: 学食の全メニュー $\rightarrow \mathbb{Z}$

出身高校: 生物資源学類の全学生 \rightarrow 世の中の全高校

となる。ただし、実際のところ、写像の名前は、「学食の値段」とか「出身高校」というようなものではなく、 f とか g とか、アルファベットなどを使って、もったいぶって書くことが多い。しかしそのような場合は、

$$f: X \rightarrow Y$$

と書いたところで、具体的にどういうルールで X の要素に Y の要素を対応させるかがわかりづらくなってしまふ。そこで、具体的な対応のルールを以下のように書く:

$$f: x \mapsto y \quad (21.2)$$

ここで x は X の要素であり、 y は Y の要素である。例えば、「学食の値段」という写像を f と呼ぶならば、

$$f: \text{学食のメニューのどれか} \mapsto \text{そのメニューの値段}$$

であるし、「出身高校」という写像を g と呼ぶならば、

$$g: \text{生物資源学類学生のどれか} \mapsto \text{その学生の出身高校}$$

である。

このような対応関係は、具体的に以下のように書くこともある*4:

$$f(\text{かつどん}) = 400$$

$$g(\text{桜木花道}) = \text{湘北高校}$$

ここで注意して欲しいのだが、「写像」といったとき、要素どうしの対応関係には、何らかのわかりやすいルール(必然性)は、必ずしも必要ではない。ルールはどうであれ、対応しさえすれば写像なのだ。その具体的な対応関係が、その写像の定義なのだ。

例 21.6 例 21.1 のように、学食のメニューに「円単位で

の値段」というルールでひとつずつ数字(整数)を対応づけることができ、それは立派に写像となるのだが、それ以外にも、「かつどんは -20 」「ざるそばは 5163 」というように、勝手にテキトーに数字を対応させても、それは写像と言ってよいのだ(ただし、いったん決めた対応関係を変えてはならない)。(例おわり)

よくある質問 \rightarrow と \mapsto の違いは何ですか? ... テキストをよく読んで下さい。 \rightarrow は集合どうしの対応関係を、 \mapsto は要素どうしの具体的な対応関係を表す記号です。

さて、本章の冒頭で述べたように、数学の様々な概念は、ここで学んだ集合と写像の考え方を使って表現し、取り扱うことができる。

例 21.7 足し算という概念は、「2つの実数」に「ひとつの実数」を対応させる対応関係(写像)である。「2つの実数のペア」からなる集合は、 \mathbb{R}^2 である*5から、結局、「足し算」とは \mathbb{R}^2 から \mathbb{R} への写像である。この写像を f と書くと、

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (21.3)$$

であり、

$$f: (x, y) \mapsto x + y \quad (21.4)$$

であり、

$$f(x, y) = x + y \quad (21.5)$$

である。(例おわり)

例 21.8 「3次元の数ベクトルの内積」という概念は、「2つの(3次元)数ベクトル」に「ひとつの実数」を対応させる写像である。「2つの(3次元)数ベクトルのペア」からなる集合は、 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ であるから*6、この写像を f と書くと、

$$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (21.6)$$

*3 “.”は「コロン」と読む。ついでに言えば，“;”は「セミコロン」と読む。

*4 この「桜木花道」は架空の生物資源学類生であり、「湘北高校」は架空の高校である。

*5 \mathbb{R}^2 は \mathbb{R} と \mathbb{R} の直積。要するに2つの実数の組からなる集合。わからない人は数学リメディアル教材で「直積」を復習せよ!

*6 これを \mathbb{R}^6 と考えても構わない。ただし、「数字が3つ並んだものの2つのペア」と「数字が6つ並んだもの」の間には、感覚的な違いがある(数学的には違いは無いが)。なので、その感覚を表現したいときは、 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ と書くほうがわかりやすい。

であり,

$$f : ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \mapsto x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \quad (21.7)$$

であり,

$$f((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \quad (21.8)$$

である。(例おわり)

このように、集合と写像という考え方は、非常に柔軟であり、どのような数学的な論理も、たいてい、これらの考え方で厳密に記述できる。従って、数学をきちんと学ぶには、集合と写像の考え方によく慣れて、用語や記号をきちんと習得せねばならない。

21.2 線型写像

次に、線型写像という概念を学ぼう。

集合 X から集合 W への写像 f を考える:

$$f : X \rightarrow W \quad (21.9)$$

次の 2 つの式が両方とも成り立つ場合、 f を 線型写像 と呼ぶ:

$$\forall \alpha \in K, \forall \mathbf{x} \in X, f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \quad (21.10)$$

$$\forall \mathbf{x}, \forall \mathbf{y} \in X, f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \quad (21.11)$$

ただし、 K は体である。

問 605 線型写像の定義式、つまり式 (21.10) と式 (21.11) のペアを、10 回書いて記憶せよ。

問 606 上の式 (21.10) と式 (21.11) は、以下の式と同値であることを示せ:

$$\forall \alpha, \forall \beta \in K, \forall \mathbf{x}, \forall \mathbf{y} \in X, f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) \quad (21.12)$$

問 606 からわかるように、式 (21.12) を線型写像の定義式としてもよい。つまり、「線型結合の写像が、写像の線型結合に等しい」ような写像を線型写像という。「線型結合」を「重ね合わせ」と言い替えれば、「重ね合わせの写像が、写像の重ね合わせに等しい」のが線型写像である。

例 21.9 実数 x に対して $2x$ を与える関数 $f(x) = 2x$ は線型写像である*7。証明: 任意の実数 x, y と任意の実数 α, β について,

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= 2(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha(2x) + \beta(2y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

よって、 $f(x)$ は線型写像の定義式 (21.12) を満たす。■

例 21.10 $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し、数ベクトル $(2, 3)$ との内積を計算する、という操作を f とする。すなわち,

$$f : (x_1, x_2) \mapsto (2, 3) \bullet (x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \quad (21.13)$$

である。例えば,

$$f : (3, 1) \mapsto (2, 3) \bullet (3, 1) = 9 \quad (21.14)$$

となる。この式を次式のようにも書く*8:

$$f((3, 1)) = (2, 3) \bullet (3, 1) = 9 \quad (21.15)$$

当然だが、 f は、 \mathbb{R}^2 から \mathbb{R} への写像である。さて、この f は線型写像であることを示そう:

証明: 任意の $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ と任意の実数 α, β について,

$$\begin{aligned} f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) &= (2, 3) \bullet (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \\ &= (2, 3) \bullet \{(\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta y_1, \beta y_2)\} \\ &= (2, 3) \bullet (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2) \\ &= 2\alpha x_1 + 2\beta y_1 + 3\alpha x_2 + 3\beta y_2 \end{aligned} \quad (21.16)$$

一方,

$$\begin{aligned} f(\alpha \mathbf{x}) + f(\beta \mathbf{y}) &= (2, 3) \bullet \alpha \mathbf{x} + (2, 3) \bullet \beta \mathbf{y} \\ &= (2, 3) \bullet (\alpha x_1, \alpha x_2) + (2, 3) \bullet (\beta y_1, \beta y_2) \\ &= 2\alpha x_1 + 3\alpha x_2 + 2\beta y_1 + 3\beta y_2 \end{aligned} \quad (21.17)$$

式 (21.16) と式 (21.17) は互いに等しいから,

$$f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = f(\alpha \mathbf{x}) + f(\beta \mathbf{y}) \quad (21.18)$$

よって、 f は線型写像の定義式 (21.12) を満たす。■

*7 関数は写像の一種である。写像の行き先が数であるような写像を特に関数と呼ぶのである。

*8 式 (21.15) の左辺で、カッコが 2 重になっていることには意味がある。外側のカッコは、写像の引数がそこに入るのだということを表し、内側のカッコは、2 次元数ベクトルを表すカッコである。

例 21.11 \mathbb{R}^2 から \mathbb{R} へのある写像 g を,

$$g : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2 \quad (21.19)$$

と定義する。言い換えると,

$$g((x_1, x_2)) = x_1 x_2 \quad (21.20)$$

である。例えば,

$$g((3, 4)) = 3 \times 4 = 12 \quad (21.21)$$

である。この g は線型写像だろうか? 例えば,

$$g(2(3, 4)) = g((6, 8)) = 6 \times 8 = 48 \quad (21.22)$$

であるが, もし g が線型写像ならば, 式 (21.10) より,

$$g(2(3, 4)) = 2g((3, 4)) = 2 \times (3 \times 4) = 24 \quad (21.23)$$

となるはずである。式 (21.22), 式 (21.23) は互いに矛盾する。従って, g は線型写像ではない (背理法)。 ■

例 21.12 関数 $f(x)$ に対し, その 3 倍を与える, という写像 F , すなわち

$$F : f(x) \mapsto 3f(x) \quad (21.24)$$

を考える。この式を,

$$F(f(x)) = 3f(x) \quad (21.25)$$

とも書く。さて, F は線型写像であることを示そう:

証明: 2 つの関数 $f(x), g(x)$ と実数 α, β について,

$$\begin{aligned} F(\alpha f(x) + \beta g(x)) &= 3(\alpha f(x) + \beta g(x)) \\ &= \alpha \times 3f(x) + \beta \times 3g(x) \\ &= \alpha F(f(x)) + \beta F(g(x)) \end{aligned}$$

よって, F は線型写像の定義式 (21.12) を満たす。 ■

例 21.9 では特定の「関数」が線型写像かどうかを検討したが, 例 21.12 では, 「関数を関数に写す写像」を考え, それが線型写像であるかどうかを検討した。関数はそれ自身が写像なので, それが線型写像かどうかは, 意味のある問いであり, それが例 21.9 である。ところが, 例 21.12 は, 関数そのものは相手にしない。ある関数を別の関数に写す (対応させる) ような写像を相手にするのだ。例えば $f(x) = x^2$ という関数を例 21.12 のような写像で写すと $3x^2$ という関数になる。 x^2 も $3x^2$ も線型写像ではないが, 「関数を 3 倍する」という, 「関数を関数に写す写像 F 」は線型写像なのである。

例 21.13 \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 への写像

$$F : (x, y) \mapsto (x^2, y)$$

は, 線型写像でない。証明: 線型写像の定義に反する例 (反例) をひとつ挙げればよい。例えば, $\mathbf{x} = (2, 0)$ と $\mathbf{y} = (3, 0)$ について, $\alpha = 1, \beta = 1$ として,

$$f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = f((5, 0)) = (25, 0)$$

だが,

$$\begin{aligned} \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) &= f((2, 0)) + f((3, 0)) \\ &= (4, 0) + (9, 0) = (13, 0) \end{aligned}$$

従って, 線型写像の定義式 (21.12) を満たさない。 ■

問 607 多くの学生さんは, 線型写像と線型空間を混同する。これらはどのように違うか? *9

問 608 \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 への以下の写像 F を考える。以下を示せ:

- (1) $F : (x_1, x_2) \mapsto (2x_1, x_2)$ は線型写像である。
- (2) $F : (x_1, x_2) \mapsto (0, x_2)$ は線型写像である。
- (3) $F : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$ は線型写像である。
- (4) $F : (x_1, x_2) \mapsto (-x_1, x_2)$ は線型写像である。
- (5) $F : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$ は線型写像でない。

例 21.14 何回でも微分可能な実変数関数 $f(x)$ からなる集合を X とする。 $f(x) \in X$ を $f'(x) \in X$ に対応させる写像, 言い替えれば, $f(x)$ を微分するという写像

$$\frac{d}{dx} : f(x) \mapsto f'(x) \quad (21.26)$$

は, X から X への線型写像である。

証明: $f(x), g(x) \in X$ とし, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とすると, 導関数の性質から,

$$\frac{d}{dx} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{d}{dx} f(x) + \beta \frac{d}{dx} g(x)$$

従って, d/dx は線型写像である。*10 ■

*9 線型空間と線型写像を混同してしまう人がたくさんいます。これらは全く違うものです。歴史を学ぶとき, 徳川家康と徳川吉宗を混同するようなもので, お話になりません。

*10 ここで「何回でも微分可能な関数」という条件をつけているのには意味がある。単に「微分可能な関数」という条件にしてみようと, その中には, 1 回しか微分できない関数 (例えば $x < 0$

問 609 何回でも微分できるような関数 $f(x)$ を考える。以下の写像がそれぞれ、線型写像かどうかを判定せよ (理由も述べよ)。

$$(1) F : f(x) \mapsto f(x) + 1 \quad (21.27)$$

$$(2) F : f(x) \mapsto f(x)^2 \quad (21.28)$$

$$(3) F : f(x) \mapsto \frac{d^2}{dx^2} f(x) \quad (21.29)$$

$$(4) F : f(x) \mapsto \left(\frac{d}{dx} f(x) \right)^2 \quad (21.30)$$

問 610 $0 \leq x \leq 1$ で積分できるような関数 $f(x)$ を考える。次式の写像 F は線型写像であることを示せ：

$$F : f(x) \mapsto \int_0^1 f(x) dx \quad (21.31)$$

ここでみたように、関数に対して「定数をかける」「微分する」「積分する」という操作は、線型写像である。高階の微分も線型写像である。しかし、2乗するとか、微分して2乗する、定数を足す、などは線型写像ではない。

ところで、線型写像の定義式 (21.10)(21.11) をじっくりと見ると、例えば式 (21.10) の左辺には、 αx が入っている。つまり X の要素がスカラー倍されている。また、式 (21.11) の左辺には、 $x + y$ が入っている。つまり X の要素が足し算されている。ということは、 X の要素は、スカラー倍や足し算が可能である、ということが暗黙のうちに求められている。つまり、 X は線型空間であることが暗黙のうちに要求されている。同様に、これらの式の右辺を見ると、 W も線型空間であることが要求されている。

すなわち、ある写像が線型写像ならば、それは必然的に、ある線型空間からある線型空間への写像である。つまり、「線型空間から線型空間への写像である」ことは、線型写像であることの必要条件である。そうでないと、式 (21.10) や式 (21.11) が、成り立つかどうか以前に式として無意味になってしまうのだ。

では $f(x) = x^2$, $0 \leq x$ では $f(x) = x^3$ となるような関数 $f(x)$ は、 $x = 0$ では1回しか微分できない) が入り込んでしまう。そのような関数は、1回微分してしまうと、「1回も微分できない関数」になってしまい、もとの「微分可能な関数の集合」のメンバーではなくなってしまう。すると、線型写像の行き先として、別の集合を考えなくてはならなくなってしまう。そのへんを厳密に理論構成するのは面倒だし、いまのところ本質的ではないので、ここでは「何回でも微分可能」という、きつめの条件をつけて、逃げているのだ。

ところが、こうやってしまうと、「線型写像とは線型空間から線型空間への写像のことである」と思ってしまう人がいる^{*11}。それは間違っている。以下に反例を示そう：

例 21.15 \mathbb{R}^2 は線型空間である。しかし、 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ について、

$$f : (x, y) \mapsto (x^2, y^2) \quad (21.32)$$

という写像は、 \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 への写像 (線型空間から線型空間への写像) であるが、線型写像ではない。また、式 (21.30) も、線型空間から線型空間への写像でありながら、線型写像ではない。 ■

ところで、線型写像が、ある集合からその集合自身 (もしくはその部分集合) への写像であるときは、特に「線型変換」と呼ばれる。すなわち、ある線型空間 X, Y について、ある写像：

$$f : X \rightarrow Y \quad (21.33)$$

が線型写像であり、かつ、 $Y \subset X$ であるとき、 f は線型変換という。例えば、上の例 21.9, 例 21.12, 例 21.14 は線型変換だが、例 21.10 は線型変換ではない (線型写像ではある)。

問 611 線型写像ではあるが線型変換ではないような写像の例を、3つ挙げよ (例 21.10 や、その数値だけを変えたもの以外で)。

21.3 線型微分演算子

問 612 関数 $f(x)$ に関して、

$$L : f(x) \mapsto \frac{d^2}{dx^2} f(x) - \frac{d}{dx} f(x) - 2f(x) \quad (21.34)$$

という写像 L を考える。 L は関数を関数に写す線型写像であることを示せ。

式 (21.34) のような写像 L を、形式的に

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} - 2 \quad (21.35)$$

^{*11} そういう人は、必要条件と十分条件と必要十分条件の違いを復習しよう。

と書くと, P.57 式 (20.14) の一部になる。つまり, 上の問題の L は, 式 (20.14) で出てきた「演算子」なのだ。逆に言えば, あの「演算子」は線型写像でもあったのだ。このように, 微分を含み, 関数を関数に写す線型写像を, 線型微分演算子と呼ぶ。

さて, 我々がこれまで出会った線型同次微分方程式は, 線型微分演算子を使って書くことができる。例えば, 式 (20.4) は,

$$\left(\frac{d}{dt} + 1\right)x(t) = 0 \quad (21.36)$$

と書けるし, 式 (20.11) は, 既に見たように

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} - 2\right)x(t) = 0 \quad (21.37)$$

と書けるし, 式 (20.51) は,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x, y) = 0 \quad (21.38)$$

と書ける。いずれも左辺の括弧内を線型微分演算子とみなすことができる。

実は, 線型同次微分方程式はどんなものでも, このような形式に書くことができるのだ。というか, 我々は, 「線型同次微分方程式とは解の集合が線型空間になるような微分方程式である」と学んだが, 実は話は逆で, 本来は, 上で示した例のように, 「線型微分演算子を関数にかけたもの=0」という形式の微分方程式を, 線型同次微分方程式というのだ。

すなわち, 変数 x, y, \dots に関する (偏) 微分を含む線型微分演算子 L と, x, y, \dots を独立変数とする未知関数 $f(x, y, \dots)$ について,

$$Lf(x, y, \dots) = 0 \quad (21.39)$$

という式を, 「線型同次微分方程式」と呼ぶ (再定義)。

問 613 式 (21.39) の解の集合は線型空間であることを示せ。注: 式 (21.39) の L は, 一般的な線型微分演算子である。式 (21.35) の L とは限らない。

21.4 線型微分方程式

さてここで, 線型 非 同次微分方程式というものを定義しよう。線型非同次微分方程式とは, x, y, \dots を独立変数とする未知関数 $f(x, y, \dots)$ について, ある線型微分

演算子 L と, 「恒等的に 0」ではない既知関数 $g(x, y, \dots)$ を用いて,

$$Lf(x, y, \dots) = g(x, y, \dots) \quad (21.40)$$

と書ける方程式のことである (定義)。 $g(x, y, \dots)$ を「非同次項」と呼ぶ^{*12}。非同次項は, その中に f 自体や f の微分などを陽に (explicit に) 含んではならない。

もし g が恒等的に 0 であれば, 式 (21.40) は式 (21.39), つまり線型同次微分方程式になる。線型同次微分方程式と線型非同次微分方程式をあわせて, 線型微分方程式 という。

例 21.16 次の方程式:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \frac{d}{dx}f(x) + 2f(x) = x^2 \quad (21.41)$$

は,

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} + 2 \quad (21.42)$$

$$g(x) = x^2 \quad (21.43)$$

とすれば式 (21.40) の形になる。したがって式 (21.41) は線型非同次微分方程式である。 ■

例 21.17 次の方程式:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \frac{d}{dx}f(x) + 2f(x) = f(x)^2 + 2x \quad (21.44)$$

は, 線型微分方程式でない。なぜか? 右辺は $f(x)$ を含むので非同次項ではない。そこで, 左辺に移行すると

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \frac{d}{dx}f(x) + 2f(x) - f(x)^2 = 2x \quad (21.45)$$

この左辺は線型演算子で書き換えることはできない (f^2 が邪魔)。 ■

例 21.18 次の方程式:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \frac{d}{dx}f(x) + 2f(x) = f(x) + 2x \quad (21.46)$$

は, 線型非同次微分方程式である。というのも, 一見, 右

*12 「同次」を「斉次」と言うこともある。

辺の $f(x)$ が邪魔だが、これを左辺に移行すると

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \frac{d}{dx}f(x) + f(x) = 2x \quad (21.47)$$

となる。この左辺は線型演算子で書き換えることができるし、右辺は x だけの関数 ($f(x)$ を陽に含んでいない) なので非同次項である。 ■

例 21.19 図 21.1 のような電気回路を考える。抵抗 R とコンデンサー C が直列になっており、そこに、時刻 t とともに変動する交流電圧 $V(t)$ がかけられている (丸の中に \sim が書かれた記号は、交流電源を意味する)。「交流」とは何かがわからない人は、自力で調べること。こ

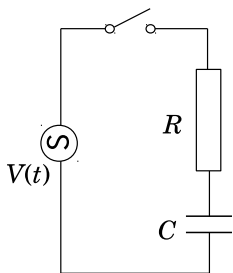


図 21.1 抵抗とコンデンサーからなる交流回路

の回路に流れる電流 $I(t)$ とコンデンサーにたまる電荷 $Q(t)$ を考えよう。これは図 16.2 とよく似た状況であり、式 (16.42) がここでも成り立つ。ただし、今回は電圧が時間に依存する、という点が違う。従って、

$$V(t) = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} \quad (21.48)$$

となる。今、電圧 $V(t)$ は、

$$V(t) = V_0 \sin \omega t \quad (21.49)$$

であるとしよう (V_0 は電圧変動の振幅、 ω は角速度であり、いずれも定数)。式 (16.45) で述べたように、電荷 Q を時刻で微分すると電流 I になることに注意すると、式 (21.48) は、

$$R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = V_0 \sin \omega t \quad (21.50)$$

となる。これは、線型非同次微分方程式である。なぜならば、

$$L = R \frac{d}{dt} + \frac{1}{C} \quad (21.51)$$

$$f = Q(t) \quad (21.52)$$

$$g = V_0 \sin \omega t \quad (21.53)$$

と置けば、式 (21.50) は式 (21.40) の形になるからである (独立変数は t) (例おわり)

問 614

- (1) 線型微分演算子とは何か。
- (2) 線型非同次微分方程式とは何か。
- (3) 線型微分方程式とは何か。

線型非同次微分方程式は、その解の集合は必ずしも線型空間にはならない。例えば、式 (21.41) を考えよう。この方程式に 2 つの解 f_1, f_2 があったとする：

$$\frac{d^2}{dx^2}f_1 - \frac{d}{dx}f_1 + 2f_1 = x^2 \quad (21.54)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f_2 - \frac{d}{dx}f_2 + 2f_2 = x^2 \quad (21.55)$$

式 (21.54) と式 (21.55) の和は、

$$\frac{d^2}{dx^2}(f_1 + f_2) - \frac{d}{dx}(f_1 + f_2) + 2(f_1 + f_2) = 2x^2$$

となる。ところが、もし $f_1 + f_2$ が式 (21.41) を満たすと仮定したら、

$$\frac{d^2}{dx^2}(f_1 + f_2) - \frac{d}{dx}(f_1 + f_2) + 2(f_1 + f_2) = x^2$$

となるはずだ。この 2 つの式を、辺々、引き算すると、

$$0 = x^2 \quad (21.56)$$

となってしまう。これが恒等的に成り立つことはありえない。従って、 $f_1 + f_2$ は式 (21.41) を満たさない (背理法)。従って線型非同次微分方程式 (21.41) の解の集合は線型空間にはならない!

しかし、これは美しくない。非同次とは言っても、いやしくも「線型」な微分方程式というからには、その解の集合が「線型」空間になってくれなければ、なんとなく気持ちが悪い。ところが、以下のように、少し考え方を拡張すると、線型非同次微分方程式にも線型空間の考え方をあてはめることができるのだ：

いま、 L を線型微分演算子とし、関数 $f_1(x)$ に関する線型非同次微分方程式

$$L f_1(x) = g_1(x) \quad (21.57)$$

と、関数 $f_2(x)$ に関する線型非同次微分方程式

$$L f_2(x) = g_2(x) \quad (21.58)$$

があったとする。ここで $g_1(x), g_2(x)$ はそれぞれの方程式の非同次項である。これらの方程式で、線型写像の部分 (L) は共通だとしよう。 a, b を任意のスカラーとし、それぞれの方程式を a 倍、 b 倍して辺々たしてみると、

$$aL f_1(x) + bL f_2(x) = ag_1(x) + bg_2(x) \quad (21.59)$$

となる。ところが、 L が線型写像 (線型微分演算子) であることより、左辺は $L(af_1(x) + bf_2(x))$ となる。従って、

$$L(af_1(x) + bf_2(x)) = ag_1(x) + bg_2(x) \quad (21.60)$$

となる。これは、 $ag_1(x) + bg_2(x)$ を非同次項とするような線型非同次微分方程式に関して、その解は、 $g_1(x)$ と $g_2(x)$ をそれぞれ非同次項とするような線型非同次微分方程式の解の線型結合であたえられることを示す。つまり、非同次項が線型結合されて新しい方程式になることを許せば、この非同次の線型微分方程式も、解は線型空間になるのだ。

これにあわせて、「重ね合わせの原理」は以下のように拡張される: 基本法則が線型微分方程式で記述される現象は、いくつかの現象の重ね合わせ (線型結合) も実現可能な現象であるし、ひとつの現象をいくつかの現象の重ね合わせとして表現することもできる。ただし、その場合、非同次項も重ねあわせされる。

問 615 ある線型非同次微分方程式:

$$Lf(x, y, \dots) = g(x, y, \dots) \quad (21.61)$$

について、その解のひとつを $f_0(x, y, \dots)$ とする。さて、上式と同じ線型微分演算子 L を使って

$$L\phi(x, y, \dots) = 0 \quad (21.62)$$

となる線型同次微分方程式を考える。この任意の解 $\phi(x, y, \dots)$ を、 f_0 に足した関数:

$$f_0(x, y, \dots) + \phi(x, y, \dots) \quad (21.63)$$

も、式 (21.61) の解であることを示せ。

例 21.20 拡張された重ね合わせの原理を使って、例 21.19 の線型非同次微分方程式 (21.50) を解いてみよう。まず、右辺の $V_0 \sin \omega t$ を以下のように指数関数の線型結合に分解する:

$$V_0 \sin \omega t = V_0 \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad (21.64)$$

そうする理由はすぐにわかるが、要するに、指数関数は微分しても自分自身に比例するから扱いやすいのだ。そして、分解した 2 つの指数関数をそれぞれ非同次項に持つような線型非同次微分方程式を考える:

$$R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = \frac{V_0}{2i} e^{i\omega t} \quad (21.65)$$

$$R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = -\frac{V_0}{2i} e^{-i\omega t} \quad (21.66)$$

式 (21.65) は、非同次項が $e^{i\omega t}$ に比例しているのだから、解も $e^{i\omega t}$ に比例しているのではないかと推定し、 $Q(t) = Q_0 e^{i\omega t}$ と仮定して、式 (21.65) に代入してみる。すると、

$$Ri\omega Q_0 e^{i\omega t} + \frac{Q_0 e^{i\omega t}}{C} = \frac{V_0}{2i} e^{i\omega t} \quad (21.67)$$

となる。両辺を $e^{i\omega t}$ で割ると、

$$Ri\omega Q_0 + \frac{Q_0}{C} = \frac{V_0}{2i} \quad (21.68)$$

となる。これを Q_0 に関して解けば、

$$Q_0 = \frac{V_0}{2(-R\omega + i/C)} \quad (21.69)$$

となり、式 (21.65) の解として、

$$Q_1(t) = \frac{V_0}{2(-R\omega + i/C)} e^{i\omega t} \quad (21.70)$$

を得る。式 (21.66) も同様にして、

$$Q_2(t) = \frac{V_0}{2(-R\omega - i/C)} e^{-i\omega t} \quad (21.71)$$

という解を得る (各自、確かめよ)。式 (21.50) の解は、この $Q_1(t)$ と $Q_2(t)$ の線型結合 (というか、単なる足し算) である。すなわち、式 (21.50) の解は、次式になる:

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_1(t) + Q_2(t) \\ &= \frac{V_0}{2(-R\omega + i/C)} e^{i\omega t} + \frac{V_0}{2(-R\omega - i/C)} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (21.72)$$

問 616

- (1) 式 (21.50) の解として、式 (21.72) を導け。すなわち、上の例をよく理解して、自力で再現せよ。
- (2) 式 (21.72) を変形し、次式を導け (ヒント: 通分):

$$Q(t) = \frac{V_0 \{ e^{i\omega t} (-\omega R - i/C) + e^{-i\omega t} (-\omega R + i/C) \}}{2(R^2\omega^2 + 1/C^2)} \quad (21.73)$$

- (3) 式 (21.73) を変形し、次式を導け (ヒント: 分子をオイラーの公式で整理する):

$$Q(t) = V_0 \frac{-R\omega \cos \omega t + (\sin \omega t)/C}{R^2\omega^2 + 1/C^2} \quad (21.74)$$

- (4) 式 (21.74) を変形し、次式を導け (ヒント: 分子に三角関数の合成を適用する):

$$Q(t) = \frac{CV_0}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} \sin(\omega t - \phi) \quad (21.75)$$

$$\phi = \arctan \omega RC \quad (21.76)$$

演習問題

演習問題 5 (発展) 確率変数 X に対し、その期待値 $E[X]$ を与える、という写像 E は線型写像かどうか判定し、理由を述べよ。ヒント: 2 つの確率変数 X, Y とスカラー a, b について、 $E[aX + bY] = ?$

演習問題 6 (発展) 確率変数 X に対して、その分散 $V[X]$ を与える、という写像 V は線型写像かどうか判定し、理由を述べよ。ヒント: 反例を!

演習問題 7 (発展) 任意の関数 $f(x)$ に対して関数 $f(x+1)$ を与える写像を F とする。すなわち、

$$F: f(x) \mapsto f(x+1) \quad (21.77)$$

とする。 F は線型写像かどうか判定し、理由を述べよ。ヒント: 実は簡単。具体例を考えてみよう。

21.5 解答

答 603 略。

答 604 行き先が数であるような写像

答 605 略。

答 606 まず式 (21.10)、式 (21.11) がともに成り立つとする。式 (21.11) より、

$$f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = f(\alpha \mathbf{x}) + f(\beta \mathbf{y})$$

ところが式 (21.10) より、

$$f(\alpha \mathbf{x}) + f(\beta \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$$

従って式 (21.12) が成り立つ。逆に、式 (21.12) が成り立つとすると、 $\alpha = \alpha, \beta = 0$ とすれば式 (21.10) が成り

立つし、 $\alpha = \beta = 1$ とすれば式 (21.11) が成り立つ。

答 607 略。

答 608 以下、 α, β を任意の実数とする。

(1)

$$\begin{aligned} & F(\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2)) \\ &= F((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)) \\ &= (2\alpha x_1 + 2\beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2) \\ &= \alpha(2x_1, x_2) + \beta(2y_1, y_2) \\ &= \alpha F((x_1, x_2)) + \beta F((y_1, y_2)) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & F(\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2)) \\ &= F((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)) \\ &= (0, \alpha x_2 + \beta y_2) \\ &= \alpha(0, x_2) + \beta(0, y_2) \\ &= \alpha F((x_1, x_2)) + \beta F((y_1, y_2)) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} & F(\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2)) \\ &= F((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)) \\ &= (\alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta y_1) \\ &= \alpha(x_2, x_1) + \beta(y_2, y_1) \\ &= \alpha F((x_1, x_2)) + \beta F((y_1, y_2)) \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} & F(\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2)) \\ &= F((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)) \\ &= (-\alpha x_1 - \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2) \\ &= \alpha(-x_1, x_2) + \beta(-y_1, y_2) \\ &= \alpha F((x_1, x_2)) + \beta F((y_1, y_2)) \end{aligned}$$

(5) 反例: $F(2(0, 0)) = F((2 \times 0, 2 \times 0)) = F((0, 0)) = (1, 0)$ だが、 $2F((0, 0)) = 2(1, 0) = (2, 0)$ となる。線型写像なら、この両者は一致するはず。

答 609

(1) 線型写像でない。反例: $f(x) = x, g(x) = x$ とすると^{*13}、

$$F(f(x) + g(x)) = F(2x) = 2x + 1$$

^{*13} $f(x) = x$ は、 $f'(x) = 1, f''(x) = 0$ となって、それ以上微分できないではないか、という人がたまにいるが、そんなことはない。 $f''(x) = 0$ なら、 $f'''(x) = f^{(4)} = \dots = 0$ である。定数関数 0 は何回も微分できて、何回微分しても 0 のままである。

だが,

$$F(f(x)) + F(g(x)) = F(x) + F(x) = 2x + 2$$

となる。線型写像なら、この両者は一致するはず。

- (2) 線型写像でない。反例: $f(x) = 1, g(x) = x$ とすると,

$$\begin{aligned} F(f(x) + g(x)) &= F(1 + x) = (1 + x)^2 \\ F(f(x)) + F(g(x)) &= F(1) + F(x) = 1 + x^2 \end{aligned}$$

となる。線型写像なら、この両者は一致するはず。

- (3) 線型写像。導関数の性質から,

$$\frac{d^2}{dx^2} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \beta \frac{d^2}{dx^2} g(x)$$

- (4) 線型写像でない。反例: $f(x) = x, g(x) = x$ とすると,

$$\begin{aligned} F(f(x) + g(x)) &= F(2x) = 2^2 = 4 \\ F(f(x)) + F(g(x)) &= F(x) + F(x) = 1^2 + 1^2 = 2 \end{aligned}$$

線型写像なら、この両者は一致するはず。

答 610

$$\begin{aligned} F(\alpha f(x) + \beta g(x)) &= \int_0^1 (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx \\ &= \alpha \int_0^1 f(x) dx + \beta \int_0^1 g(x) dx \\ &= \alpha F(f(x)) + \beta F(g(x)) \end{aligned}$$

答 611 略。

答 612 略。

答 613 略。

答 614

- (1) 微分を含み、関数を関数に写す線型写像であるような演算子のこと。

- (2) ある線型微分演算子 L と、ある (恒等的に 0 ではない) 関数 $g(x, y, \dots)$ を用いて,

$$Lf(x, y, \dots) = g(x, y, \dots)$$

と書けるような、関数 $f(x, y, \dots)$ に関する微分方程式。

- (3) 線型同次微分方程式と線型非同次微分方程式のこと。

答 615 $f = f_0 + \phi$ として式 (21.61) の左辺に代入する

と、 L は線型写像なので,

$$Lf = L(f_0 + \phi) = Lf_0 + L\phi \quad (21.78)$$

となる。 f_0 が式 (21.61) の解であることから,

$$Lf_0 = g \quad (21.79)$$

であり、また、 ϕ が式 (21.62) の解であることから,

$$L\phi = 0 \quad (21.80)$$

である。従って、式 (21.78) の最右辺は,

$$Lf_0 + L\phi = g + 0 = g \quad (21.81)$$

となる。従って、式 (21.78) は,

$$L(f_0 + \phi) = g \quad (21.82)$$

となる。すなわち、 $f_0 + \phi$ もこの線型非同次微分方程式の解である。 ■

答 616 略。

一問一答

- 線型空間と線型写像のちがいをわかっていたつもりがまざっていてショックだった。

... ほらね...

- " \mathbb{C} は \mathbb{C} を体とする線型空間である" とのことですが、仮に、 $x = 1 - i, \alpha = 1 + i$ である時は、

$$\alpha x = (1 - i)(1 + i) = 2$$

また、 $x = 1 - i, y = 1 + i$ である時は、

$$x + y = (1 - i) + (1 + i) = 2$$

となり、実数 (\mathbb{R} の要素) となるため、線型空間の定義を満たしていない気がします...

... 実数も複素数の一種。つまり $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ です。なので上の例でも、線型空間の定義を満たしています。

- 定義とかを使っている導くのは難しいです...

... がんばってください。

- コツコツやったら、すごい理解できた。とっても楽しいです。頑張ります!

... うれしいなあ。

第22章

線型代数4: 線型独立・基底・座標

22.1 線型独立

ベクトル^{*1}(の集合)に関する重要な概念に、「線型独立」というものがある: 線型空間の部分集合

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \tag{22.1}$$

が, スカラー

$$p_1, p_2, \dots, p_n \in K \tag{22.2}$$

に対して,

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = 0 \tag{22.3}$$

となるのは,

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0 \tag{22.4}$$

という場合に限るとき, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ は互いに線型独立である, という(定義)。この定義は必ず記憶せよ。

つまり, ベクトルの集合が, 「線型結合が0になるならば, 係数がぜんぶ0となるより他は無い」というような状況を, 線型独立というのだ(係数がぜんぶ0なら式(22.3)が成り立つのは当然である)。

問 617 線型独立の定義を3回, 書いて記憶せよ。

それでは, 線型独立は具体的にどういうことなのか, いくつかの例で考えてみよう。

例 22.1 2つの幾何ベクトル x, y を考える。これらはいずれも0でないとする。

x, y が互いに平行でなければ, それらの線型結合

$$p_1x + p_2y \quad (p_1, p_2 \text{ は実数とする}) \tag{22.5}$$

は, p_1x と p_2y の張る平行四辺形の対角線に相当する幾

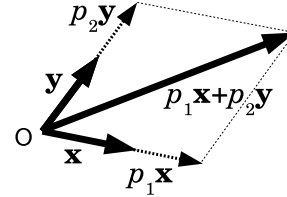


図 22.1 互いに平行でない2つの幾何ベクトル (x と y) の線型結合 ($p_1x + p_2y$) は, 係数 (p_1 と p_2) がともに0でない限り, 0にはならない。

何ベクトルになる(図 22.1)。従って, $p_1 = p_2 = 0$ でない限り, $p_1x + p_2y = 0$ にはならない。従って, $\{x, y\}$ は互いに線型独立である。

一方, x, y が互いに平行であれば, 適当な実数 a があって,

$$y = ax \tag{22.6}$$

とできる(これが幾何ベクトルどうしの「平行」の定義)。この式は,

$$ax - y = 0 \tag{22.7}$$

と変形できる。この式は, x, y の線型結合が0になっているにもかかわらず, 少なくとも y の係数は0でないので, 「係数がぜんぶ0」ではない。従って, この場合, $\{x, y\}$ は互いに線型独立ではない。(例おわり)

線型独立を「一次独立」ともいう。

線型空間の部分集合が線型独立でないことを, 「線型従属」という。線型従属を「一次従属」ともいう。それは, 式(22.3)を満たす p_1, p_2, \dots, p_n が, 式(22.4)以外にも存在する, ということである。

問 618 以下の言葉を説明せよ:

- (1) 一次独立 (2) 線型従属 (3) 一次従属

問 619 A君はテストで「線型従属の定義を述べよ」

^{*1} ここで言う「ベクトル」は, 幾何ベクトルや数ベクトルだけでなく, 一般に「ある線型空間の要素」という意味である。

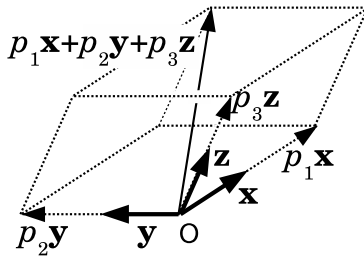


図 22.2 同一平面には無い 3 つの幾何ベクトルの線型結合は、平行六面体の対角線に相当する。係数 (p_1, p_2, p_3) が全て 0 でない限り、それは 0 にはならない。

という問題に下記のように答えた。「ベクトルの集合 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ が、スカラー $p_1, p_2, \dots, p_n \in K$ に対して $p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = 0$ となるならば、 $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$ とならないとき、この集合は線型従属である」

この解答のおかしいところを指摘せよ。

例 22.1 で見たように、2 つの幾何ベクトルに限れば、線型従属とはベクトルどうしが平行であるということと同値である。しかし、3 つ以上の幾何ベクトルになると、そんなに事情は単純ではない。

例 22.2 3 つの幾何ベクトル x, y, z を考える。これらはいずれも 0 でないし、互いに平行でもないとする。

x, y, z が同一平面上になければ、それらの線型結合

$$p_1x + p_2y + p_3z \quad (22.8)$$

は (p_1, p_2, p_3 は実数とする)、 p_1x と p_2y と p_3z の張る平行六面体の対角線に相当する幾何ベクトルになる (図 22.2) *2。従って、 $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ でない限り、 $p_1x + p_2y + p_3z = 0$ にはならない。従って、 $\{x, y, z\}$ は互いに線型独立である。

一方、 x, y, z が同一平面上にあれば、 x, y を 2 辺の方向とするような平行四辺形をその平面上に描くことができ (図 22.3)、適当な実数 a, b で、

$$z = ax + by \quad (22.9)$$

とできるはずである (幾何ベクトルの分解)。この式を

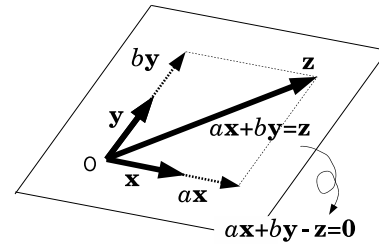


図 22.3 3 つの幾何ベクトルが同一平面にあれば、1 つの幾何ベクトルは他の 2 つの線型結合で表される。

変形すると、

$$ax + by - z = 0 \quad (22.10)$$

となる。この式は、 x, y, z の線型結合が 0 になっているにもかかわらず、「係数がぜんぶ 0 」ではない (少なくとも z の係数は -1 である)。従って、この場合、 $\{x, y, z\}$ は互いに線型独立ではない。(例おわり)

これらの例でわかるだろうが、あえて直感的に言えば、幾何ベクトルの集合が線型独立であるのは、各幾何ベクトルが、バラバラの方向を向いている、という状況である。では、幾何ベクトル以外のベクトルについてはどうだろうか？ 以下の例で見てみよう：

例 22.3 線型空間 \mathbb{R}^3 の 3 つの数ベクトルからなる集合：

$$\left\{ x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \quad (22.11)$$

は、線型独立だろうか？ それを調べるには、まず、式 (22.3) を仮定する。つまり、ある実数 p_1, p_2, p_3 によって、

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0 \quad (22.12)$$

となるとしよう。このとき、 $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ となる以外に式 (22.12) が成り立つことが無ければ、線型独立である。式 (22.12) に式 (22.11) を代入して整理すると、

$$1p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 0 \quad (22.13)$$

$$2p_1 + 3p_2 + 4p_3 = 0 \quad (22.14)$$

$$3p_1 + 4p_2 + 5p_3 = 0 \quad (22.15)$$

となる。この (p_1, p_2, p_3) に関する連立方程式を解くと (各自、解いてみよう)、解は無数にあって、ひとつに定まらない*3。例えば、 $(p_1, p_2, p_3) = (-1, 2, -1)$ は式 (22.13)

*2 平行六面体とは、6 つの平面で囲まれた立体で、向かい合う面どうしは互いに平行なもの。そのひとつの頂点を O とし、 O から 3 つの幾何ベクトル p_1x, p_2y, p_3z を出したときに、各幾何ベクトルの先端にそれぞれ頂点を置く。

*3 このように、連立一次方程式の解がひとつに定まらない状況を、

~式 (22.15) を満たす。これは、「 $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ となる以外に式 (22.12) が成り立つ」場合に該当する。従って、線型従属である。 ■

問 620 線型空間 \mathbb{R}^2 について考える。

- (1) $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ とすると, \mathbb{R}^2 の部分集合 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ は線型独立であることを示せ。
- (2) \mathbb{R}^2 の部分集合で, 線型独立になる例を, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 以外に挙げよ。
- (3) \mathbb{R}^2 の部分集合で, 線型従属になる例を挙げよ。

ここでは証明しないが, \mathbb{R}^n の数ベクトルについて (n は任意の自然数とする), 以下のような性質がある:

- n より多くの数ベクトルは, 互いに線型従属である。たとえば, 2 次元の数ベクトルが 3 本以上あれば, それらがどのような数ベクトルであっても, 線型従属である。
- n 本の数ベクトルが線型従属なら, それらを並べてできる n 次正方行列の行列式*4 は 0 になるし, その逆も成り立つ*5。

問 621 \mathbb{R}^3 の 3 つの数ベクトルからなる集合:

$$\left\{ \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (22.16)$$

が線型独立かどうかを, 理由も述べて判定せよ。ヒント: 例 22.3 と同様の手順を踏む。連立方程式が不定になるかどうかポイント。

例 22.4 式 (19.8) で定義したように, 実数係数の 2 次関数の集合を P_2 とする。すなわち,

$$P_2 = \{f(x) = px^2 + qx + r \mid p, q, r \in \mathbb{R}\} \quad (22.17)$$

「不定」という。

*4 諸君は 2 次と 3 次の行列式は既に知っている。4 次以上の行列式は第 28 章で学ぶ。

*5 正方行列の固有ベクトルを求めるときに, よく似たような話が出てきたのを覚えているだろうか? 数学リメディアル教材 P.131 で, $(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を持つ条件は $\det(A - \lambda E) = 0$ である, というやつだ。あれは, $A - \lambda E$ という行列を構成する列ベクトルどうしが線型従属になる, という条件だったのだ。

である。例 19.7 で見たように, P_2 は線型空間である。さて, P_2 の部分集合:

$$\{f_1(x) = x^2, f_2(x) = x, f_3(x) = 1\} \quad (22.18)$$

は互いに線型独立かどうか調べてみよう。まず, それらの線型結合:

$$p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) + p_3 f_3(x)$$

つまり,

$$p_1 x^2 + p_2 x + p_3$$

が恒等的に 0 になるとき, つまり

$$p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0 \quad (22.19)$$

が恒等的に成り立つときを考える。式 (22.19) に $x = 0, 1, -1$ をそれぞれ代入すると,

$$\begin{aligned} p_3 &= 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 0 \\ p_1 - p_2 + p_3 &= 0 \end{aligned}$$

となる。この連立方程式を解けば, $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ となる。従って, $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$ は互いに線型独立である。

ちなみに, 「恒等的に 0」ではなく, ある x についてのみ 0 にするのであれば, $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ 以外のケースもありえるが, それは関数の値がその x を取るときたまたま 0 になるだけであって, 「恒等的に 0」だとは言えない。 ■

問 622 例 22.4 の線型空間 P_2 について考える。 P_2 の以下の部分集合について, それぞれ線型独立か線型従属かを判断し, 理由を述べよ。

- (1) $\{g_1(x) = 1 + x, g_2(x) = 1 - x, g_3(x) = x + x^2\}$
- (2) $\{h_1(x) = 1 + x, h_2(x) = 1 - x, h_3(x) = 1\}$

問 623 実数 x に関する $f(x) = a \cos x + b \sin x$ という形の関数の集合 X を考える (a, b は任意の実数)。すなわち,

$$X = \{f(x) = a \cos x + b \sin x \mid \forall a, \forall b \in \mathbb{R}\} \quad (22.20)$$

である。

- (1) X は \mathbb{R} を体とする線型空間であることを示せ。

- (2) $\{\sin x, \cos x\} \subset X$ は、線型独立か?
 (3) $\{\sin x, 2\sin x\} \subset X$ は、線型独立か?
 (4) $\sin(x + \pi/3) \in X$ であることを示せ*6。
 (5) $\{\sin x, \sin(x + \pi/3)\} \subset X$ は、線型独立か?
 (6) $\{\sin x, \sin(x + \pi)\} \subset X$ は、線型独立か?
 (7) $\{\sin x, \sin(x + \pi/3), \cos x\} \subset X$ は、線型独立か?

問 624 ベクトルの集合: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ が 1 つでも 0 を含むなら、これらは線型従属であることを証明せよ。

22.2 基底と次元

線型空間を扱うときに、以下で定義される「基底」という概念がとても重要である。

基底の定義

線型空間 X の部分集合 B が、

- 線型独立であること。
- X の任意の要素を B の線型結合で表せること。

という 2 つの条件をともに満たす時、 B を X の基底と呼ぶ。

問 625 基底の定義を 5 回、書いて記憶せよ。

例 22.5 例 22.4 の P_2 (すなわち実数係数の 2 次関数の集合) を考える。 P_2 の部分集合

$$B = \{f_1(x) = x^2, f_2(x) = x, f_3(x) = 1\} \quad (22.21)$$

は、 P_2 の基底である。なぜか? まず、例 22.4 より、 B は線型独立である。次に、 P_2 の任意の要素、つまり任意の実数係数 2 次関数 $f(x)$ は、 a, b, c を適当な実数として、 $f(x) = ax^2 + bx + c$ と書ける。これは $f(x) = af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x)$ と書けるので、 $f(x)$ は B の線型結合で表すことができる。例えば、

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \quad (22.22)$$

*6 \subset と \in はそれぞれ異なる意味を持つ数学記号である。すなわち、 \subset は、その左辺が右辺の「部分集合」であることを意味し、 \in は、その左辺が右辺の「要素」であることを意味する。どちらも、左辺が右辺に「含まれる」という点では似ているが、「部分集合」として含まれるのか、「要素」として含まれるのかは、全く違う。このあたりの違いをきちんと認識していないと、数学では痛い目に合うので気をつけよう。

は、

$$f(x) = 2f_1(x) + 3f_2(x) + f_3(x) \quad (22.23)$$

と書ける。 ■

問 626 例 22.4 の P_2 (すなわち実数係数の 2 次関数の集合) を考える。以下の 3 つの関数:

$$B' = \{g_1(x) = 1+x, g_2(x) = 1-x, g_3(x) = x+x^2\}$$

も P_2 の基底であることを示せ。

問 627 線型空間 \mathbb{R}^2 を考える。

- (1) $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ とすると、 $\{e_1, e_2\}$ は \mathbb{R}^2 の基底であることを示せ。
 (2) $g_1 = (1, 1), g_2 = (1, -1)$ とすると、 $\{g_1, g_2\}$ は \mathbb{R}^2 の基底であることを示せ。

例 22.6 線型空間 \mathbb{R}^n において、

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \quad (22.24)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad (22.25)$$

...

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1) \quad (22.26)$$

としよう。これらはそれぞれ、ひとつの成分が 1 で残りはすべて 0 という数ベクトルである。その組み合わせ:

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \quad (22.27)$$

は基底である(証明はしないが、問 627(1) を解いた人には自明だろう)。この基底を「 \mathbb{R}^n の標準基底」と呼ぶ。例えば問 627(1) の $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ は、 \mathbb{R}^2 の標準基底である。 ■

問 628 \mathbb{R}^4 の標準基底は何か?

問 629 実数 x に関する $f(x) = A \sin(x + B)$ という形の関数の集合 Y を考える (A, B は任意の実数)。すなわち、

$$Y = \{f(x) = A \sin(x + B) \mid \forall A, \forall B \in \mathbb{R}\} \quad (22.28)$$

である。

- (1) $X = \{f(x) = a \sin x + b \cos x \mid \forall a, \forall b \in \mathbb{R}\}$ とす

ると, $Y = X$ であることを示せ (ヒント: 加法定理および三角関数の合成。また, 2 つの集合 X, Y が $Y = X$ であるとは, $Y \subset X$ と $X \subset Y$ の両方が成り立つ, という事)。

- (2) $\{\sin x, \cos x\}$ は X の基底であることを示せ。

ここでは証明しないが, どんな線型空間であっても基底を選び出すことができる。また, ここで見たように, 基底の選び方は一意的ではなく, むしろ極めて多様である。例えば, ある基底について, その要素全てを 2 倍したのも基底である。

ただし, 基底の要素数は, それぞれの線型空間について一意的である。すなわち, ある線型空間について, 3 つの要素が基底になったり, 4 つの要素が基底になったりはしない (その証明は, 長谷川「線型代数」P. 140-142)。従って, 「基底の要素数」は, その線型空間の特徴を表す重要な量であると推測できる。そこで, この数のことを「次元」と呼ぶ。すなわち,

線型空間の次元の定義

線型空間 X において, その基底の要素数を, X の次元と呼ぶ。

ここで注意。諸君は, ある量について, 「長さ」「時間」「質量」など, その量が表す対象の物理的な実体のことも「次元」と呼ぶことを既に学んだ。その「次元」と, ここで考えている「線型空間の次元」は, 全く別のものである。多義語である。

例 22.7 \mathbb{R}^2 の基底の要素数は 2 なので (問 627 参照), \mathbb{R}^2 の次元は 2 である。ここから類推すれば, 一般に, 正の整数 n について, 線型空間 \mathbb{R}^n の次元は n であることが直感的にわかるだろう。これは, \mathbb{R}^n の要素のことを「 n 次元の (実) 数ベクトル」と呼ぶことと整合的である。 \mathbb{R}^n のことを「 n 次元の (実) 数ベクトル空間」と呼ぶ。

ここでは証明しないが, 一般に, 線型空間から互いに線型独立なベクトルを次元の数だけ選び出したら, それは自動的に基底になる。

問 630

- (1) 次元とは何か?
 (2) 実数係数の 2 次関数の集合は, 何次元の線型空間か?

22.3 座標

基底という概念が導入されると, これから述べる「座標」という概念によって, 任意の線型空間を, とてもシンプルに取り扱うことができる。

K を体とする n 次元の線型空間 X において, 特定の基底

$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \quad (22.29)$$

を選んでしまえば, X の任意の要素 \mathbf{x} は,

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \quad (22.30)$$

というふうに, n 個のスカラー (線型結合の係数):

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (22.31)$$

を用いて表現される。従って, 式 (22.29) という基底と式 (22.30) があるという了解のもとに, \mathbf{x} を「 x_1, x_2, \dots, x_n を並べてできる数ベクトル」, つまり「 K^n の要素^{*7}」と同じものとみなしてしまおう! つまり, 形式的・簡略的に,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (22.33)$$

と書いてしまおう。この数ベクトルを \mathbf{x} の「座標」(coordinate) と呼び, x_1 や x_2 のようなひとつひとつの値のことを「座標成分」(component) と呼ぶ (定義)。このあたりの考え方を, 図 22.4 に示した。ここでひとつ約束: 座標は列ベクトルで書いても行ベクトルで書いても, どちらでもよいが, 各問題について, ひとたびどちらかで書いたら, それを維持しなければならない。

ちょっと待て! 式 (22.33) は, 論理的に変ではないか? なぜなら, 式 (22.33) 左辺の \mathbf{x} はそもそも線型空間 X の要素であって, 数ベクトルとは限らないのに, 式 (22.33) 右辺は数ベクトルだからだ。

それにもかかわらず式 (22.33) のように書いてしまうのは, これはあくまで式 (22.30) の形式的な簡略記法である, という約束をするからである。このような約束に

*7

$$K^n = K \times K \times \dots \times K \quad (22.32)$$

であり, この式の \times は直積である。既に述べたように, K は多くの場合, \mathbb{R} か \mathbb{C} である。

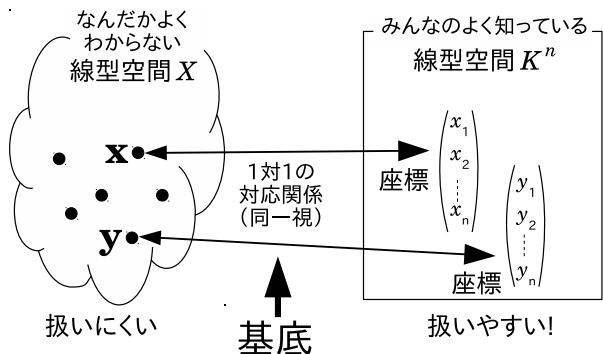


図 22.4 線型空間 X を、数ベクトルの集合 (これも線型空間) K^n と同一視する。

よって、そもそも違うものをあたかも同じもののように扱うことを「同一視」という。

このような乱暴なことが許されるのは、線型空間 X に関して成り立つあらゆることが、式 (22.30) という対応関係によって、数ベクトル空間 (数ベクトルの集合) K^n でも成り立つからである。

座標は基底とセットである。なんらかの基底を考えることによって座標が生まれ、その結果、その線型空間は、数ベクトル空間と同一視されるのである。これの一例を、諸君は既に経験している。すなわち、「数学リメディアル教材」の「ベクトル」の章で、最初は幾何ベクトルと数ベクトルを別々のものとして定義し、そのあとで両者を「同じものとみなして」しまったのが、それである。

例 22.8 問 626 で見た P_2 (すなわち実数係数の 2 次関数の集合) と基底 B を考える。すなわち、任意の実数係数の 2 次関数を、

$$B = \{f_1(x) = x^2, f_2(x) = x, f_3(x) = 1\} \quad (22.34)$$

という基底の線型結合で表すことができる。例えば、

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \quad (22.35)$$

は、

$$f(x) = 2f_1(x) + 3f_2(x) + f_3(x) \quad (22.36)$$

と書ける。このとき、 $(2, 3, 1)$ が $f(x)$ の座標である。このように、任意の実数係数 2 次関数は、適当な基底によって、3 つの座標成分、すなわち \mathbb{R}^3 の要素と同一視できる。

問 631 線型空間において、座標とは何か?

問 632 上の例で、基底として

$$\{\phi_1(x) = (1+x)^2, \phi_2(x) = 1+x, \phi_3(x) = 1\} \quad (22.37)$$

を選ぶと、関数 $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ はどのような座標成分で書けるか?

22.4 線型写像を行列で表現する

さて、座標という概念が導入されると、前回学んだ「線型写像」という概念は、驚くべきことに、諸君のよく知っている「行列と数ベクトルの掛け算」になってしまうのだ。それを見ていこう:

例 21.10 で見た、 \mathbb{R}^2 から \mathbb{R} への線型写像は、

$$y = (2, 3) \bullet (x_1, x_2) \quad (22.38)$$

というものだったが、 x は既に 2 次の数ベクトルであり、 y を 1 次の数ベクトルとみなして、この式を

$$y = (2 \ 3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (22.39)$$

と書き換えよう。 $(2 \ 3)$ を 1×2 行列と見れば、これは「行列と数ベクトルの積」の形になっている。

例 22.9 実数係数の 2 次関数の集合:

$$P_2 = \{f(x) = px^2 + qx + r \mid p, q, r \in \mathbb{R}\} \quad (22.40)$$

は線型空間である。実数係数の 1 次関数の集合:

$$P_1 = \{f(x) = ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad (22.41)$$

も線型空間である。さて、2 次関数を「微分する」という操作 d/dx は、 P_2 から P_1 への線型写像である。これを行列で表してみよう。

まず、 P_2 の基底として以下をとり、

$$\{v_1(x) = x^2, v_2(x) = x, v_3(x) = 1\} \quad (22.42)$$

P_1 の基底として以下をとろう:

$$\{w_1(x) = x, w_2(x) = 1\} \quad (22.43)$$

すると, P_2 の任意の要素 $px^2 + qx + r$ は,

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (22.44)$$

という \mathbb{R}^3 の数ベクトルで表されるし, すると, P_1 の任意の要素 $f(x) = ax + b$ は,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (22.45)$$

という \mathbb{R}^2 の数ベクトルで表される。

さて, 「微分する」という写像は,

$$\frac{d}{dx} : px^2 + qx + r \mapsto ax + b \quad (22.46)$$

と書け, その実体は,

$$a = 2p \quad (22.47)$$

$$b = q \quad (22.48)$$

という式に集約される。これらの式は, 行列を使って書くと,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (22.49)$$

となる。実際, 例えば, 2次関数 $x^2 + 3x + 4$ は, P_2 の基底 (式 (22.42)) を使うと

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (22.50)$$

となるが, これを式 (22.49) に代入すると,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (22.51)$$

となる。これは P_1 の基底 (式 (22.43)) を思い出すと, 1次関数 $2x + 3$ のことだった。これは確かにうまい具合に $x^2 + 3x + 4$ を微分したものになっている。 ■

線型写像を行列と数ベクトルの積で表した時に現れる行列のことを, その線型写像の「表現行列」という。式 (22.49) の右辺に現れた行列は, 「微分する」という線型写像の表現行列である。

表現行列は, 線型写像だけでなく, 基底の選び方にも依存する。同じ線型写像についても, 違う基底を考えれば表現行列も違ってくるのだ。それを次の問で体験しよう:

問 633 以下のような関数の集合 X を考える:

$$X = \{f(x) = a \sin x + b \cos x \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad (22.52)$$

X は \mathbb{R} を体とする線型空間である。

(1) $f(x) \in X$ を微分する, という操作

$$\frac{d}{dx} : f(x) \mapsto f'(x) \quad (22.53)$$

は, X から X への線型変換であることを示せ。

(2) $\{v_1(x) = \sin x, v_2(x) = \cos x\}$ は X の基底であることを示せ。

(3) この基底を用いて, 微分するという操作 (線型写像) の表現行列は次のようになることを示せ:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (22.54)$$

線型空間と線型写像に関する数学を「線型代数学」という。線型代数学を支えるのは, ここで見た, 基底と座標という考え方である。基底と座標を使えば, 多様な線型空間が数ベクトル空間になってしまうし, 多様な線型写像が行列 (と数ベクトルの積) になってしまう。ということは, 数ベクトル空間と行列のことをよく理解すれば, ほとんどの線型空間や線型写像のことがわかってしまう, ということなのだ。諸君がこれまで数ベクトルと行列を勉強したのは, それが理由なのだ。

さて, 式 (21.40) で学んだように, ある線型微分演算子 L と, ある既知関数 $g(x, y, \dots)$ を用いて,

$$Lf(x, y, \dots) = g(x, y, \dots) \quad (22.55)$$

と書ける方程式を線型微分方程式と言った。特に, 「 g が恒等的に 0」でなければ線型非同次微分方程式, 「 g が恒等的に 0」であれば, 線型同次微分方程式というのだった。ここで, 関数の集合を線型空間と見て, 何らかの基底を導入すると, 未知関数 $f(x, y, \dots)$ と既知関数 $g(x, y, \dots)$ はそれぞれ何らかの数ベクトル (つまり座標) f, g で表現され, 線型微分演算子 (つまり線型写像) L は何らかの行列 A で表現されるはずだ。それを使うと, 式 (22.55) は,

$$Af = g \quad (22.56)$$

という方程式になってしまう。これは, 諸君が中学校で習った, 連立一次方程式である! つまり, 線型微分方程式の数学的な実体は, 連立一次方程式と同じなのだ! 従って, 線型微分方程式を扱うには, 連立一次方程式がとて

も役立つのだ。諸君が中学校で連立一次方程式をさんざん教えられたのは、それが理由なのだ。

演習問題

演習問題 8 線型空間 X について、その部分集合 $\{x, y\}$ が線型従属になる場合 (ただし $x \neq 0$ とする)、適当なスカラー α によって、 $y = \alpha x$ とできることを示せ。

演習問題 9 \mathbb{R}^2 の任意の 2 つの要素について、それらが互いに線型従属であれば、それらを並べてできる 2 次正行列の行列式は 0 であることを証明せよ。

演習問題 10 (発展) 線型空間 X の部分集合 Y が線型従属であるとする。 X の部分集合 Y' が Y を含む、すなわち $Y \subset Y'$ であれば、 Y' も線型従属であることを示せ。

演習問題 11 (発展) 線型空間 X の部分集合 Z が線型独立であるとする。 X の部分集合 Z' が Z に含まれる、すなわち $Z' \subset Z$ であれば、 Z' も線型独立であることを示せ。

22.5 解答

答 617 略。

答 618

- (1) 線型独立のこと。
- (2) 線型独立でないこと。
- (3) 線型従属のこと。

答 619 A 君の論理では、「 $p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = 0$ 」と「 $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$ 」は両立しないことになる。しかしそもそも $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$ の場合は、 $p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = 0$ が成り立つから、これらは両立することがある。従って A 君の解答は誤りである。

答 620

- (1) $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ によって、 $p_1e_1 + p_2e_2 = 0$ となるとき、 $p_1(1, 0) + p_2(0, 1) = (p_1, p_2) = 0$ だから、 $p_1 = p_2 = 0$ となるしかない。従って $\{e_1, e_2\}$ は線型独立。
- (2) $\{(1, 1), (1, -1)\}$ など。
- (3) $\{(1, 1), (-1, -1)\}$ など。

答 621 略。

答 622 略。

答 623

- (1) a_1, a_2, b_1, b_2 をいずれも実数とし、

$$f_1(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x \quad (22.57)$$

$$f_2(x) = a_2 \cos x + b_2 \sin x \quad (22.58)$$

とする。明らかに $f_1 \in X$ かつ $f_2 \in X$ である。さて、

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\ \alpha f_1(x) = \alpha a_1 \cos x + \alpha b_1 \sin x \in X \end{aligned} \quad (22.59)$$

である。また、

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) \\ = (a_1 + a_2) \cos x + (b_1 + b_2) \sin x \in X \end{aligned} \quad (22.60)$$

である。従って X は \mathbb{R} を体とする線型空間。 ■

- (2) 定数 $p, q \in \mathbb{R}$ によって、恒等的に

$$p \sin x + q \cos x = 0 \quad (22.61)$$

となるとする。この式に $x = 0$ を代入すると $q = 0$ となり、 $x = \pi/2$ を代入すると $p = 0$ となる。従って、 $p = q = 0$ となるしかない。従って $\{\sin x, \cos x\}$ は線型独立である。 ■

- (3) $\{\sin x, 2 \sin x\}$ の線型結合 $p \sin x + q(2 \sin x)$ において、 $p = -2, q = 1$ とするとこれを恒等的に 0 にできる。従って $\{\sin x, 2 \sin x\}$ は線型従属。 ■

- (4) 恒等的に

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \quad (22.62)$$

となる。これは式 (22.20) の中で $a = \sqrt{3}/2, b = 1/2$ とした式になっている。従って $\sin(x + \pi/3) \in X$ である。 ■

(5) $p, q \in \mathbb{R}$ として

$$\begin{aligned} & p \sin x + q \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \left(p + \frac{q}{2}\right) \sin x + \frac{\sqrt{3}q}{2} \cos x \end{aligned} \quad (22.63)$$

となる。これは $\{\sin x, \cos x\}$ の線型結合だが、先に示したように、 $\{\sin x, \cos x\}$ は線型独立なので、これを恒等的に 0 にするには、

$$p + \frac{q}{2} = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\sqrt{3}q}{2} = 0$$

となるしかない。すなわち、 $p = q = 0$ とするしかない。従って、 $\{\sin x, \sin(x + \pi/3)\}$ は線型独立。■

(6) $\sin x + \sin(x + \pi) = \sin x - \sin x = 0$ 。これは $\{\sin x, \sin(x + \pi)\}$ の線型結合で、恒等的に 0 になるのに係数は 0 でない。従って $\{\sin x, \sin(x + \pi)\}$ は線型従属。■

(7) 恒等的に

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

が成り立つ。左辺引く右辺を考えると、

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 0$$

これは $\{\sin x, \sin(x + \pi/3), \cos x\}$ の線型結合で、恒等的に 0 なのに係数は 0 でない。従って $\{\sin x, \sin(x + \pi/3), \cos x\}$ は線型従属。■

答 624 略 (簡単!).

答 625 略。

答 626 $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ によって、

$$q_1 g_1(x) + q_2 g_2(x) + q_3 g_3(x) = 0 \quad (22.64)$$

が恒等的に成り立つとする。すなわち、

$$q_1(1+x) + q_2(1-x) + q_3(x+x^2) = 0$$

であるとする。式変形すると、

$$q_3 x^2 + (q_1 - q_2 + q_3)x + (q_1 + q_2) = 0$$

となる。これが恒等的に 0 になるには、

$$q_3 = 0, \quad q_1 - q_2 + q_3 = 0, \quad q_1 + q_2 = 0$$

となる。これを解くと、 $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ となるから、 B' は線型独立。また、任意の 2 次関数 $f(x) = px^2 +$

$qx + r$ について、

$$q_3 = p, \quad q_1 - q_2 + q_3 = q, \quad q_1 + q_2 = r$$

となるように (q_1, q_2, q_3) を定めることで、

$$f(x) = q_1 g_1(x) + q_2 g_2(x) + q_3 g_3(x) \quad (22.65)$$

とできるから、 P_2 の要素は B' の線型結合で表される。従って、 B' は P_2 の基底。■

答 627

(1) まず $\{e_1, e_2\}$ が線型独立であることは問 620 で示した。次に、

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} &= (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \mathbf{x} &= (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) \\ &= x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 \end{aligned}$$

従って、 \mathbb{R}^2 の任意の要素は $\{e_1, e_2\}$ の線型結合で書ける。従って $\{e_1, e_2\}$ は \mathbb{R}^2 の基底。■

(2) $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ によって、 $p_1 g_1 + p_2 g_2 = 0$ となるとき、

$$p_1(1, 1) + p_2(1, -1) = (p_1 + p_2, p_1 - p_2) = 0$$

が成り立つ。従って、 $p_1 = p_2 = 0$ となるしかない。従って $\{g_1, g_2\}$ は線型独立。

次に、 \mathbb{R}^2 の任意の要素 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ について、適当な p_1, p_2 によって

$$(x_1, x_2) = p_1(1, 1) + p_2(1, -1) \quad (22.66)$$

とできるだろうか? 式 (22.66) の右辺は、

$$(p_1 + p_2, p_1 - p_2)$$

となるので、

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + p_2 \\ x_2 &= p_1 - p_2 \end{aligned}$$

がともに成り立てば、式 (22.66) は成り立つ。そのためには、

$$p_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad p_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

とすればよい。すなわち、

$$\mathbf{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \mathbf{g}_1 + \frac{x_1 - x_2}{2} \mathbf{g}_2 \quad (22.67)$$

が成り立つ。従って、 \mathbb{R}^2 の任意の要素は $\{g_1, g_2\}$ の線型結合で書ける。従って $\{g_1, g_2\}$ は \mathbb{R}^2 の基底。■

答 628 $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$

答 629

(1) Y の任意の要素 $A \sin(x+B)$ について,

$$\begin{aligned} A \sin(x+B) &= A(\sin x \cos B + \cos x \sin B) \\ &= A \cos B \sin x + A \sin B \cos x \end{aligned}$$

となる。 $A \cos B = a$, $A \sin B = b$ とおけば,

$$A \sin(x+B) = a \sin x + b \cos x \in X \quad (22.68)$$

となる。従って,

$$Y \subset X \quad (22.69)$$

また, X の任意の要素 $a \sin x + b \cos x$ について, 三角関数の合成によって,

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \delta)$$

とできる (三角関数の合成。 δ は, (a, b) を 2 次元平面上にプロットしたときに x 軸から点 (a, b) までの角)。 $\sqrt{a^2 + b^2} = A$, $\delta = B$ とおけば,

$$a \sin x + b \cos x = A \sin(x+B) \in Y \quad (22.70)$$

従って,

$$X \subset Y \quad (22.71)$$

式 (22.69), 式 (22.71) より, $Y = X$ ■(2) $\{\sin x, \cos x\}$ が線型独立であることは問 623 で示した。また, 式 (22.68) より, Y の任意の要素が $\{\sin x, \cos x\}$ の線型結合で表されることは明らか。従って $\{\sin x, \cos x\}$ は Y の基底。 $Y = X$ なので, これは X の基底でもある。 ■

答 630

- (1) 基底の要素数のこと。
 (2) 例 22.5 より, この線型空間の基底として $\{x^2, x, 1\}$ があり, その要素数は 3。従って 3 次元。

答 631 線型空間の要素を, ある基底の線型結合であらわしたときの, 係数を並べてできる数ベクトルのこと。

答 632 $f(x) = 2x^2 + 3x + 1 = 2(x+1)^2 - (x+1)$ だから, $(2, -1, 0)$ 。

答 633

- (1) 略 (d/dx が線型写像である, ということを示し, その上で, $\forall f(x) \in X, f'(x) \in X$ を示せばよい)。
 (2) 略 (簡単)。

(3) X の基底として $\{v_1(x) = \sin x, v_2(x) = \cos x\}$ を使くと, X の任意の要素

$$f(x) = a \sin x + b \cos x$$

は, 2 次元の数ベクトル

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (22.72)$$

と同一視できる。 $f(x)$ を微分すると,

$$f'(x) = a \cos x - b \sin x = -b \sin x + a \cos x$$

となるが, 上記の基底を使うと, この関数は,

$$\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} \quad (22.73)$$

と同一視できる。式 (22.72) を式 (22.73) に写す線型変換は,

$$\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (22.74)$$

と書ける。右辺に現れた表現行列は, 式 (22.54) に一致している。

答 8 略。ヒント: 線型従属の定義から素直に考えれば簡単!

答 9 略。ヒント: 前問を使う。

答 10 略。ヒント: 線型従属の定義を素直に使うと, 自然にわかる。

答 11 略。ヒント: 背理法を使って, 問 10 の結果を利用する。

一問一答

- 新しいことを次々と覚えていっているけど, 3 回くらい前の授業のことも次々と忘れていっている。

... 忘れることを恐れず, 目の前の数学に, 丁寧に取り組んでください。いつか, 忘れかけていたパラパラの数学が, ジグソーパズルのように組み合わさって, 1 枚の大きな絵のように見えるときが来ます。

- なんかよくわからないけど, 線型すごい。なんでも数学で表せるんだと思った。

... 線型はほんとにすごいのです。

第23章

線型代数5: 計量空間

23.1 内積

既に学んだように、「スカラー倍」と「足し算」ができ、それについて閉じている集合ならば、どんな集合でも「線型空間」と呼べる。そして、線型空間の要素のことをベクトルと呼ぶ。ここから出発して、線型独立や基底、座標、線型写像などの概念を導入した。それらは、高校で学んだ幾何ベクトルや数ベクトルについても自然に成り立つことだった。

ところが、ここで奇妙なことがある。高校で学んだ、いわゆる平面や空間^{*1}の幾何ベクトルや、数ベクトルには「内積」があったが、このテキストで第19章以降に学んできた一般の線型空間には「内積」が出てきていない。

実は、内積は線型空間やベクトルの本質的な性質ではない。つまり「内積が無い線型空間」や「内積ができないベクトル」があり得るのである。「内積」は、線型空間について、付加的に人為的に定義されるべきものである。以下に内積の公理^{*2}を述べる:

内積の公理

\mathbb{R} を体とする線型空間 X について、写像

$$f : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \tag{23.1}$$

が以下の 1)~5) の全てを満たすとき、写像 f を「 X の内積」とよぶ(以下、 $\forall u, \forall v, \forall u_1, \forall u_2 \in X$)

- 1) $f(u, u) \geq 0$
- 2) $f(u, u) = 0$ となるのは $u = 0$ のときに限る。
- 3) $f(u, v) = f(v, u)$
- 4) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha u, v) = \alpha f(u, v)$
- 5) $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$

1)~5) を全て満たしさえすれば、どのような f を内積

としてもよい。それは問題や対象の構造に応じて、人間が都合の良いように導入(定義)するのである。

問 634 内積の公理を、5回書いて記憶せよ。

問 635 f は線型空間 X の内積とする。 $\alpha \in \mathbb{R}$ とする。 $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in X$ とする。

(1) $f(u, v)$ は、 v を固定すると、 u について線型写像になることを示せ。ヒント:上の公理の 4) と 5)

(2) 次式を示せ。ヒント:上の公理の 3) と 4)

$$f(u, \alpha v) = \alpha f(u, v) \tag{23.2}$$

(3) 次式を示せ。ヒント:上の公理の 3) と 5)

$$f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2) \tag{23.3}$$

(4) $f(u, v)$ は、 u を固定すると、 v について線型写像になることを示せ。

(5) 次式を示せ。ヒント: 上の公理の 4)。 $0 = 00$ 。

$$f(u, 0) = f(0, u) = 0 \tag{23.4}$$

この問題からわかるように、内積は、2つの引数のそれぞれに関して線型写像である。このように、複数の引数を持つ写像で、それぞれの引数に関して線型写像であるような写像のことを、多重線型写像という。内積は多重線型写像の一種である。

では、内積の例を考えよう。

例 23.1 $u, v \in \mathbb{R}^2$ とする。

$$u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \tag{23.5}$$

とおく。当然ながら、 (u, v) は $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ の要素である^{*3}。

^{*1} このように我々が素朴な意味で平面や空間とよぶものを、それぞれ「2次元ユークリッド空間」「3次元ユークリッド空間」と呼ぶ。

^{*2} 公理とは定義と同じようなもの。感覚的には、定義よりも偉い。

^{*3} これがわからない人は、まだ「直積」を理解できていない。

さて、ここでは $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ から \mathbb{R} への写像 f を、

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x_1x_2 + y_1y_2 \quad (23.6)$$

と定義してみよう。 f は我々が高校以来なじんできた、「数ベクトルの内積」である。でも、本当にこれを内積と呼んでもよいのだろうか？ 換言すれば、この写像は、上の内積の公理をみたすのだろうか？

まず公理の 1) について。 $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = x_1^2 + y_1^2$ となるが、 x_1 も y_1 も実数なので、これは明らかに 0 以上になる。従って公理の 1) は成り立つ。

問 636 同様にして、式 (23.6) の f が内積の公理の 2) から 5) も全て満たすことを示せ。

問 637 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ から \mathbb{R} への様々な写像を考えてみよう。 $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ とする。

(1) 次式の写像 f は内積であることを示せ:

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2x_1x_2 + 3y_1y_2 \quad (23.7)$$

(2) 次式の写像 f は内積でないことを示せ:

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x_1x_2 \quad (23.8)$$

ヒント: 公理の 2) が成り立たない。その反例を示せばよい。

(3) 次式の写像 f は内積でないことを示せ:

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \quad (23.9)$$

ヒント: 公理の 4) と 5) が成り立たない。そのどちらかの反例を示せばよい。

問 638 $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で積分可能^{*4}な関数 $f(x)$ からなる線型空間 X を考える。 $f(x), g(x) \in X$ について、

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \quad (23.10)$$

という演算を考える。この演算は内積である (内積の公理を全て満たす) ことを示せ。

普通は \mathbb{R}^2 の内積と言えば、式 (23.6) のことである。

実際、例 23.1 と問 636 でみたように、式 (23.6) は内積の公理を満たすから内積と呼んでよい。しかし、数学的には、それ以外にも式 (23.7) のように \mathbb{R}^2 の内積といえるものが存在するのだ。また、関数の集合が作る線型空間には、式 (23.10) のように積分で表されるような内積が存在するのだ。要するに、内積は諸君が思うよりも広くて柔軟な概念なのだ。

f が内積であるとき、慣習的に、 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ を

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \quad (23.11)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (23.12)$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad (23.13)$$

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle \quad (23.14)$$

と書いたりする。式 (23.11) は物理学や工学等の応用数学で、特に幾何ベクトルの内積や、数ベクトル空間の内積のときによく使われる。式 (23.12), 式 (23.13) は、純粋数学の分野や、応用数学でも関数空間の内積によく使われる。式 (23.14) は量子力学で使われる。

問 639 $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (3, -4)$ とする。

(1) \mathbb{R}^2 の内積を式 (23.6) で定義すると、 $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = -5$ であることを示せ。

(2) \mathbb{R}^2 の内積を式 (23.7) で定義すると、 $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = -18$ であることを示せ。

問 640 $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で積分可能な関数 $f(x)$ からなる線型空間 X を考える。 X の内積を式 (23.10) で定義する。このとき

$$f(x) = x^2 \in X \quad (23.15)$$

$$g(x) = x + 1 \in X \quad (23.16)$$

について、内積 $\langle f(x), g(x) \rangle$ は $1/3$ になることを示せ。

23.2 計量空間

何らかの内積が導入された線型空間のことを、「計量空間」(metric space) とか「内積空間」と呼ぶ。

一般に、計量空間 X の要素 (つまりベクトル) \mathbf{u} について、内積の公理 1) より $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}$ はゼロ以上の実数になる。そこで、 $\sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}$ という量を考える。これを \mathbf{u} のノ

*4 (発展) 厳密に言えば、2 乗可積分

ノルムと呼び^{*5}, $|\mathbf{u}|$ と書く^{*6}。つまり,

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}} \quad (23.17)$$

と定義する。ノルムは、ベクトルの「大きさ」とか「長さ」のような概念である。実際、式 (23.17) を見ればわかるように、 $|\mathbf{u}|$ は常にゼロ以上の実数であり、それがゼロのときは $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ である。これらは幾何ベクトルに関する「大きさ」の性質とよく似ている。

ならば式 (23.17) を「ノルム」なんて呼ばないで「大きさ」と呼べばいいではないか、と思うところだが、「大きさ」というと、どうしても線分をイメージして、線分の端から端までというイメージが湧いてしまう。しかし一般的なベクトルには線分のイメージは無い。だから「大きさ」というと紛らわしいので、少しなじみの薄い「ノルム」という語を使うのである。

ノルムが 1 であるようなベクトルを「単位ベクトル」と呼ぶ(定義)。

問 641 計量空間とは何か。

問 642 計量空間において、ノルムとは何か。ヒント: 「ノルムは、ベクトルの長さのような概念である」という答えはダメ。定義を述べよ。

問 643 単位ベクトルとは何か。

問 644 $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (3, -4)$ とする。

(1) \mathbb{R}^2 の内積を式 (23.6) で定義する。このとき、

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{5}, \quad |\mathbf{v}| = 5$$

であることを示せ。

(2) \mathbb{R}^2 の内積を式 (23.7) で定義する。このとき、

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{14}, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{66}$$

であることを示せ。

この問題で気持ち悪くなった人もいるかもしれない。 $\mathbf{u} = (1, 2)$ の「長さ」は、ピタゴラスの定理から、 $\sqrt{5}$ である。それが、式 (23.7) というヘンテコリンな内積でノルムを考えると $\sqrt{14}$ になってしまう! 何かがおかしい気がする。

実は、何もおかしくはないのである。我々が、「 $\mathbf{u} = (1, 2)$ の長さは $\sqrt{5}$ である」と考えるのは、もともと、ほとんど無意識のうちに次のようなことを考えているのだ: まず、平面の上に、原点を定めて、図形的に直交する 2 つの軸を設定する。次に、片方の軸上に、原点から長さ 1 の点を取り、もう片方の軸上に原点から長さ 2 の点をとる。これらの点と原点を頂点とする四角形を考えて、その対角線に相当する平面ベクトルを考える。これが、 $(1, 2)$ に対応する平面ベクトルである、と考える。その平面ベクトルの長さは確かにピタゴラスの定理によって $\sqrt{5}$ になる。

しかし、このようなやり方で幾何ベクトルと数ベクトルと同一視するのは、便利ではあるが、必然的ではない。以前も述べたように、いろんなベクトルと数ベクトルを同一視するときは、その背後にどのような基底をとるかが重要である。基底のとり方が変われば、結果も変わるのだ。この場合では、基底となる幾何ベクトルが直交していなかったり、大きさが 1 でなかったりしたら、「 $(1, 2)$ の長さは $\sqrt{5}$ 」とはならない場合もあることがわかるだろう。

ちなみに、問 644 の (1) と (2) は、同じ線型空間ではあるが、内積の定義が違う。従って、数学ではこれらは異なる計量空間とみなすのである。

問 645 $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で積分可能な関数 $f(x)$ からなる線型空間 X を考える。 X の内積を式 (23.10) で定義すると、 X は計量空間になる。このとき

$$f(x) = x^2 \in X \quad (23.18)$$

$$g(x) = x + 1 \in X \quad (23.19)$$

について、 $|f(x)| = \sqrt{1/5}$, $|g(x)| = \sqrt{4/3}$ であることを示せ。

問 646 計量空間 X における、0 でない任意のベクトル \mathbf{u} について、

$$\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \quad (23.20)$$

^{*5} 厳密に言えば、ノルムは内積を使わなくても定義できる。線型空間 X から \mathbb{R} への写像がいくつかの条件(ノルムの公理)をみたせば、その写像をノルムと言う。 $\sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}$ はその公理を満たすからノルムと呼べるのだ。

^{*6} $\|\mathbf{u}\|$ と書く場合もある。

は単位ベクトルであることを示せ。

ところで、高校数学では、平面や空間（ユークリッド空間）の幾何ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} について、

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \quad (23.21)$$

というのを内積の定義としたが、これはあくまで幾何ベクトルの内積のひとつであり、内積の一般的・本質的な定義ではない。内積とは、上述の公理を全て満たすような写像のことである。それが内積の一般的・本質的な定義である。ただ、式 (23.21) は上述の公理を全て満たすし（ここでは確認しない）、高校数学ではそれ以外の内積は出てこないから、教育的な配慮（高校生にいきなり抽象的なことを教えこむと混乱するという危惧）で式 (23.21) を内積と定義したのである。要するに式 (23.21) は内積の一例にすぎない。

ならば式 (23.21) は幾何ベクトルにしか通用しないのかというと、そうでもないのだ。実は、式 (23.21) は、むしろ角（角度）の定義として、「幾何ベクトルの集合」以外のあらゆる計量空間について通用するのだ。それはこういうことだ：2次元平面や3次元空間の幾何ベクトルどろしがなす角は、図形的に定義できるが、それ以外の計量空間に属するベクトルには、角の概念が存在するとは限らない。しかし計量空間である以上は内積は存在する。ならば、その計量空間の任意のベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} について、

$$\frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \quad (23.22)$$

という量は計算できる。そこで、

$$\cos \theta := \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \quad (23.23)$$

という式（これは式 (23.21) と同じこと）によって、必ずしも幾何ベクトルとは限らないような2つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} どちらの「なす角 θ 」を定義するのだ。

角が決まれば、「直交」という概念も導入できる。すなわち、直角のコサインはゼロであることから類推して、式 (23.22) の値がゼロのときを「直交」と定めるのだ。つまり、計量空間 X において、0 でない2つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} が、

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0 \quad (23.24)$$

となるとき、「 \mathbf{a} と \mathbf{b} は直交する」と言おう（定義）。

ここで「直交」が出てきたので、ついでに「平行」という概念も確認しておこう。一般に、0 でない2つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} が、適当なスカラー α によって

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b} \quad (23.25)$$

とできるとき、「 \mathbf{a} と \mathbf{b} は平行である」と言おう（定義）。これは明らかに、幾何ベクトルや数ベクトルの「平行」と整合的である。

さて、これらの直交と平行の定義を較べて欲しい。「直交」には内積が必要だったが、平行には内積は必要ない。つまり、平行はどんな線型空間にも存在する概念だが、直交は計量空間にしか存在しない概念なのである。

問 647 計量空間において、2つのベクトルのなす角とは何か。

問 648 計量空間において、2つのベクトルが直交するとはどういうことか。

問 649 $\mathbf{u} = (1, 2), \mathbf{v} = (3, -4)$ とする。

- (1) \mathbb{R}^2 の内積を式 (23.6) で定義する。このとき \mathbf{u} と \mathbf{v} のなす角 θ を求めよ。ヒント：式 (23.23) を使う。
- (2) \mathbb{R}^2 の内積を式 (23.7) で定義する。このとき \mathbf{u} と \mathbf{v} のなす角 θ を求めよ。ヒント：式 (23.23) を使う。

問 650 $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で積分可能な関数からなり、内積を式 (23.10) で定義される計量空間 X を考える。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \in X \\ g(x) &= x + 1 \in X \end{aligned}$$

について、 $f(x)$ と $g(x)$ のなす角 θ を求めよ*7。ヒント：式 (23.23) を使う。

*7 この θ は、 $f(x)$ や $g(x)$ のグラフの上での傾きや角度とは全く関係ない。もはや、「図形的な意味を持たない角」である。図形的な意味を持たない角など、何の意味があるのだ!と叫びたくなる。しかし数学とはそういうものなのだ。数学は、人間の経験的な直感や感覚や先入観や想像力を超越して、どんどん抽象的で普遍的な世界を作っていくのだ。

問 651 どんな角も, そのコサインは -1 以上 1 以下の範囲にあるはずなので, 式 (23.23) が意味を持つには, 右辺が -1 以上 1 以下であることが保証されていなければならない。そのことを内積の公理から証明してみよう。

- (1) 計量空間 X の任意のベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} を考える。 \mathbf{a}, \mathbf{b} のいずれもゼロでないとする。実数 t に関する, 以下のような関数 $f(t)$ を考える:

$$f(t) = (t\mathbf{a} + \mathbf{b}) \bullet (t\mathbf{a} + \mathbf{b}) \quad (23.26)$$

次式が成り立つことを内積の公理から示せ。

$$\forall t, f(t) \geq 0 \quad (23.27)$$

- (2) 内積の公理から次式を示せ:

$$f(t) = |\mathbf{a}|^2 t^2 + 2(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})t + |\mathbf{b}|^2 \quad (23.28)$$

- (3) t に関する 2 次方程式 $f(t) = 0$ を考える。この方程式は, 実数解を持たないか, 持つとしても重解であることを示せ。ヒント: 式 (23.27)

- (4) 次式を示せ:

$$(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \leq 0 \quad (23.29)$$

ヒント: 2 次方程式の判別式を考えればよい。

- (5) 次式を示せ:

$$|\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \quad (23.30)$$

ヒント: 左辺の $||$ は計量空間 X におけるノルムではなく, 実数の絶対値を表すことに注意。

- (6) 次式を示せ:

$$-|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \leq \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \quad (23.31)$$

- (7) 次式が成り立つことを示せ:

$$-1 \leq \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \leq 1 \quad (23.32)$$

式 (23.32) をシュワルツの不等式という。

問 652 計量空間において, ゼロベクトルでない 2 個のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ が直交するとしよう。すなわち, $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = 0$ である。ここでもし適当なスカラー p_1, p_2 によって, $p_1 \mathbf{v}_1 + p_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ とできるとしよう。

- (1) この両辺について \mathbf{v}_1 や \mathbf{v}_2 との内積を考えて次式

を示せ:

$$p_1 |\mathbf{v}_1|^2 = p_2 |\mathbf{v}_2|^2 = 0 \quad (23.33)$$

- (2) この式が成り立つには $p_1 = p_2 = 0$ でなくてはならないことを示せ。
 (3) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ は線型独立であることを示せ。

問 653 ゼロベクトルでない複数個のベクトルが互いに直交していれば, それらは線型独立であることを示せ。ヒント: 前問のやりかたを参考にせよ。

23.3 クロネッカーのデルタ

正の整数 i, j について, δ_{ij} という量を, 以下のように定義する:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \quad (23.34)$$

この δ_{ij} は, 「クロネッカーのデルタ」と呼ばれる。例えば, $\delta_{12} = 0, \delta_{33} = 1$ である。

問 654 クロネッカーのデルタとは何か?

問 655 3 次元ユークリッド空間の x 軸, y 軸, z 軸のそれぞれに平行で大きさ 1 のベクトルを $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ とする。次式を示せ。

$$\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (23.35)$$

23.4 正規直交基底

計量空間 X の中で, 互いに直交 (内積がゼロ) であり, なおかつそれぞれのノルムが 1 であるようなベクトルからなる基底を, 正規直交基底という。すなわち,

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset X \quad (23.36)$$

について (n は正の整数),

$$\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (23.37)$$

であり*8, かつ, その線型結合で X の全てのベクトルを表すことができるとき, 式 (23.36) (の左辺) を正規直交基底という (定義). 「正規」とはここでは「ノルムが 1」ということを表す.

正規直交基底の嬉しいところは, 以下に示すように, 座標 (つまり線型結合の係数) を簡単に計算できることである. 例えば, 計量空間 X のベクトル \mathbf{x} を式 (23.36) の線型結合で以下のように表したいとする:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n \quad (23.38)$$

ここで k 番目の係数 (座標成分) である x_k の値を求めるには, \mathbf{x} と \mathbf{e}_k の内積をとるだけでよいのだ. 実際,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}_k &= (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n) \bullet \mathbf{e}_k \\ &= x_1 \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_k + x_2 \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_k + \cdots + x_n \mathbf{e}_n \bullet \mathbf{e}_k \\ &= x_k \mathbf{e}_k \bullet \mathbf{e}_k = x_k \end{aligned} \quad (23.39)$$

となることは, 式 (23.37) から簡単にわかる.

問 656 \mathbb{R}^2 の内積を式 (23.6) で定義する. いま,

$$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (23.40)$$

$$\mathbf{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (23.41)$$

とする.

(1) i, j を, それぞれ 1 か 2 とする. 次式を示せ:

$$\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (23.42)$$

(2) \mathbb{R}^2 のベクトル:

$$\mathbf{u} = (2, -1) \quad (23.43)$$

について, $\mathbf{u} \bullet \mathbf{e}_1$ と $\mathbf{u} \bullet \mathbf{e}_2$ をそれぞれ求めよ.

(3) 上の \mathbf{u} を, \mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_2 の線型結合として表わせ.

(4) \mathbb{R}^2 のベクトル (x, y) を, \mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_2 の線型結合として表わせ.

問 657 a, b を定数とする $f(x) = ax + b$ という形の関数 (1 次関数) の集合 X を考える. X は線型空間であり, 内積を式 (23.10) で定義することで計量空間になる.

いま,

$$e_1(x) = 1$$

$$e_2(x) = \sqrt{3} x$$

とする.

- (1) $\langle e_i(x), e_j(x) \rangle = \delta_{ij}$ を示せ.
- (2) X の要素である関数 $f(x) = 2x + 1$ について, $\langle f(x), e_1(x) \rangle$ と $\langle f(x), e_2(x) \rangle$ をそれぞれ求めよ.
- (3) $f(x) = 2x + 1$ を $e_1(x)$ と $e_2(x)$ の線型結合として表せ.
- (4) $f(x) = ax + b$ を $e_1(x)$ と $e_2(x)$ の線型結合として表せ.

問 658 a, b を定数とする $f(x) = a \sin(x + b)$ という形の関数 (ただし $-\pi \leq x \leq \pi$ とする) の集合である関数空間 X について, 内積 \langle, \rangle を以下で定義する:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \quad (23.44)$$

これは式 (23.10) とほとんど同じ (係数と積分範囲がちょっと違うだけ) なので, 内積の公理を満たすことはわかるだろう. さて,

$$\{\sin x, \cos x\} \quad (23.45)$$

は, X の正規直交基底となることを示せ.

問 659 任意の計量空間 X について, X のベクトル \mathbf{x} が式 (23.38) のように正規直交基底の線型結合であらわされるとき, 次式が成り立つことを示せ:

$$|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \quad (23.46)$$

ヒント: 式 (23.37).

式 (23.46) は, ピタゴラスの定理の拡張である. ピタゴラスの定理は, 正規直交基底で表現される時に限って, 一般の線型空間に拡張されるのだ.

*8 互いに直交しているから, 線型独立であることは問 652 から明らか.

23.5 フーリエ級数

$-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲で積分可能^{*9}な関数 $f(x)$ からなる線型空間 X について、内積 \langle, \rangle を以下のように定める:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \quad (23.47)$$

問 660 n, m を 1 以上の任意の整数として、以下の式が全て成り立つことを示せ。

$$\langle \cos nx, \cos mx \rangle = \delta_{nm} \quad (23.48)$$

$$\langle \sin nx, \sin mx \rangle = \delta_{nm} \quad (23.49)$$

$$\langle \sin nx, \cos mx \rangle = 0 \quad (23.50)$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = 1 \quad (23.51)$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos nx \right\rangle = 0 \quad (23.52)$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx \right\rangle = 0 \quad (23.53)$$

$$\langle 1, 1 \rangle = 2 \quad (23.54)$$

式 (23.48) と式 (23.49) のヒント: 積和公式。

式 (23.50) のヒント: 偶関数かける奇関数は奇関数^{*10}。

$\sin nx$ や $\cos nx$ のように三角関数の中で x にかかっている係数 n のことを、「波数」と呼ぶ。一般的には、波数は 2π を波長で割ったものである。

このように、整数を波数に持つような三角関数: $\cos nx$ や $\sin mx$ などと定数関数 $1/\sqrt{2}$ は、自分自身との内積は 1 であり、他との内積はゼロである。実は、このような三角関数の集合

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos nx, \sin nx \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad (23.55)$$

すなわち

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots \right\} \quad (23.56)$$

は、 X の正規直交基底になるのである。

つまり、たいていの関数 $f(x)$ は、 $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲で、適当な実数 $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ を用いて、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots \\ &\quad + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned} \quad (23.57)$$

というふうに、様々な波数の三角関数と定数関数 $1/\sqrt{2}$ の線型結合 (重ね合わせ) であらわすことができる^{*11}。

関数を式 (23.57) のように表現することをフーリエ級数展開 (Fourier series expansion) と呼ぶ。テーラー展開は、関数を x^n の形の関数の線型結合としてあらわしていたが、フーリエ級数展開は、関数を様々な波数の三角関数の線型結合としてあらわすのだ。

では、その線型結合の係数、つまり「適当な実数 $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ 」は、どうやって決めればいいのか? そこで活躍するのが、正規直交基底の考え方である:

問 661 関数 $f(x)$ が、式 (23.57) のようにあらわされていたとする。 $1 \leq n$ として、

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = a_0 \quad (23.58)$$

$$\langle f(x), \cos nx \rangle = a_n \quad (23.59)$$

$$\langle f(x), \sin nx \rangle = b_n \quad (23.60)$$

となることを示せ。ヒント: 積分とかする必要は無い。式 (23.39) の考え方をを使うだけ。

これを使って、具体的な関数をフーリエ級数展開してみよう。

問 662 $f(x) = x$ を、 $-\pi < x < \pi$ の範囲でフーリエ級数に展開してみよう。すなわち、

$$x = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (23.61)$$

とあらわしたい。

*9 (発展) 厳密に言えば、2 乗可積分

*10 この辺の事情を忘れた人は「数学リメディアル教材」の偶関数・奇関数の項を参照せよ。

*11 ただし、 $f(x)$ が不連続点を含むときは、この話はちょっと微妙になる。また、世間的には a_0 の部分をちょっと違う流儀で定義するのが普通である。

(1)

$$a_0 = \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{\sqrt{2}} dx \quad (23.62)$$

を計算することにより, $a_0 = 0$ となることを示せ。

(2) $1 \leq n$ として,

$$a_n = \langle x, \cos nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx \quad (23.63)$$

を計算することにより, $a_n = 0$ となることを示せ。

(3) $1 \leq n$ として,

$$b_n = \langle x, \sin nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx \quad (23.64)$$

を計算することにより,

$$b_n = -\frac{2 \cos n\pi}{n} = \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \quad (23.65)$$

となることを示せ。

(4) 以上より, $f(x) = x$ は以下のようにフーリエ級数展開される:

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \quad (23.66)$$

つまり,

$$x = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right) \quad (23.67)$$

が成り立つ。もとの $f(x) = x$ と, 波数 1 まで, 波数 2 まで, 波数 3 までのそれぞれのフーリエ級数展開の結果を, グラフにかけ (パソコンで, $-9 < x < 9$ 程度の範囲で, x の刻みは 0.1 以下とせよ)。波数が増えるに従って, もとの関数に近づいていく様子が見えるだろうか? ヒント: 図 23.1 (p96)

図 23.1 を見たらわかるように, 式 (23.67) はもとの関数 $f(x) = x$ を $-\pi < x < \pi$ の範囲ではよく再現するが, その外側になると, $-\pi < x < \pi$ のパターンを周期的に繰り返す。このように, フーリエ級数展開の結果は, 有限区間の関数 (の近似) を周期的に繰り返すものになる。

問 663 式 (23.67) に $x = \pi/2$ を代入して, 次式を示せ:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} \quad (23.68)$$

問 664 以下のことを示せ。なお, フーリエ級数展開は, $-\pi < x < \pi$ の範囲で, 式 (23.57) の形で行うこととする。 n は正の整数とする。

- (1) 偶関数をフーリエ級数展開すると, $\sin nx$ の係数は全てゼロである。ヒント: 偶関数かける奇関数は奇関数。
- (2) 奇関数をフーリエ級数展開すると, 定数部分 ($1/\sqrt{2}$ のこと) と $\cos nx$ の係数は全てゼロである。

問 665 以下の関数を考える:

$$f(x) = x^2 \quad (23.69)$$

- (1) $f(x)$ を $-\pi < x < \pi$ の範囲でフーリエ級数に展開すると, 次式になることを示せ:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (23.70)$$

- (2) もとの $f(x) = x^2$ と, 波数 1 まで, 波数 2 まで, 波数 3 までのそれぞれのフーリエ級数展開の結果を, グラフにかけ (パソコンで, $-9 < x < 9$ 程度の範囲で), ヒント: 図 23.2 (p97)
- (3) 式 (23.70) に $x = \pi$ を代入して, 次式を示せ:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (23.71)$$

これで, 数学リメディアル教材でやった数値計算結果を, 解析的に証明できた。

問 666 以下の関数を考える:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \text{ のとき} \\ -1 & x < 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (23.72)$$

- (1) $f(x)$ を $-\pi < x < \pi$ の範囲でフーリエ級数に展開すると, 次式になることを示せ:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) \quad (23.73)$$

- (2) もとの $f(x)$ と, 波数 1 まで, 波数 3 まで, 波数 5 までのそれぞれのフーリエ級数展開の結果を, グラフにかけ (パソコンで, $-9 < x < 9$ 程度の範囲で), ヒント: 図 23.3 (p97)
- (3) 式 (23.73) に $x = \pi/2$ を代入して, 式 (23.68) を示せ。

23.6 複素計量空間

\mathbb{C} を体とする線型空間にも内積は定義できる。その場合、内積は、

$$f: X \times X \rightarrow \mathbb{C} \quad (23.74)$$

という写像になり、その条件 1) ~ 5) のうち、3), 4) が

$$3') f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{f(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$$

$$4') \forall \alpha \in \mathbb{C}, f(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

と拡張される (上付きの横棒は複素共役を表す)。このような内積を持つ、 \mathbb{C} を体とする線型空間を「複素計量空間」とか「複素内積空間」という。後に学ぶように、量子力学では、複素計量空間が大変重要な役割を果たす。

問 667 複素計量空間 X の内積 f について、
 $\forall \mathbf{u} \in X, f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}$ であることを示せ。

演習問題

演習問題 12 式 (23.70) について、左辺どうしの内積と、右辺どうしの内積を考えてみよう。すると、

$$\begin{aligned} \langle x^2, x^2 \rangle &= \left\langle \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx, \right. \\ &\quad \left. \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \right\rangle \quad (23.75) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(1) 左辺は、以下のようになることを示せ：

$$\langle x^2, x^2 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{5} \pi^4 \quad (23.76)$$

(2) 右辺は、以下のようになることを示せ：

$$\left\langle \frac{\pi^2}{3}, \frac{\pi^2}{3} \right\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2} \right)^2 \quad (23.77)$$

ヒント：式 (23.48), 式 (23.46) 等。

(3) 以上より、次式が成り立つことを示せ：

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} \quad (23.78)$$

演習問題 13 熱力学と量子力学によると、どのような物体も、その温度に応じた強さ・波長の光を発している。この現象を熱放射という。太陽や白熱電球が光るのは熱

放射である。熱力学と量子力学によると、理想的な物体が発する熱放射は以下の式で表されることが理論的にわかっている：

$$F(\lambda, T) d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \quad (23.79)$$

これを「プランクの法則」という。ここで、 $F(\lambda, T) d\lambda$ は、絶対温度 T の物体の単位表面積から単位時間あたりに放射される、波長が λ と $\lambda + d\lambda$ の間にあるような光のエネルギーである。 h, c, k_B はそれぞれ、プランク定数・光の速さ・ボルツマン定数である。

上記の $F(\lambda, T)$ を、0 から ∞ の波長範囲で積分すると、絶対温度 T の物体の単位表面積から単位時間あたりに放射される光のエネルギー $B(T)$ が得られる。すなわち、

$$B(T) = \int_0^{\infty} F(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \quad (23.80)$$

である。この積分を実行してみよう (といっても、不定積分はできない)。まず、

$$s := \frac{hc}{\lambda k_B T} \quad (23.81)$$

とする。

(1) 次式を示せ：

$$B(T) = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \frac{s^3 ds}{e^s (1 - e^{-s})} \quad (23.82)$$

(2) $0 \leq s$ であることに注意して、次式を示せ：

$$\begin{aligned} B(T) &= \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} e^{-s} s^3 (1 + e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} \dots) ds \\ &= \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} e^{-s} s^3 (1 + e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} \dots) ds \end{aligned} \quad (23.83)$$

ヒント： $1/(1-x)$ のテーラー展開

演習問題 14 上の問題の続き。

(1) n を 1 以上の任意の整数とする。次式を示せ：

$$\int_0^{\infty} s^3 e^{-ns} ds = \frac{6}{n^4} \quad (23.84)$$

ヒント：部分積分を繰り返す。

(2) 上の式と式 (23.83) より、次式を示せ：

$$B(T) = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^4} \quad (23.85)$$

(3) 次式を示せ (ヒント: 問 12):

$$B(T) = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} T^4 \quad (23.86)$$

(4) ここで,

$$\sigma := \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} \quad (23.87)$$

とする。この σ を、ステファン・ボルツマン定数と呼ぶ。これを使うと、

$$B(T) = \sigma T^4 \quad (23.88)$$

と書ける。これをステファン・ボルツマンの法則という。 h, c, k_B の値を調べて、 σ の値を計算せよ。また、 σ の値をネット等で調べて、君の計算結果と比較せよ。

(5) 君の体表面から、熱放射によって、どのくらいの熱量が単位時間あたりに発するか、見積もれ。それはデスクトップパソコンの消費電力と比べて大きいのか? 小さいか?

注: 諸君は「スペクトル」という言葉を聞いたことがあるだろうか。例えば、有機化合物の同定に用いられる、赤外線吸収スペクトルというものがある。化合物に電磁波 (赤外線) を当て、それぞれの波長 (もしくは波数) の電磁波がどのくらい吸収されるか、をあらわす。その背景には、どんな波形の電磁波も、様々な波長 (波数) の正弦波 (三角関数) の波形をした電磁波の重ね合わせと考えられるという事実が存在する。それはもちろん、電磁波の線型性のおかげ (後述) なのだが、任意の波形を三角関数で分解するという発想は、ここで見たフーリエ級数展開そのものである。

ついでに指摘しておく、諸君はバネについたおもりの運動の解析をたくさんやってきたが、それは、例えば有機化合物の中の電子に電磁波が当たったときに、電子がどのように振動して電磁波を吸収するかを表現する数学的モデルの原点である。

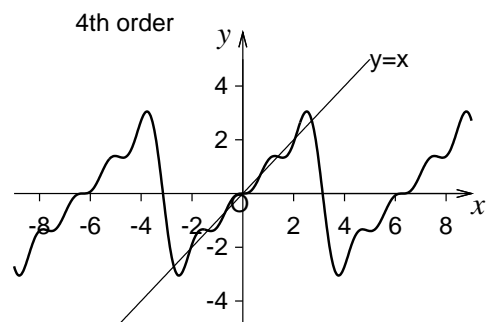
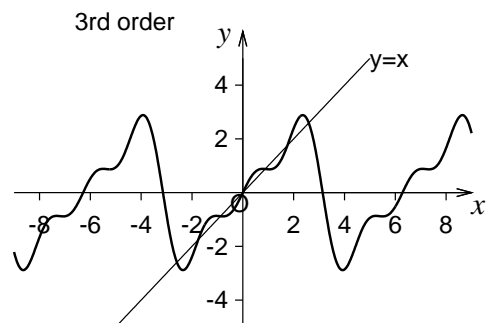
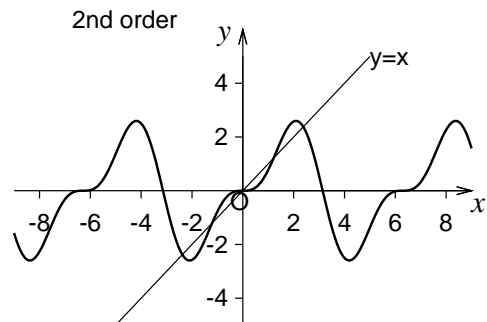
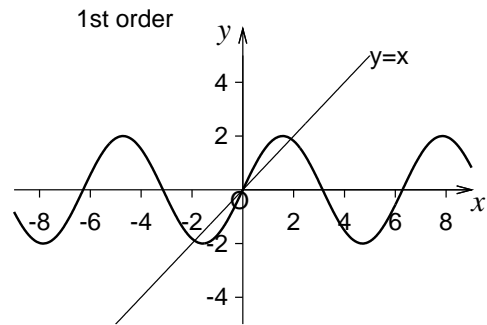


図 23.1 関数 $y = x$ のフーリエ級数展開。式 (23.67) の右辺で、波数 1, 2, 3, 4 のそれぞれまでで和を打ちきったもののグラフを上から並べた。 $-\pi$ から π までの範囲でよく合うことに注意 (それ以外では合わない)。

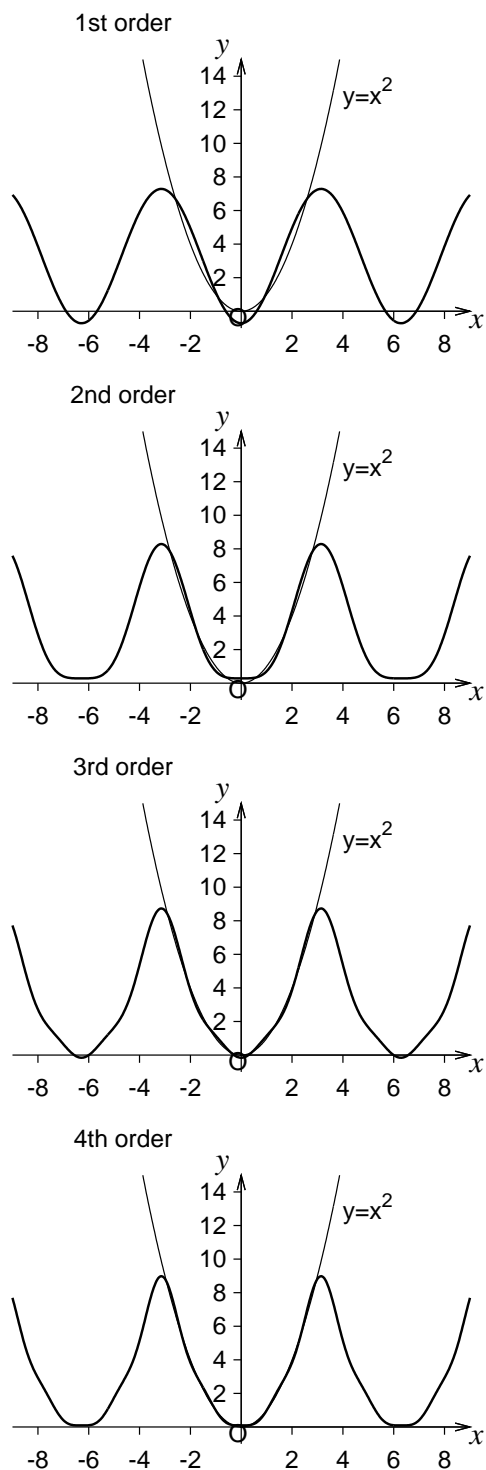


図 23.2 関数 $y = x^2$ のフーリエ級数展開。式 (23.70) の右辺で、波数 1, 2, 3, 4 のそれぞれまで和を打ちきったもののグラフを上から並べた。 $-\pi$ から π までの範囲でよく合うことに注意 (それ以外では合わない)。

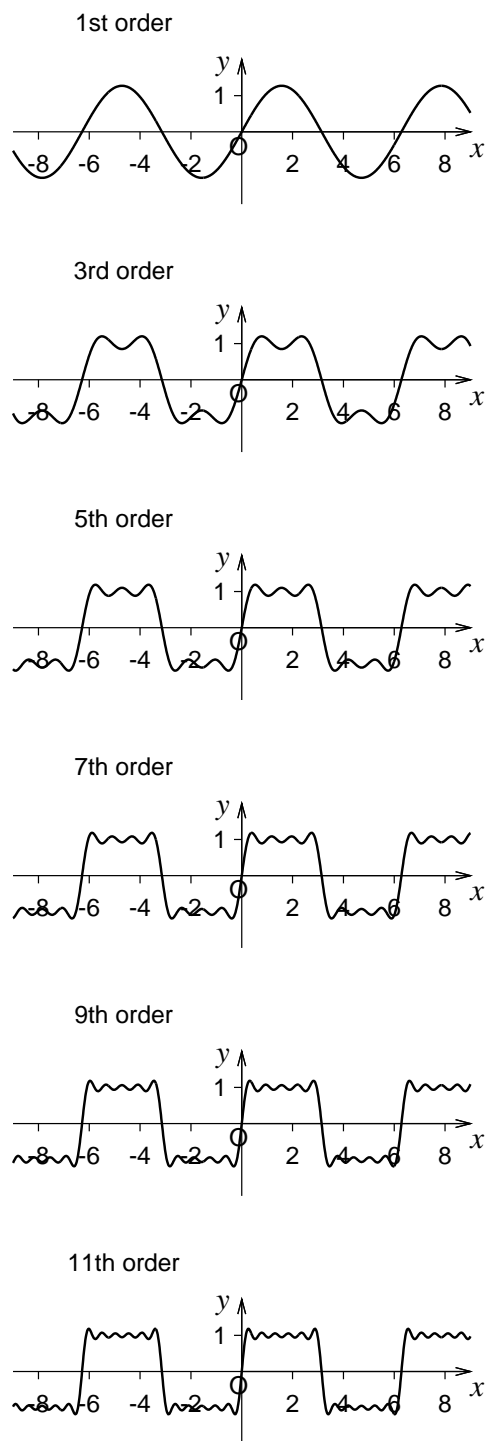


図 23.3 式 (23.73) のフーリエ級数展開。式 (23.73) の右辺で、波数 1, 3, 5, 7, 9, 11 のそれぞれまで和を打ちきったもののグラフを上から並べた。 $-\pi$ から π までの範囲でよく合うことに注意 (それ以外では合わない)。

23.7 解答

答 634 略 (5 つの式を 5 回繰り返して書けば良い)

答 635

- (1) α を任意のスカラーとする。公理の 4) より、 $f(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 。また、公理の 5) より、 $f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ 。従って、 f は \mathbf{u} について線型写像。
- (2) 公理 3) より、 $f(\mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}) = f(\alpha \mathbf{v}, \mathbf{u})$ 。公理の 4) より、これは $\alpha f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ に等しい。再び公理 3) より、これは $\alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ に等しい。
- (3) 公理 3) より、 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{u})$ 。公理 5) より、これは $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}) + f(\mathbf{v}_2, \mathbf{u})$ に等しい。再び公理 3) より、これは $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + f(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)$ に等しい。
- (4) 上の 2 つの小問より明らか。
- (5) 公理 4) より、 $f(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{0}\mathbf{0}, \mathbf{u}) = 0f(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = 0$ 。従って、 $f(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = 0$ 。これに公理 3) を使えば、 $f(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = 0$ 。

答 636 $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = x_1^2 + y_1^2 \geq 0$ 。よって公理 1) が成り立つ。この式がゼロになるのは $x_1 = y_1 = 0$ のときに限る。従って、公理 2) も成り立つ。

$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ 。従って公理 3) も成り立つ。 $f(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha x_1x_2 + \alpha y_1y_2 = \alpha(x_1x_2 + y_1y_2) = \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 。従って公理 4) も成り立つ。 $\mathbf{u}_1 = (p_1, q_1), \mathbf{u}_2 = (p_2, q_2)$ とする。 $f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = (p_1 + p_2)x_2 + (q_1 + q_2)y_2 = (p_1x_2 + q_1y_2) + (p_2x_2 + q_2y_2) = f(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ 。従って公理 5) も成り立つ。

答 637

- (1) 略 (前問と同様)。
- (2) $\mathbf{u} = (0, 1)$ とすると、 $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ となるが、 $\mathbf{u} \neq (0, 0)$ である。これは公理 2) に反する。従ってこの f は内積ではあり得ない。
- (3) $\mathbf{u} = (1, 0), \alpha = 2$ とすると、 $f(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2^2 + 1^2 = 5$ となる。一方、 $\alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2(1^2 + 1^2) = 4$ となる。内積ならこれらは一致するはず (つまり、これは公理 4) に反する) 従って、この f は内積ではあり得ない。

答 638 この演算を $F(f, g)$ とおく。明らかに F は $X \times X$

から \mathbb{R} への写像である。さて、

$$F(f, f) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)^2 dx$$

となるが、これは被積分関数 (f^2) が常に 0 以上なので、積分結果も 0 以上のはず。従って公理 1) が成り立つ。また、これが 0 となるには、恒等的に $f(x) = 0$ となるしかない*12。従って、公理 2) が成り立つ。

$$\begin{aligned} F(f, g) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(x)f(x)dx = F(g, f) \end{aligned}$$

なので、公理 3) も成り立つ。 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned} F(\alpha f, g) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \alpha f(x)g(x)dx \\ &= \alpha \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \alpha F(f, g) \end{aligned}$$

なので、公理 4) も成り立つ。

$$\begin{aligned} F(f_1 + f_2, g) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{f_1(x) + f_2(x)\}g(x)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_1(x)g(x)dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_2(x)g(x)dx \\ &= F(f_1, g) + F(f_2, g) \end{aligned}$$

なので、公理 5) も成り立つ。以上より、この演算 F は X の内積である。

答 639

- (1) $1 \times 3 + 2 \times (-4) = -5$
 (2) $2 \times 1 \times 3 + 3 \times 2 \times (-4) = -18$

答 640

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2(x+1)dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^3 + x^2)dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

*12 実はこれは微妙である。正確には、何か所かで不連続に突出的に 0 以外の値をとっても、積分したら 0 になることがありえる。このようなケースを整合的に扱うには、ルベグ積分という考え方が必要である。ここではそのような特異な場合は考えない。興味のある人は以下の本を参照せよ：志賀浩二「固有値問題 30 講」朝倉書店。

答 641 内積が導入された線型空間のこと。

答 642 計量空間の任意の要素 \mathbf{u} について、 $\sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}$ のこと。

答 643 ノルムが 1 であるようなベクトル。

答 644

$$\begin{aligned} (1) \quad |\mathbf{u}| &= \sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \\ (2) \quad |\mathbf{u}| &= \sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}} = \sqrt{2 \times 1^2 + 3 \times 2^2} = \sqrt{14}, \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}} = \sqrt{2 \times 3^2 + 3 \times (-4)^2} = \sqrt{66} \end{aligned}$$

答 645

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 \times x^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^4 dx} = \sqrt{\frac{1}{5}} \\ |g(x)| &= \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x+1) \times (x+1) dx} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x+1)^2 dx} = \sqrt{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

答 646

$$\left| \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \right| = \sqrt{\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \bullet \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}} = \sqrt{\frac{1}{|\mathbf{u}|^2} (\mathbf{u} \bullet \mathbf{u})} = \sqrt{\frac{|\mathbf{u}|^2}{|\mathbf{u}|^2}} = 1$$

ここで、 $|\mathbf{u}|$ は (正の) 実数である。2 つ目の式から 3 つ目の式に移るときに内積の公理 4) を使った。また、3 つ目の式から 4 つ目の式に移るときにノルムの定義を使った。

答 647 2 つのベクトルを \mathbf{a}, \mathbf{b} とするとき、次式を満たす θ のこと。

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (23.89)$$

答 648 2 つのベクトルの内積が 0 になること。

答 649

$$\begin{aligned} (1) \quad |\mathbf{u}| &= \sqrt{5}, \quad |\mathbf{v}| = 5, \quad \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = -5. \\ \text{従って, } \cos \theta &= \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} / (|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|) = -1/\sqrt{5}. \\ \text{従って } \theta &= \cos^{-1}(-1/\sqrt{5}) = 2.0344 \cdots \text{ ラジアン} \\ &= \text{約 } 117 \text{ 度.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad |\mathbf{u}| &= \sqrt{14}, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{66}, \quad \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = -18. \\ \text{従って, } \cos \theta &= \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} / (|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|) = -18/\sqrt{14 \times 66} = \\ &= -9/\sqrt{231}. \text{ 従って } \theta = \cos^{-1}(-9/\sqrt{231}) = \\ &= 2.2045 \cdots \text{ ラジアン} = \text{約 } 126 \text{ 度.} \end{aligned}$$

答 650

$$|f(x)| = \sqrt{\frac{1}{5}}, \quad |g(x)| = \sqrt{\frac{4}{3}}, \quad \langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{3}$$

従って,

$$\cos \theta = \frac{\langle f(x), g(x) \rangle}{|f(x)| |g(x)|} = \frac{1/3}{\sqrt{1/5} \sqrt{4/3}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\sqrt{15}}{6} = 0.869 \cdots \text{ ラジアン} = \text{約 } 50 \text{ 度}$$

答 651

- (1) 内積の公理 1) で、 $\mathbf{u} = t\mathbf{a} + \mathbf{b}$ とすれば与式を得る。
(2)

$$\begin{aligned} f(t) &= (t\mathbf{a} + \mathbf{b}) \bullet (t\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= (t\mathbf{a}) \bullet (t\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{b} \bullet (t\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= (t\mathbf{a}) \bullet (t\mathbf{a}) + (t\mathbf{a}) \bullet \mathbf{b} + \mathbf{b} \bullet (t\mathbf{a}) + \mathbf{b} \bullet \mathbf{b} \\ &= t^2 \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} + t\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + t\mathbf{b} \bullet \mathbf{a} + \mathbf{b} \bullet \mathbf{b} \\ &= t^2 \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} + 2t\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{b} \bullet \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 t^2 + 2(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})t + |\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

注: 普通に計算するだけだが、その背後には、内積の計算に分配法則 (公理 5 や式 (23.3)) と交換法則 (公理 3) が成り立つことが必要なのだ。

- (3) 式 (23.27) が成り立つには、関数 $y = f(t)$ のグラフ (下に凸の放物線) が t 軸より下に来てはならない。それは、 $y = f(t)$ が t 軸と共有点を持たないか、持ったとしても t 軸に 1 点で接することと同値である。いま、 t^2 の係数 $|\mathbf{a}|^2$ は正だから、これは、2 次方程式 $f(t) = 0$ が、実数解を持たないか、持つとしても重解であることと同値である。
(4) 前小問より、2 次方程式 $f(t) = 0$ の判別式がゼロ以下になる。従って、与式が成り立つ。
(5) 前小問より、 $(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$ 。ここで、両辺の正の平方根をとると、不等号の向きは変わらないから、与式を得る。
(6) $0 \leq \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ のときは $|\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}| = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ だから、前小問より、 $0 \leq \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ 。 $0 > \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ のときは $|\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}| = -\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ だから、前小問より、 $-\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ 、

すなわち $-|a||b| \leq \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} < 0$ 。これらをあわせて、
与式を得る。

- (7) 条件より、 $|a||b| \neq 0$ である。前小問の各辺を $|a||b|$ で割れば与式が成り立つ ($0 \leq |a||b|$ なので不等号の向きは変わらない)。

答 652

- (1) $(p_1\mathbf{v}_1 + p_2\mathbf{v}_2) \bullet \mathbf{v}_1 = p_1\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1 + p_2\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_1 = p_1|\mathbf{v}_1|^2$ 。
 $(p_1\mathbf{v}_1 + p_2\mathbf{v}_2) \bullet \mathbf{v}_2 = p_1\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 + p_2\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_2 = p_2|\mathbf{v}_2|^2$ 。
ここで、 $p_1\mathbf{v}_1 + p_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ なので、上の 2 つの式はいずれも 0。従って与式が成り立つ。
- (2) 条件より \mathbf{v}_1 も \mathbf{v}_2 もゼロでないから、 $|\mathbf{v}_1|^2$ も $|\mathbf{v}_2|^2$ もゼロではない (内積の公理 2) より、従って、前小問の式が成り立つには $p_1 = p_2 = 0$ でなくてはならない。
- (3) 前小問より自明。

答 653 $n \in \mathbb{N}$ とする。 n 個の、いずれもゼロベクトルでない、互いに直交するベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ を考える。この線型結合: $p_1\mathbf{v}_1 + p_2\mathbf{v}_2 + \dots + p_n\mathbf{v}_n$ がゼロになったとする。この式を、 \mathbf{v}_k と内積をとれば (k は 1 以上 n 以下の任意の整数)、 $p_k|\mathbf{v}_k|^2$ となる。これはゼロになるはずだが、 \mathbf{v}_k はゼロベクトルでないので、 $|\mathbf{v}_k|^2$ はゼロでない。従って、 $p_k = 0$ となるしかない。従って、 $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$ とならねばならない。従って、 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ は線型独立である。

答 654 2 つの正の整数 i, j について、 $i = j$ のとき 1、それ以外するとき 0 になるような量。

答 655 略。

答 656

- (1) 略。
(2) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{2}$, $\mathbf{u} \bullet \mathbf{e}_2 = -3/\sqrt{2}$ 。
(3) $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2})\mathbf{e}_1 - (3/\sqrt{2})\mathbf{e}_2$
(4)

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{e}_1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{e}_2$$

答 657

- (1) 略。

(2)

$$\langle f(x), e_1(x) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (2x+1) \bullet 1 dx = 1$$

$$\begin{aligned} \langle f(x), e_2(x) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (2x+1)\sqrt{3}x dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 (2x^2+x) dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x+1 = e_1(x) + \frac{2}{\sqrt{3}}e_2(x)$$

(4)

$$f(x) = ax+b = be_1(x) + \frac{a}{\sqrt{3}}e_2(x)$$

答 658 問 629 より、 $\{\sin x, \cos x\}$ は X の基底である。また、

$$\langle \sin x, \sin x \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = 1$$

$$\langle \cos x, \cos x \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = 1$$

$$\langle \sin x, \cos x \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = 0$$

従って、 $e_1(x) = \sin x$, $e_2(x) = \cos x$ とすると、 $\langle e_i(x), e_j(x) \rangle = \delta_{ij}$ が成り立つ。従って、 $\{\sin x, \cos x\}$ は X の正規直交基底。

答 659

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} &= (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &\bullet (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \end{aligned}$$

これを展開すると、 $x_i x_j \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j$ という形の項の和になるが、 $\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ だから、与式を得る。

答 660 略。

答 661 略。

答 662

- (1) 略 (積分を実行すれば、 $=0$ は明らか)。
(2) 略 ($x \cos nx$ は奇関数なので、 $-\pi$ から π までの積分は、 n によらず 0 である)。

(3) C を積分定数として,

$$\begin{aligned}\int x \sin nx \, dx &= -\frac{1}{n} \int x(\cos nx)' \, dx \\ &= -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{1}{n} \int (x)' \cos nx \, dx \\ &= -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{1}{n} \int \cos nx \, dx \\ &= -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} + C\end{aligned}$$

となる(ここで部分積分を使った)。従って,

$$\begin{aligned}b_n = \langle x, \sin nx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= -\frac{2 \cos n\pi}{n} = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}\end{aligned}$$

(4) 略。

答 663 略(偶数番目の項は, $n\pi/2$ が π の整数倍になるため, その \sin がゼロになって消えることに注意。)

答 664 略。

答 665 略。

答 666 略。

答 667 $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = a + bi$ とする ($a, b \in \mathbb{R}$)。内積の公理 3') より, $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \overline{f(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$ だから, $a + bi = \overline{a + bi} = a - bi$ となる。従って, $a + bi = a - bi$ 。従って, $2bi = 0$, 従って, $b = 0$ 。従って, $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = a$, 従って, $f(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ は実数。

答 12 略。

答 13 略。

答 14 略。

一問一答

- 今回のレポートで私の数学観はぶっこわれました。(良い意味です)

... 関数空間の内積とかフーリエ級数って, 数学観をぶっ壊されるよね。

- フーリエ級数分かったときおおーって思いました。1回わかったら早く問題ときたくて急いで家に

帰りました(私は宅通です)。あと, レポートは早くやった方がよいとつくづく感じました。

... フーリエ級数, わかると感動するよね。そしてそこは, もっともっと深く感動する数学の入り口なのです。

- リメディアル教材で出てきたときは, 内積の性質は当たり前と思って読み飛ばしていたが, こうした当たりの前なのが, 大学数学になって重要になっていことがよく分かった。

... そうなのです。「当たり前」なことって, 当たり前すぎて, その重要さに気付かないよね。身近な幸せの大切さに気付にくいと同じ。

- 正規直交基底の価値は分かりましたが, フーリエ級数の価値がまだちょっとわかりません。

... 化学で, 電子や光子の, 「粒子性」と「波動性」って習ったでしょ? あれは実は, フーリエ変換(フーリエ級数を拡張した考え方)なのです。電子や光子が「どこにいるか」に注目する見方が粒子性。「どのような周期(波長)を持っているか」に注目するのが波動性。位置で表された関数をフーリエ変換すると, 三角関数の周期ごとの重みになるでしょ? それが波動性の見方です。だから, フーリエ級数は, 単なる数学テクニクではなく, 人間が世界を認識するやりかたというか枠組みのひとつとして, 科学哲学的に重要なのです。

- 式(20.13)のような2階の線型同次常微分方程式を演算子法で解いて, 2つの解を線型結合したのもも解になる, というのはわかったのですが, それ以外の解はあり得ないのでしょうか?

... あり得ません。2階の常微分方程式は, 2階の微分を含むから, 本来, 数学的には, 2回の積分に相当する操作を経て解に至るはず。そのため, 積分定数に相当するような, 「任意にとることが許される定数」も2つあられるはず。線型同次微分方程式なら, 解の集合は線型空間になるので, 2つの任意定数が許されるということは, 2つの解の線型結合で全ての解(一般解)が表される, ということでもあるのです。

実際に演算子法で解いて2つの線型独立な解が出てきたら, その2つの解の線型結合で, 一般解が表されるのです。

そういう意味で, その2つの解は, 解の集合が作る線型空間の基底であり, その線型空間は2次元である, と言えます。

実際の実用的な問題では、一般解ではまだダメで、2つの係数を具体的に決定し、その状況に応じた一つの解を確定する必要があります。そのためには、微分方程式そのもの以外に、2つの条件が必要です。普通は、それは x に関する初期条件と、 dx/dt に関する初期条件です。同様に、 n を自然数として n 階の常微分方程式の一般解は、 n 個の任意定数を含み、それらは n 個の初期条件で決定されるのです。

- 他人の気分の浮き沈みの波もフーリエ級数展開で数式で表せたらなあ・・・。

... まずどうやって気分を定量化するか、だよな。広島県の有名な高校サッカー指導者は、子供（サッカー選手）の精神状態を、用具の整理整頓の仕方で見ると。いつもより乱れていると、「今日の試合は負けるな」と思うし、そして実際、負けるらしい。

- 線型代数学って、微分方程式をコネまわすためにあるのですか？

... 確かに、線型代数は、線型微分方程式を扱う上で大変有用な道具です。しかし、他にも線型写像の有用性はいろんなところにあります。例えば、図 23.4 のような電気回路を考えましょう（中学校でやりましたね!）。

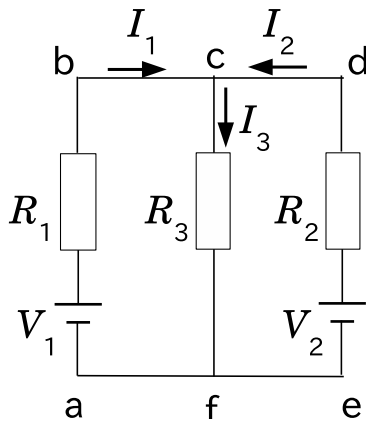


図 23.4 ちょっと複雑な電気回路

それぞれ V_1, V_2 という電圧を持つ2つの電池と、それぞれ R_1, R_2, R_3 という抵抗値を持つ抵抗が、つながっています。この上を、 I_1, I_2, I_3 という電流が図のように流れているとしましょう。「キルヒホッフの法則」から、以下のことが言えます：まず、点 a から点 b 、点 c 、点 f をぐるっとまわって点 a に戻るようなループで、電位の変

化を考えると、

$$V_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0 \quad (23.90)$$

となります（もとの点に戻るなので電位差は0）。同様に、点 e 、点 d 、点 c 、点 f をぐるっとまわって点 e に戻るようなループで、電位の変化を考えると、

$$V_2 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \quad (23.91)$$

となります。また、点 c に入る電流と出る電流は等しいので、

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad (23.92)$$

となります。式 (23.90)、式 (23.91)、式 (23.92) を整理すると、

$$\begin{aligned} V_1 &= R_1 I_1 + R_3 I_3 \\ V_2 &= R_2 I_2 + R_3 I_3 \\ 0 &= I_1 + I_2 - I_3 \end{aligned}$$

となります。これは、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & R_3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (23.93)$$

となります。左辺の数ベクトル（2つの電圧とひとつの0を並べたもの）を「電圧ベクトル」と呼び、 V と書きましょう。右辺の行列を「抵抗行列」と呼び、 R と書きましょう。そして、右辺の最後の数ベクトル（3つの電流を並べたもの）を電流ベクトルと呼び、 I と書きましょう。すると上の式は、

$$V = RI \quad (23.94)$$

となります。これは、ベクトルと行列を使って拡張されたオームの法則です。普通のオームの法則は、1つの抵抗に流れる電流と、その両端の電圧の比例関係に過ぎませんが、こうしてキルヒホッフの法則と組み合わせれば、オームの法則は、複雑な回路について、各場所の電流を、電圧に結びつける線型写像になるのです（数ベクトルに行列をかけるのは線型写像）。そうすると、電圧が与えられた時に電流を求める操作は、

$$I = R^{-1}V \quad (23.95)$$

というふうに、抵抗行列の逆行列を求めるような操作になるわけです。回路がもっともっと複雑になると、抵抗行列は巨大な正方行列になります。そうすると、線型代数の威力がますます発揮されるのです。

第24章

線型偏微分方程式 1: 波動方程式

これまで学んできた微分方程式のほとんどは、独立変数を1つしか持たない微分方程式だった。それを「常微分方程式」と言った。しかし、実用的には、独立変数を複数持つような関数に関する微分方程式も多く扱う。そのような方程式は、偏微分を含むので、偏微分方程式と呼ばれる。既に学んだラプラス方程式*1は、偏微分方程式の例である。この章では、実際の応用的な問題に対して偏微分方程式がどのように活躍するのかを、特に波動現象を例にとって学ぼう*2。

24.1 波動方程式

水面の波、音波、電波など、波動は我々の身近な現象であるだけでなく、学問的にも実用的にも重要な現象である。波を解析し、理解するには、偏微分方程式をはじめ、総合的な数学力(三角関数・指数関数・線型代数)が必要である。逆に言えば、波は数学の良い応用問題である。

まず、波とは何だろうか? ここでは、あまり厳密な定義にこだわらず、図 24.1 のように「一定のパターンが空間を伝わっていく現象」を波としておこう*3。例えば音は空気中の圧力(の偏り)が、ほとんどパターンを変えずに伝わっていく波(音波)である。水面に起きる波では、水面の盛り上がりたり凹んだりするパターンが伝わっていく。

簡単のために、伝わっていく方向を直線上(1次元)に限定して考えよう。例えば細長い水路で、水面が盛り上がったパターンが右向きに波として伝わるとしよう(波は左向きに進むこともできるのだが、ここではとりあえず右向きに限定して考える)。静水面に平行に x 軸をとり、静水面からの水面の高さを ψ とする。

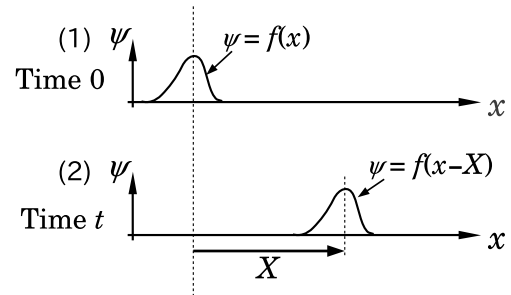


図 24.1 一定のパターンが右方向に伝わる波

図 24.1(1) のように、時刻 $t = 0$ での波の空間パターン(波形という)は、

$$\psi = f(x) \quad (24.1)$$

であったとする。このパターンが、そのまま(変形せずに)一定の速さ c で徐々に右(x の正の方向)に動いて行って、図 24.1(2) のように、時刻 t までに距離 X だけ動いたとする。この時刻での波形は、 $\psi = f(x)$ を右(x 軸方向)に X だけ平行移動したものである、

$$\psi = f(x - X) \quad (24.2)$$

となる(わからぬ人は数学リメディアル教材の第2章を参照)。波は一定の速さ c で移動するとしたので、当然、

$$X = ct \quad (24.3)$$

である。従って、時刻 t での波形は次式になる:

$$\psi = f(x - ct) \quad (24.4)$$

問 668 時刻 0 での波形が $\psi = f(x)$ であるような波が、左向き(x 軸の負の方向)に速さ c で移動するとしたら、時刻 t での波形は次式になることを示せ。

$$\psi = f(x + ct) \quad (24.5)$$

一般に、直線上を一方方向に伝播する波の波形は、式(24.4)や式(24.5)のように書ける。従って、ある現象

*1 式(20.51)、式(20.52)

*2 この章について、物理的な背景がよくわからない、という人は、山本・左巻「新しい高校物理の教科書」講談社ブルーバックスの、p. 171-172 を読んでみよ。

*3 高校物理を学んだ人は、波といえば周期的なサインカーブ(正弦波)を想像するかもしれないが、それは波の一つのありかたに過ぎない。正弦波でない波も世の中にはたくさん存在する。

のメカニズムを表現する微分方程式が、式 (24.4) や式 (24.5) のような解を持つならば、その物理現象は「波」を成すということになる。では、そのような微分方程式は、具体的にはどのようなものなのか、考えてみよう。

問 669 波が、直線上を、変形せずに速さ c で右 (x の正の方向) に移動しているとしよう。

- (1) 時刻 t のときの波形を $\psi(x, t)$ とする。

$$\psi(x, t + \Delta t) = \psi(x - c\Delta t, t) \quad (24.6)$$

となることを示せ。(グラフの平行移動!)

- (2) Δt が十分に 0 に近ければ、式 (24.6) の左辺と右辺は、それぞれ以下のように近似されることを示せ:

$$\psi(x, t + \Delta t) \doteq \psi(x, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta t \quad (24.7)$$

$$\psi(x - c\Delta t, t) \doteq \psi(x, t) - c \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta t \quad (24.8)$$

注: この近似は、 Δt が小さくなればなるほど、限りなく正確になる。

- (3) 式 (24.6)、式 (24.7)、式 (24.8) より、次の偏微分方程式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (24.9)$$

- (4) 式 (24.4) は、この偏微分方程式 (24.9) を満たすことを示せ。ヒント: 式 (24.4) を、この偏微分方程式の左辺と右辺にそれぞれ代入して互いに等しくなればよい。

問 670 波が、直線上を、変形せずに速さ c で左 (x の負の方向) に移動しているとしよう。

- (1) 時刻 t のときの波形を $\psi(x, t)$ とする。以下の偏微分方程式が成り立つことを示せ (ヒント: 前問と同様に考えればよい):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = c \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (24.10)$$

- (2) 式 (24.5) は、この偏微分方程式 (24.10) を満たすことを示せ。

式 (24.9) は右向きに進む波が満たすべき偏微分方程式、式 (24.10) は左向きに進む波が満たすべき偏微分

方程式である。ところが、多くの物理現象では、普通、波は右か左かの片方だけでなく、両方に進んで行く。例えば、細長い水路に石を放りこんだら、石が落ちて生じる波 (水面波) は、水路の両側に向かって広がっていくだろう。また、トンネルのまんなかで君が叫んだら、その声 (音波) はトンネルの両端に向かって響いていくだろう。そのような場合は、式 (24.9) と式 (24.10) の両方が同時に成り立たねばならない。つまり、式 (24.9) と式 (24.10) を両方とも含むような素晴らしい方程式が欲しいのだ。

それには、こうやればいい。演算子の考え方をを使うと、式 (24.9) と式 (24.10) は、それぞれ

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = 0 \quad (24.11)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = 0 \quad (24.12)$$

とできる。ここで、諸君が単振動 (おもりつきバネの振動) の方程式を演算子法で解いたときと同様に考えれば、これらは、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = 0 \quad (24.13)$$

と同じことであり、要するに、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi = 0 \quad (24.14)$$

すなわち、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (24.15)$$

と同じことである。式 (24.15) は、式 (24.4) と式 (24.5) の両方を解に持つ。従って、式 (24.15) も波をあらわす方程式、つまり「波動方程式」である。むしろ、一般的に「波動方程式」と言えば、式 (24.9) や式 (24.10) よりも、式 (24.15) を指すことが多い。そして驚くべきことに、音波や電磁波、水面の波など、自然現象の中に見られる多くの波は、この式 (24.15) に従うのである。

問 671 式 (24.15) について、

- (1) これは線型同次微分方程式であることを示せ。
 (2) 2 階微分可能な任意の関数 $f(x)$ について、 $\psi = f(x - ct)$ は式 (24.15) の解であることを示せ。
 (3) 2 階微分可能な任意の関数 $f(x)$ について、 $\psi = f(x + ct)$ は式 (24.15) の解であることを示せ*4。

*4 これらの解、つまり $\psi = f(x - ct)$ や $\psi = f(x + ct)$ のよう

式 (24.15) は線型 (同次) 偏微分方程式なので、重ね合わせの原理が成り立つ。つまり、図 24.2(1) のように、ある波形 $\psi = f(x - ct)$ が式 (24.15) の解ならば、その波高を何倍かした波、つまり

$$\psi = af(x - ct) \tag{24.16}$$

も、式 (24.15) の解である (つまり、現実の波として実現可能である)。例えば音について言えば、君は同じ言葉を、小声でささやくことも大声でどなることもできるのだ。つまり、式 (24.15) に従う波は、スカラー倍できる。マイナス倍ができるのかと言えば、もちろんできる。 $f(x - ct)$ がプラスならば、そのマイナス倍は、音波の場合は圧力が低くなる波形、水面の波の場合は水面が凹んだ波形になる。

また、図 24.2(2) のように、別々の 2 つの波形: $\psi = f(x - ct)$ と $\psi = g(x - ct)$ があると、各位置で 2 つの波の波高を足すことでできる波形、つまり

$$\psi = f(x - ct) + g(x - ct) \tag{24.17}$$

も、あり得る (重ね合わせの原理!)。例えば音について言えば、複数の楽器の音を重ねることでバンドやオーケストラの演奏ができるのだ。つまり、式 (24.15) に従う波は、足し算できる。

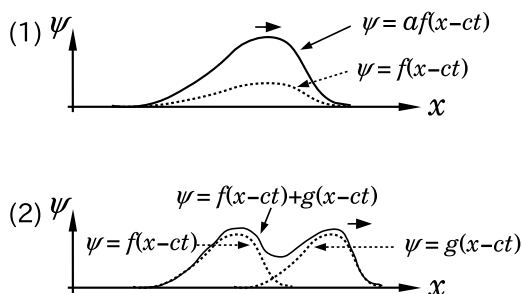


図 24.2 「波形のスカラー倍」と「波形の足し算」

この足し算は、互いに逆方向に進む波についても許される。すなわち、右方向に進む波形 $f(x - ct)$ と、左方向に進む波形 $g(x + ct)$ について、その足し算:

$$\psi = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{24.18}$$

も、式 (24.15) の解であり、現実の波として実現可能である。

このように、一般に、ある物理現象について、重ね合わせの原理が成り立つような場合、「その物理現象は線型 (linear) である」という。式 (24.15) で考えたのは線型

な波である。

ただし、注意してほしいのだが、式 (24.15) の導出過程は、やや「天下りの」である。この方程式が「波っぽい現象」を表すのは確かだが、現実のいろんな波動現象の全てが、必ずしもこの方程式に従うとは限らない。実際、この方程式に従わないばかりか、重ね合わせの原理も成り立たないような波動現象 (非線型の波) も、現実には存在する。代表的なものに、浜辺に打ち寄せるときに盛り上がり崩れる、海の波が挙げられる。そのような波は、ソリトンという数学理論などで盛んに研究され、光通信などの工学的な実用にも役立っている (音波や水面の波は、 ψ が小さい場合とか、波形がなめらかであるような、「おだやか」な波のときに限って、式 (24.15) が成り立つ)。

24.2 弦を伝わる波

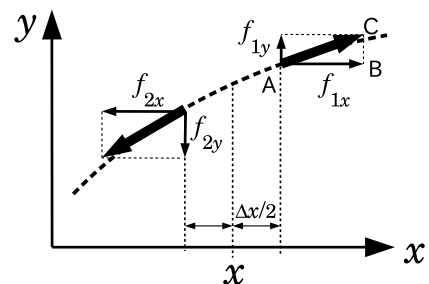


図 24.3 糸の上を伝わる波の一部 (拡大図)。太い点線が糸をあらわす。2 つの太い矢印は糸の張力で、その大きさはともに S 。

問 672 ピンと張られた糸 (糸電話の糸やギターの弦など) に伝わる波について考えよう。 x 軸に沿って、線密度 (単位長さあたりの質量) ρ の糸が、張力 S で張られているとする。 x 軸に直交する y 軸の方向に糸は変位 (振動) するが、その変位 $y(x, t)$ は十分に小さいために、張力 S の大きさは時間 t にも位置 x にも依存しない一定値であるとする。また、重力は無視する。ある位置 x を中心として幅 Δx の糸の部分 ($x - \Delta x/2$ から $x + \Delta x/2$ の部分) の運動を考えよう (図 24.3 参照)。 Δx は十分に小さい (ゼロに近い) とする。

(1) この部分の質量 Δm は、

$$\Delta m = \rho \Delta x \tag{24.19}$$

であることを示せ。ヒント: 糸の長さは Δx よりも

な解を、ダランベール (d'Alembert) の解という。

若干伸びているが、質量的には、その伸びはほとんど無視できる。それに、伸びるぶんだけ、細くなっているだろうし。

- (2) この部分の右端にかかる張力を (f_{1x}, f_{1y}) とすると、以下の 2 つの式がなりたつことを示せ。

$$f_{1x}^2 + f_{1y}^2 = S^2 \quad (24.20)$$

$$\frac{f_{1y}}{f_{1x}} = \frac{\partial y}{\partial x} \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) \quad (24.21)$$

ヒント: 張力は糸に沿った方向に働く。

- (3) f_{1y} は f_{1x} よりもずっと小さいとみなせば、近似的に次式が成り立つことを示せ:

$$f_{1x} = S \quad (24.22)$$

$$f_{1y} = S \frac{\partial y}{\partial x} \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) \quad (24.23)$$

- (4) 式 (24.23) は、近似的に以下のようになることを示せ。

$$f_{1y} = S \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \frac{\Delta x}{2} \quad (24.24)$$

ヒント: 線型近似。

- (5) 同様に、左端にかかる張力 (f_{2x}, f_{2y}) は、近似的に次式のようになることを示せ:

$$f_{2x} = -S \quad (24.25)$$

$$f_{2y} = -S \frac{\partial y}{\partial x} \left(x - \frac{\Delta x}{2}, t \right) \quad (24.26)$$

- (6) 式 (24.26) は、近似的に以下のようになることを示せ。

$$f_{2y} = -S \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \frac{\Delta x}{2} \quad (24.27)$$

- (7) この糸の、 x を中心とする幅 Δx の部分にかかる合力 (F_x, F_y) は、

$$F_x = f_{1x} + f_{2x} \quad (24.28)$$

$$F_y = f_{1y} + f_{2y} \quad (24.29)$$

となる。次式を示せ:

$$F_x = 0 \quad (24.30)$$

$$F_y = S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Delta x \quad (24.31)$$

- (8) この部分の y 方向の運動方程式は、以下のようになることを示せ:

$$\Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x \quad (24.32)$$

- (9) 式 (24.32) を整理すると、次式のような波動方程式

になることを示せ:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{S}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (24.33)$$

ヒント: 式 (24.19)。

- (10) この糸を伝わる波の速さ c は、次式のようになることを示せ。

$$c = \sqrt{\frac{S}{\rho}} \quad (24.34)$$

ヒント: 式 (24.33) を式 (24.15) のように見て、速さ c を導く。

- (11) 糸にかかる張力を 2 倍にすると、波の速さは何倍になるか?^{*5}

24.3 人口の年齢構成

ある国の人口の、年齢構成の変動を数学的に考えてみよう(ここにも波動方程式が出てくるのだ)。ある年を時刻の起点、つまり $t = 0$ とし、そこから t 年だけたったとき、年齢 x 歳を中心として、 Δx 年間の幅をもった年齢層、つまり $x - \Delta x/2$ 歳から $x + \Delta x/2$ 歳の年齢層の人口が $N(x, t)\Delta x$ 人であるとしよう(つまり N は単位年齢幅あたりの人口)。 Δt 年後には ($\Delta t \ll \Delta x$ とする)、この年齢層は、一部が入れ替わって、その人口は、

$$N(x, t + \Delta t)\Delta x \quad (24.35)$$

人になっている。

さて、この Δt 年間における、この年齢層の人口の増減の要因は、以下の 3 つがある:

要因 1: この年齢層より若かった人達が成長してこの年齢層に参入してくること。

要因 2: この年齢層に入っていた人達が歳をとってこの年齢層から卒業すること。

要因 3: この年齢層の一部が、不幸にして事故や病気や老衰で亡くなってしまうこと。

問 673 この問題に関して、関数 $N(x, t)$ を決定する方程式を探そう。

^{*5} 張力を変えることで波の速さが変わり、糸の振動の振動数が変わる。その結果、糸から生じる音の高さが変わる。これが、ギターやピアノ等の弦楽器の調律に関する原理である。

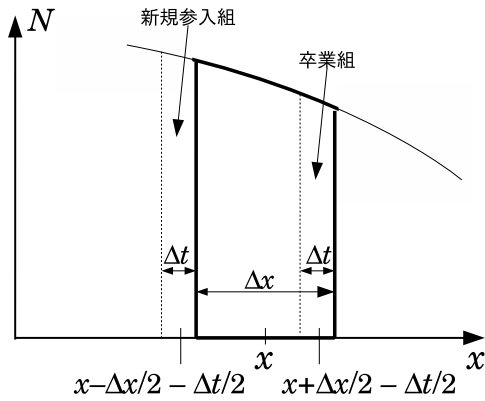


図 24.4 人口の年齢分布とその変動。太い線で囲まれているのが、「年齢 x 歳を中心として、 Δx 年間の幅をもった年齢層の人口」である。左側の、幅 Δt の帯が、今後 Δt 年間の間に、この年齢層に新たに参加する人口。右側の帯は、今後 Δt 年間の間に、この年齢層から「卒業」していく人口。

- (1) 要因 1 に該当する人達のは、

$$N\left(x - \frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta t}{2}, t\right)\Delta t \quad (24.36)$$

となることを示せ。ヒント：時刻 t の時点で彼らの年齢は $x - \Delta x/2$ 以下かつ $x - \Delta x/2 - \Delta t$ 以上。図 24.4 を参照せよ。

- (2) 式 (24.36) は、 x に関する線型近似を用いると次のようになることを示せ：

$$N(x, t)\Delta t - \frac{\partial N}{\partial x}(x, t) \times \left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \quad (24.37)$$

- (3) 要因 2 に該当する人達のは、

$$N\left(x + \frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta t}{2}, t\right)\Delta t \quad (24.38)$$

となることを示せ。ヒント：時刻 t の時点で彼らの年齢は $x + \Delta x/2$ 以下かつ $x + \Delta x/2 - \Delta t$ 以上。

- (4) 式 (24.38) は、 x に関する線型近似を用いると次のようになることを示せ：

$$N(x, t)\Delta t + \frac{\partial N}{\partial x}(x, t) \times \left(\frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \quad (24.39)$$

- (5) 要因 3 に該当する人達のは、 x に依存する適当な実数 $\alpha(x)$ を用いて、

$$\alpha(x)N(x, t)\Delta x\Delta t \quad (24.40)$$

となることを示せ。

- (6) Δt の間のこの年齢層の人口の変化（増加をプラスとする）は、式 (24.35) より、

$$N(x, t + \Delta t)\Delta x - N(x, t)\Delta x \quad (24.41)$$

である。これは、式 (24.37) ひく式 (24.39) ひく式 (24.40) に等しいはずだ。そのことから、次式を示せ。

$$\begin{aligned} & N(x, t + \Delta t)\Delta x - N(x, t)\Delta x \\ &= N(x, t)\Delta t - \frac{\partial N}{\partial x}(x, t) \times \left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \\ & - N(x, t)\Delta t - \frac{\partial N}{\partial x}(x, t) \times \left(\frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \\ & - \alpha(x)N(x, t)\Delta x\Delta t \end{aligned} \quad (24.42)$$

- (7) 式 (24.42) から、次式を導け：

$$\begin{aligned} & N(x, t + \Delta t)\Delta x - N(x, t)\Delta x \\ &= -\frac{\partial N}{\partial x}(x, t)\Delta x\Delta t - \alpha(x)N(x, t)\Delta x\Delta t \end{aligned} \quad (24.43)$$

- (8) 式 (24.43) の両辺を $\Delta x\Delta t$ で割って、次式を導け：

$$\begin{aligned} & \frac{N(x, t + \Delta t) - N(x, t)}{\Delta t} \\ &= -\frac{\partial N}{\partial x}(x, t) - \alpha(x)N(x, t) \end{aligned} \quad (24.44)$$

- (9) 式 (24.44) で、 Δt をゼロに近づけることで、次式を示せ。

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial N}{\partial x} - \alpha(x)N \quad (24.45)$$

これが、人口の年齢構成の変動に関する支配方程式である。

ここで、諸君は何か変だと思わなかっただろうか？ 上の議論では、死亡する人のことは考えたが、生まれる人のことは全く考えていなかった。それでは人口の行く末を議論することなどできないではないか！

生まれる人は、必ず $N(0, t)$ のグループに入るから、0 より大きい x に関する $N(x, t)$ の動態には、生まれる人のことを、直接的に（explicit、つまり陽に）反映することはできないのだ。逆に言えば、 $N(0, t)$ は、生まれる人の数を考慮しないと決まらない。つまり、偏微分方程式の構造そのものとは別の考察によって、 $N(0, t)$ を与えなければならない。そういう条件を、「境界条件」という。 $x = 0$ のときの t に関する関数形を与えるのが境界条件である。

一方、 $t = 0$ のときの年齢構成、つまり $N(x, 0)$ も、あらかじめ与えられないと、その先の動態を求めることはできない。これを「初期条件」という。初期条件は、 $t = 0$ のときの x に関する境界条件とみなすこともでき

る。

こうしてみると、偏微分方程式は、それぞれの独立変数（この場合は x と t ）をゼロに固定したときの他の独立変数に関する関数形、つまり、独立変数の数だけの境界条件を、なんらかの形で与えてやらねば解けない。

問 674 式 (24.45) の性質を、調べてみよう。ここでは、簡単な場合として、「誰も死なない、誰も生まれない」というような恐ろしい条件で、国の人口分布がどうなるかを調べてみよう。つまり、恒等的に $\alpha = 0$ であり、かつ、境界条件は $N(0, t) = 0$ である。

- (1) この条件で、式 (24.45) は次式のようになることを示せ:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial N}{\partial x} \quad (24.46)$$

これは式 (24.9) の形の波動方程式（片方に伝わる波の方程式）ではないか!!

- (2) この式 (24.46) は、式 (24.9) の特殊な場合であることを示せ。ヒント: 式 (24.9) で $c = 1$ とすればよい。
- (3) 微分可能な任意の関数 $f(x)$ について、 $N = f(x-t)$ は式 (24.46) の解であることを示せ。
- (4) ある時刻 t における年齢構成のグラフ（横軸を年齢、縦軸を N とする）は、時間 t がたつにつれ、形を変えずに右側に移動していく。なぜそうなるか、人口変動の観点から考察せよ。

前問で示した、式 (24.45) は、人口の年齢構成の変動に関する、ごくシンプルなモデルである。実際は、男女をわけて考えたり、初期条件（出生者数）を女性の年齢構成から与えたりできる。そうすれば、より精密な人口変動予測ができるようになるだろう。また、ロジスティック方程式やロトカ・ヴォルテラ方程式のように競争条件を加えたりすることもできる。そうすれば、人間以外の生物の個体数変動も、精密に検討できるだろう。しかし、そういう複雑な調整をするしないはともかく、このモデルの基本は波動方程式なのである。

24.4 正弦波

さて、線型な波動現象の場合、重ね合わせの原理が効くので、複雑な波形も、単純な波形の線型結合に置き換えることができるかもしれない。であれば、単純な波のことをしっかり調べれば、複雑な波のこともわかってくるかもしれない。

では、「最も単純な波」とは何だろう？ 主観的な判断になるが、物理学や数学では、「最も単純な波」として、三角関数で表現される波形、つまり「正弦波」を考える。そして、線型な波動現象の波形を複数の正弦波の線型結合として表現して、その現象を取り扱うのだ（フーリエ級数展開やフーリエ変換）。従って、正弦波のことをしっかりと調べておく必要がある。

いま、ある、1 次元の波が、時刻 0 で

$$\psi = A \sin kx \quad (24.47)$$

のような波形であったとする。ここで x は 1 次元の位置をあらわす座標である。 A, k は適当な実数である。このグラフを考えれば、 kx の値が 2π 増えるごとに、同じ波形が繰り返される。つまり、 x の値が $2\pi/k$ 増えるごとに同じ波形が繰り返される。従って、「ひとつの波」の長さは $2\pi/k$ である。これを波長 (wave length) と呼び、慣習的に λ であらわす。それに対して、 k を波数 (wave number) と呼ぶ。波数と波長の関係 (次式) は、よく理解し、記憶しておこう*6:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (24.48)$$

関数のグラフの拡大と縮小*7について思い出せば、式 (24.47) について、 k が大きくなるほど、波形は x 方向につまった感じ、つまり波長 λ が小さくなるのがわかるだろう。また、 A が大きくなるほど、波形は縦に伸びることもわかるだろう。実際、 $\sin kx$ は -1 から 1 の間の値をとるから、 $A \sin kx$ は $-A$ と A の間の値をとる。つまり、 A は、振動の幅 (の半分) を決める。そこで A を「振幅 (amplitude)」と呼ぶ。

では、時刻 0 で式 (24.47) のような波形であった波は、時間が経つにつれてどういう波形になるだろうか？ もしこの波が右向き (x 軸の正の向き) に一定速度で動くならば、その波形は、時刻 t では式 (24.4) において、 f を

*6 高校物理では、波長は馴染み深い波数はほとんど聞いたことがなかっただろう。しかし、大学の物理学では、波長よりも波数のほうをよく使う。

*7 数学リメディアル教材 第 2 章

$A \sin kx$ にしたものになるだろう。すなわち、

$$\psi = A \sin k(x - ct) \quad (24.49)$$

となる。 c は波の速さである。これを变形すると、

$$\psi = A \sin(kx - kct) \quad (24.50)$$

となる。ここで、

$$kc = \omega \quad (24.51)$$

と書けば、

$$\psi = A \sin(kx - \omega t) \quad (24.52)$$

となる。この式に基づいて、 $x = 0$ 、つまり原点で、波高が時間とともにどう変わっていくかを見てみよう。この式で $x = 0$ とすれば、

$$\psi = -A \sin \omega t \quad (24.53)$$

となる。これは、 ωt の値が 2π 増えるごとに、同じ状態に戻る。つまり、 t の値が $2\pi/\omega$ 増えるごとに同じ振動が繰り返される。従って、「ひとつの振動」にかかる時間は $2\pi/\omega$ である。これを周期 (period) と呼び、慣習的に T であらわす。それに対して、 ω を角速度 (angular velocity) とか角振動数とか角周波数^{*8}と言うのは知っているだろう。角速度と周期の関係 (次式) は、よく理解し、記憶しておこう^{*9}：

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (24.54)$$

さて、式 (24.52) のように、物理現象が時間的・空間的に周期的に起きる場合、いま、その周期ひとつぶんの中の、どのあたりにいるのか、が大事な情報になってくる。式 (24.52) で言えば、 \sin の内側、つまり $kx - \omega t$ である。この部分は、本質的には 0 から 2π までの値をとる (2π を過ぎたらもとに戻る)。このような、「周期ひとつの中の、どのあたりにいるのか」を 0 から 2π までの値で表したものを位相 (phase) という。

問 675

- (1) 周期的な現象において、位相とは何か?
- (2) 関数 $\sin x$ の位相を $\pi/2$ だけ進めると $\cos x$ になることを示せ。

^{*8} 物理学実験テキスト P. 25

^{*9} 高校物理では、周期は馴染み深い角速度はほとんど聞いたことがなかっただろう。しかし、大学の物理学では、周期よりも角速度のほうをよく使う。

問 676

- (1) 「振動数」とは何か、調べよ (振動数は周波数ともいう)。
- (2) 振動数 ν と^{*10}角速度 ω の関係を述べよ。
- (3) 振動数 ν と周期 T の関係を述べよ^{*11}。

また、式 (24.51) で $kc = \omega$ と置いたので、次式が成り立つ。これも大切な式である (記憶せよ)：

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (24.55)$$

問 677 波の速さ c 、振動数 ν 、波長 λ の間に以下の式が成り立つことを示せ：

$$c = \nu \lambda \quad (24.56)$$

ヒント：式 (24.48) と問 676(2) を使って式 (24.55) を変形。

問 678 式 (24.52) は次式のようにも書けることを示せ：

$$\psi = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad (24.57)$$

$$\psi = A \sin \left(\frac{x}{c} - t \right) \quad (24.58)$$

$$\psi = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(\frac{x}{c} - t \right) \quad (24.59)$$

さて、式 (24.52) は、 $t = 0$ 、 $x = 0$ で位相が 0 である (つまり波高はゼロである) が、一般に、正弦波には、そのような制約があるとは限らない。そこで、 $t = 0$ 、 $x = 0$ での位相を δ と書く。これを初期位相という。すると式 (24.52) は、

$$\psi = A \sin(kx - \omega t + \delta) \quad (24.60)$$

のように一般化できる。波が左向きの場合、式 (24.49) を式 (24.5) に戻って修正して式 (24.60) と同様に考えると、

$$\psi = A \sin(kx + \omega t + \delta) \quad (24.61)$$

であることがわかる。この式 (24.60)(24.61) は、1次元の正弦波の一般的な表現である。

^{*10} ν はギリシア文字のニューの小文字である。 ν ではない。また、振動数は f と書くことも多い。

^{*11} 物理学実験テキスト P. 25

問 679 式 (24.60) より,

- (1) 次式を導け:

$$\psi = -A \sin(\omega t - kx - \delta) \quad (24.62)$$

- (2) $-A$ を改めて A , $-\delta$ を改めて δ と置き直せば, 次式になることを示せ:

$$\psi = A \sin(\omega t - kx + \delta) \quad (24.63)$$

- (3) 今まで暗に k や ω は正符号であると考えてきたが, この式 (24.63) では, k に正負の符号を許そう (ω は正とする). 波は, k が正のとき右向き (x 軸の正の向き), k が負のとき左向き (x 軸の負の向き) に進むことを示せ. このように, 波数 k は, 波の進む向きも表現してくれるのだ.

- (4) この式 (24.63) は, 方程式 (24.15) を満たすことを示せ. ヒント: 式 (24.55)

- (5) ある人は, 1 次元の正弦波を, 適当な実数 A, δ' を使って,

$$\psi = A \cos(\omega t - kx + \delta') \quad (24.64)$$

と表現したい! とする. 式 (24.63) を式 (24.64) のように書き直せ. ヒント: δ' の部分で調節できる.

- (6) ある人は, 1 次元の正弦波を, 適当な実数 a, b を使って,

$$\psi = a \cos(\omega t - kx) + b \sin(\omega t - kx) \quad (24.65)$$

と表現したい! とする. 式 (24.63) を式 (24.65) のように書き直せ. ヒント: 加法定理

- (7) 式 (24.63) を, 角速度と波数の代わりに, 周期と波長を使って書きなおせ.

- (8) 式 (24.63) を, 角速度と波数の代わりに, 振動数と波の速さを使って書きなおせ.

このように, 1 次元の正弦波には, 様々な表現方法があるが, 本質的には, 振幅 A , 波数 k (又は波長 λ), 角速度 ω (又は周期 T 又は周波数 ν), そして初期位相 δ によって, 決定される. ただし, 式 (24.65) では, A と δ が無いかわりに, a と b に, 振幅と初期位相の両方の情報が入っている.

24.5 解答

答 668 時刻 t での波形は, 関数 $\psi = f(x)$ のグラフを x 軸の負の方向に ct だけ移動したものであり, それは

$\psi = f(x + ct)$ となる.

答 669

- (1) 波は時間 Δt の間に x 軸方向に $c\Delta t$ だけ移動する. 従って, 時刻 $t + \Delta t$ のときの波形 $\psi(x, t + \Delta t)$ は, もとの波形 $\psi(x, t)$ を x 軸方向に $c\Delta t$ だけ平行移動したもので, つまり $\psi(x - c\Delta t, t)$ に等しい.
- (2) 略 (線型近似).
- (3) 式 (24.6) の左辺に式 (24.7) を, 右辺に式 (24.8) を代入すると,

$$\psi(x, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta t \doteq \psi(x, t) - c \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta t \quad (24.66)$$

となる. 両辺から $\psi(x, t)$ を引けば,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta t \doteq -c \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta t \quad (24.67)$$

となる. この両辺を Δt で割って,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \doteq -c \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (24.68)$$

Δt が限りなく 0 に近い時を考えれば, この \doteq は $=$ になり, 与式を得る.

- (4) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする. 合成関数の微分より,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} f(x - ct) = -cf'(x - ct)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x - ct) = f'(x - ct)$$

従って,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -cf'(x - ct) = -c \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

となる.

答 670

- (1) 時刻 t のときの波形を $\psi(x, t)$ とする. 時刻 $t + \Delta t$ のときの波形 $\psi(x, t + \Delta t)$ は, $\psi(x, t)$ を x 軸の負の方向に $c\Delta t$ だけ平行移動したものであるので,

$$\psi(x, t + \Delta t) = \psi(x + c\Delta t, t) \quad (24.69)$$

となる. Δt が十分に 0 に近ければ, 上の式の左辺

と右辺は、それぞれ以下のように近似される：

$$\begin{aligned}\psi(x, t + \Delta t) &\doteq \psi(x, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta t \\ \psi(x + c\Delta t, t) &\doteq \psi(x, t) + c \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta t\end{aligned}$$

従って、次式が成り立つ：

$$\psi(x, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta t = \psi(x, t) + c \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta t \quad (24.70)$$

これを整理すると、次式を得る：

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = c \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (24.71)$$

(2) 略。

答 671

(1) 略。

(2) $f(x)$ の導関数と 2 階導関数をそれぞれ $f'(x)$, $f''(x)$ とする。

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x - ct) = f'(x - ct)$$

従って、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x - ct) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x - ct) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f'(x - ct) = f''(x - ct)\end{aligned} \quad (24.72)$$

同様に、

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x - ct) = -cf'(x - ct)$$

従って、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x - ct) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x - ct) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (-cf'(x - ct)) = c^2 f''(x - ct)\end{aligned} \quad (24.73)$$

式 (24.72)(24.73) より、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x - ct) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x - ct)$$

(3) 略 (前問と同様)。

答 672 以下、略解。

(1) 静止状態ではこの部分の長さは Δx である。線密度が ρ なので、その質量は $\rho \Delta x$ となる。上下に振動していても質量は変わらない。

(2) 張力 (f_x, f_y) の大きさは S なので、式 (24.20)

が成り立つ。張力は糸に沿った方向に働くので、 (f_{1x}, f_{1y}) は弦の接線と平行である。(図 24.3 右上の直角三角形 ABC を見ればわかるように) その傾きは f_{1y}/f_{1x} である。一方、時刻 t , 位置 $x + \Delta x/2$ における弦の接線の傾きは、微分係数の定義から、

$$\frac{\partial y}{\partial x} \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) \quad (24.74)$$

である。従って、式 (24.21) が成り立つ。

(3) 式 (24.20) で、 $|f_{1y}| \ll |f_{1x}|$ として $|f_{1y}|^2$ を無視すれば、 $f_{1x}^2 = S^2$ を得る。この部分に対して、右端では張力は右向きに働くので、 $f_{1x} > 0$ 。従って、 $f_{1x} = S$ 。これを、式 (24.21) 代入すれば、式 (24.23) を得る。

(4) 略。式 (24.23) を x について線型近似する。

(5) 略。(2)(3) と同様に考えればよい。ただし f_{2x} は x 軸と逆向きなので、負の値をとることに注意。

(6) 略。(4) と同様。

(7) 式 (24.22) と式 (24.25) を辺々足せば、式 (24.30) を得る。式 (24.23) と式 (24.26) を辺々足せば、式 (24.31) を得る。

(8) この部分の y 方向の運動方程式は、

$$\Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_y \quad (24.75)$$

である。右辺に式 (24.31) を代入すればよい。

(9) 式 (24.32) に式 (24.19) を代入し、両辺を $\rho \Delta x$ で割ればよい。

(10) 式 (24.33) と式 (24.15) をくらべると、 $S/\rho = c^2$ となる。ここから与式を得る (c は速度でなく「速さ」なので、負の値は考えないでよい)。

(11) 前小問より、 c は \sqrt{S} に比例する。従って張力の大きさ S を 2 倍すると、 c は $\sqrt{2}$ 倍になる。

答 673 略。

答 674 略。

答 675

(1) 物理現象が時間的・空間的に周期的に起きる場合、「周期ひとつの中の、どのあたりにいるのか」を 0 から 2π までの値で表したものを「位相 (phase)」という。

(2) $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ より明らか*12。

*12 数学リメディアル教材参照。

答 676

- (1) ある点において、単位時間あたりに波が振動する回数を振動数 ν という。
 (2) 振動 1 回につき、位相は 2π 進むから、角速度、すなわち単位時間あたりどのくらい（何ラジアン）位相が進むかは、 ν の 2π 倍になる。つまり、

$$\omega = 2\pi\nu$$

- (3) ある時間 t の間に、波は νt 回振動する。従って、周期 T 、すなわち 1 回あたりの振動に要する時間は、「かかった時間」÷「振動回数」、すなわち $t/(\nu t) = 1/\nu$ である。従って、

$$T = 1/\nu$$

答 677 略。

答 678 略。

答 679

- (1) $\psi = A \sin(kx - \omega t + \delta)$
 $= A \sin\{-(-kx + \omega t - \delta)\}$
 $= -A \sin(-kx + \omega t - \delta)$
 $= -A \sin(\omega t - kx - \delta)$
 (2) 略（自明）
 (3) k の絶対値を $|k|$ とする。いま、 $k \neq 0$ とすれば、 $0 < |k|$ である。 $0 < k$ のとき $k = |k|$ だから与式は

$$\begin{aligned} \psi &= A \sin(\omega t - |k|x + \delta) \\ &= -A \sin\left(|k|\left(x - \frac{\omega}{|k|}t\right) - \delta\right) \end{aligned}$$

となり、 $\omega/|k| = c$ とおくと $\psi = f(x - ct)$ の形になる。これは x 軸の正の向きに進む波。 $k < 0$ のとき $k = -|k|$ だから与式は

$$\begin{aligned} \psi &= A \sin(\omega t + |k|x + \delta) \\ &= A \sin\left(|k|\left(x + \frac{\omega}{|k|}t\right) + \delta\right) \end{aligned}$$

となり、 $\omega/|k| = c$ とおくと $\psi = f(x + ct)$ の形になる。これは x 軸の負の向きに進む波。

- (4) 略。（ $c = \omega/k$ に注意せよ。）
 (5) 式 (24.63) において、 $\delta = \delta' + \pi/2$ とすれば、

$$\psi = A \sin(\omega t - kx + \delta' + \pi/2)$$

上の式について、問 675(2) より

$$\psi = A \cos(\omega t - kx + \delta')$$

- (6) 式 (24.60) において、位相を $\omega t - kx$ と δ の和と見て \sin の加法定理を使えば、

$$\begin{aligned} \psi &= A \sin\{(\omega t - kx) + \delta\} \\ &= A\{\sin(\omega t - kx) \cos \delta + \cos(\omega t - kx) \sin \delta\} \end{aligned}$$

ここで $A \cos \delta = b$, $A \sin \delta = a$ と置けば、

$$\psi = a \cos(\omega t - kx) + b \sin(\omega t - kx)$$

- (7) 周期と波長をそれぞれ T, λ とする。 $\omega = 2\pi/T$, $k = 2\pi/\lambda$ より、

$$\psi = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \delta\right)$$

- (8) 振動数と速度をそれぞれ ν, c とする。 $\omega = 2\pi\nu$, $k = \omega/c = 2\pi\nu/c$ より、

$$\psi = A \sin\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{c}x + \delta\right)$$

一問一答

- $\psi = f(x - ct)$ について、 $\partial\psi/\partial t = -cf'(x - ct)$, $\partial\psi/\partial x = f'(x - ct)$ で、なぜどちらも $f'(x - ct)$ となるのか分からなかったです。

... では $\xi = x - ct$ と置きましょうか。 $\psi = f(x - ct) = f(\xi)$ です。 $df/d\xi = f'(\xi)$ と書きます。ここでまず x を固定して（定数とみなして） ψ を t で微分すれば（つまり t で偏微分するのと同じこと）、合成関数の微分の公式から、 $d\psi/dt = (df/d\xi)(d\xi/dt)$ となります。 $df/d\xi = f'(\xi)$ で $d\xi/dt = -c$ だから、 $d\psi/dt = f'(\xi)(-c) = -cf'(x - ct)$ となります。同様に考えれば、 $\partial\psi/\partial x = f'(x - ct)$ となることもわかるでしょう。それでもわからなければ、質問においで。

- T と k と ω と... 関係式がややこしい...

... とりあえず大事なのは k と ω です。物理をさらに勉強すると、 ω はエネルギーと、 k は運動量と対応することがわかるでしょう。

- 公式や定理を庶民のシュー...もとい庶民の数学とバカにしていました。キソが大事 by 桜木

... いちばん大切なのは定義ね。

第25章

線型偏微分方程式2: 波動方程式の応用

25.1 津波

津波が海上を伝わる様子を考えよう。図 25.1 を見て欲しい。

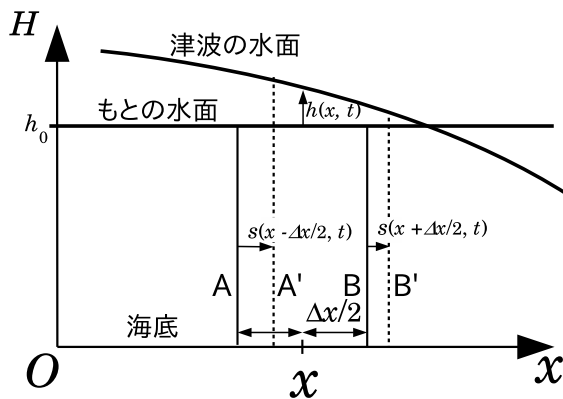


図 25.1 津波の断面図。津波は x 軸の正の方向に伝わりとする。もとの水面と海底と面 A、面 B で囲まれる部分を水塊 Ω と呼ぶ。津波が来ると面 A は A' に移動し、面 B は B' に移動する。AB 間の距離より $A'B'$ 間の距離が小さいと水塊 Ω は幅が狭くなって上に盛り上がるため、水面が上昇する。

海底の一点に原点をとり、海底は平面であるとする。津波は一方向に伝播するとし、津波の伝わる方向に平行に x 軸をとる。

津波が来る前（静止状態）の水面の高さを h_0 と置き、津波が来たときの水面の高さを $H = h_0 + h$ と置く。 h_0 は定数だが、 h は x と時刻 t の関数（2 変数関数）である。この $h(x, t)$ を決定する方程式を探り当てるのが、ここでの目標である*1。

静止状態で位置 x にある水は、津波がやってくると、全体的に x 軸の正負の方向に微妙に移動する。その移動

量を $s(x, t)$ としよう*2。つまり、もともと x にあった水は、時刻 t のときに、 $x + s(x, t)$ に移動している。 $s > 0$ なら水は x の正の方向に移動し、 $s < 0$ なら水は x の負の方向に移動する。この移動量は水深によって異なるかもしれないが、ここでは近似的に考えて、水深によらないとする。

さて、静止状態で、 $x - \Delta x/2$ にある面 A と、 $x + \Delta x/2$ にある面 B を考える。 Δx は微小量とする。この 2 つの面で挟まれた、高さ h_0 、幅 Δx 、奥行き w の水塊を Ω と呼ぼう。津波がやってくると、面 A や面 B は隣の水塊に押されて、左右に移動する。そのとき、面 A は位置

$$x - \frac{\Delta x}{2} + s\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \quad (25.1)$$

に移動し（そのときの面を面 A' と呼ぼう）、面 B は位置

$$x + \frac{\Delta x}{2} + s\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) \quad (25.2)$$

に移動する（そのときの面を面 B' と呼ぼう）。従って、水塊 Ω の幅（つまり面 B' と面 A' の距離）は、

$$\Delta x + s\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - s\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \quad (25.3)$$

となる。これが、もとの幅 Δx よりも小さいとき、すなわち、

$$s\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) < s\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \quad (25.4)$$

のとき（つまり面 B の変位より面 A の変位の方が大きいとき）は、幅が狭くなる分、水は行き場を失い、上に盛り上がり、その結果、水面はもとの高さ h_0 よりも高くなるだろう。逆に、

$$s\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) > s\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \quad (25.5)$$

ならば、水塊 Ω の幅はもとの幅 Δx より大きくなり、水面は h_0 より低くなるだろう。

*1 以下、 $h(x, t)$ の (x, t) という部分を、適宜、省略して書く。 h は x と t の関数であるということを諸君に思い出して欲しいときや、 x, t に特別な値を代入したいときは $h(x, t)$ と書く。 h 以外の関数についても同様。

*2 $s(x, t)$ も、 (x, t) という部分を適宜省略する。

問 680

- (1) 水塊 Ω の体積は、面 A と面 B に挟まれているとき、面 A' と面 B' に挟まれているときで変わらないことから次式を導け:

$$h_0 w \Delta x = (h_0 + h) w \left\{ \Delta x + s \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) - s \left(x - \frac{\Delta x}{2}, t \right) \right\} \quad (25.6)$$

- (2) 式 (25.6) から次式を導け:

$$h_0 \doteq (h_0 + h) \left(1 + \frac{\partial s}{\partial x} \right) \quad (25.7)$$

- (3) h も s も微小量である。従って、

$$h \frac{\partial s}{\partial x} \quad (25.8)$$

は微小量どうしの積なので、近似的に無視できる。

そのことを使って、式 (25.7) から次式を導け:

$$\frac{\partial s}{\partial x} \doteq -\frac{h}{h_0} \quad (25.9)$$

式 (25.9) によって、水の移動と波の高さを関係づける式が得られた。

次に、水の移動の仕方を規定する式を作ろう。水でも何でも、質量のある物体が移動するとき、それを規定するのはニュートンの運動方程式である。運動方程式を立てるには、まず、その物体にかかる力を記述しなければならない。では、水塊 Ω にかかる力を考えよう。水塊 Ω には、面 A を介して左の水塊から右向きの水圧を受け、面 B を介して右の水塊から左向きの水圧を受ける。一般論として、水圧は水深（水面からの距離）に比例することが知られている。すなわち、水深 y での水圧は $\rho g y$ であることが知られている（ ρ は水の密度、 g は重力加速度）。従って、海底から高さ H までの垂直面（奥行き w ）にかかる力は、その面の各水深における圧力をぜんぶ足したものだから、

$$\int_0^H \rho g y w dy = \frac{\rho g w H^2}{2} \quad (25.10)$$

である。従って、水塊 Ω の左から（面 A を介して）かかる力は、

$$\frac{\rho g w \left\{ h_0 + h \left(x - \frac{\Delta x}{2}, t \right) \right\}^2}{2} \quad (25.11)$$

であり、水塊 Ω の右から（面 B を介して）かかる力は、

$$-\frac{\rho g w \left\{ h_0 + h \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) \right\}^2}{2} \quad (25.12)$$

である（マイナス符号は左向きを意味する）。

問 681

- (1) 水塊 Ω に、面 A と面 B を介してかかる、 x 軸方向の合力 F は、次式で表されることを示せ:

$$F \doteq -\rho g w (h_0 + h(x, t)) \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \quad (25.13)$$

- (2) 水塊 Ω の質量を m とする。次式を示せ:

$$m = \rho h_0 w \Delta x \quad (25.14)$$

- (3) 水塊 Ω の、 x 方向の加速度 a は次式であることを示せ:

$$a = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (25.15)$$

- (4) 水塊 Ω の、 x 軸方向の運動方程式、すなわち $F = ma$ から、次式を示せ:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -g \frac{h_0 + h}{h_0} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (25.16)$$

- (5) $|h| \ll h_0$ とみなし、次式を示せ:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \doteq -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (25.17)$$

式 (25.17) によって、水の移動の仕方を規定する式が得られた。最後に、式 (25.9) と式 (25.17) を組み合わせよう:

問 682 式 (25.17) の両辺を x で偏微分し、式 (25.9) を使うことで次式を導け:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \doteq g h_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (25.18)$$

式 (25.18) は式 (24.15) と同じ形の方程式、つまり波動方程式になっている。

問 683

- (1) 津波の速さ c は、

$$c = \sqrt{g h_0} \quad (25.19)$$

となることを示せ。

- (2) 2011年3月11日の東北太平洋沖地震では、震源域から三陸沿岸までの距離は約200 kmある。その間の水深は平均1500 m程度である。震源域で発生した津波が三陸沿岸まで到達するまでの時間を見積もれ。
- (3) 津波は沿岸に近づくほど波が高くなると言われている。それを、水深と速度の関係に基づいて説明せよ。

25.2 音波

空気中を音波が伝わる様子を考えよう*3。今、簡単のため、音は一方に伝播するとし、音の伝わる方向に平行に x 軸をとる (図 25.2)。

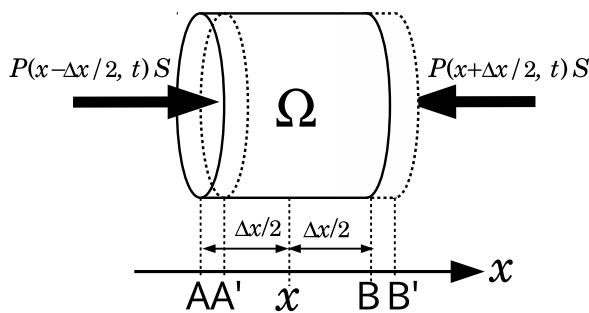


図 25.2 音波を考える概念図

場所 x での気圧 (圧力) を $P(x) = P_0 + p(x)$ としよう。ここで P_0 は静止状態 (無音の状態) の気圧であり、全ての場所で等しい。 $p(x)$ は、音が鳴っている状態の気圧 $P(x)$ から無音状態の気圧 P_0 を引いたものであり、音圧と呼ばれる。音圧は、音がやってくると、ゼロをまたいで増減するが、その大きさは、 P_0 よりはるかに微小である。すなわち $p \ll P_0$ である。実際、音圧はせいぜい 10 Pa 程度であり、標準大気圧 (約 10^5 Pa) の 1 万分の 1 程度である。

ここでは、音圧は x 軸に沿って変わるが、 x 軸に直交する方向では変わらないとする。静止状態 (無音の状態) で位置 x にある空気は、音がやってくると、 x 軸の正負の方向に微妙に移動する (空気の混合や、風による移流は考えない)。その移動量を $s(x, t)$ としよう。つまり、もともと x にあった空気は、時刻 t のときに、 $x + s(x, t)$ に移動している。

*3 物理学実験テキスト P.35 参照

さて、静止状態 (無音の状態) で、点 A: $x - \Delta x/2$ と点 B: $x + \Delta x/2$ の間にある、断面積 S の筒状の空気塊 Ω を考える (図 25.2)。空気塊 Ω の体積を V とする。特に、静止状態での V を V_0 と書く。明らかに

$$V_0 = S\Delta x \quad (25.20)$$

である。ところが、音がやってくると、空気は微妙に移動するので、 V も微妙に変化する。そこで、

$$V = V_0 + v(x, t) \quad (25.21)$$

と書こう。このように、空気塊が時刻と場所によって移動し、その結果、体積を変えるため、圧力 (気圧) も時刻と場所によって変わるだろう。その関係を求めよう:

問 684

- (1) 静止状態で点 A: $x - \Delta x/2$ にあった空気分子は、時刻 t のとき、座標

$$x - \frac{\Delta x}{2} + s\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \quad (25.22)$$

の点 (これを A' と呼ぶ) に来ることを示せ。同様に、静止状態で点 B: $x + \Delta x/2$ にあった空気分子は、時刻 t のとき、座標

$$x + \frac{\Delta x}{2} + s\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) \quad (25.23)$$

の点 (これを B' と呼ぶ) に来ることを示せ。

- (2) 点 A' と点 B' の距離は、

$$\Delta x + \frac{\partial s}{\partial x} \Delta x \quad (25.24)$$

と近似できることを示せ。ヒント: A' と B' のそれぞれの座標について、 s を線型近似し、引き算する。

- (3) 次式を示せ:

$$V_0 + v = S\left(\Delta x + \frac{\partial s}{\partial x} \Delta x\right) \quad (25.25)$$

ヒント: 左辺は V である。静止状態で点 A と点 B の間にあった空気塊 Ω は、時刻 t では点 A' と点 B' の間に来る。

- (4) 前小問の式から、次式を導け:

$$V_0 + v = V_0 + \frac{\partial s}{\partial x} V_0 \quad (25.26)$$

ヒント: 式 (25.20)。

- (5) 前小問の式から、次式を導け:

$$\frac{v}{V_0} = \frac{\partial s}{\partial x} \quad (25.27)$$

- (6) 空気は断熱変化することを仮定すると,

$$PV^\gamma = \text{一定値} \quad (25.28)$$

となる*4。ここで、 γ は「比熱比」と呼ばれる定数で、その定義は、定圧モル比熱 C_P と定積モル比熱 C_V の比である:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad (25.29)$$

γ の値は気体分子の構造によって異なり、

$$\text{単原子分子気体の場合: } \gamma = 5/3 \quad (25.30)$$

$$2 \text{ 原子分子気体の場合: } \gamma = 7/5 \quad (25.31)$$

であることを「化学」「物理学」「物理学実験」で学んだだろう*5。さて、式 (25.28) から、

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma \quad (25.32)$$

となる。このことから、次式を示せ:

$$(P_0 + p)(V_0 + v)^\gamma = P_0 V_0^\gamma \quad (25.33)$$

- (7) 前小問の式から次式を導け:

$$(P_0 + p) \left(1 + \frac{v}{V_0}\right)^\gamma = P_0 \quad (25.34)$$

ヒント: 両辺を V_0^γ で割る。

- (8) ここで、
- v
- の絶対値は
- V_0
- より十分に小さいとして、

$$\left(1 + \frac{v}{V_0}\right)^\gamma \approx 1 + \gamma \frac{v}{V_0} \quad (25.35)$$

と近似し、また、 pv はゼロに近いとして無視すると*6、前小問の式は

$$\gamma P_0 \frac{v}{V_0} + p \approx 0 \quad (25.36)$$

となることを示せ。

- (9) このことから次式を導け (簡単のため
- \approx
- は
- $=$
- に書き換えた):

$$\frac{v}{V_0} = -\frac{p}{P_0 \gamma} \quad (25.37)$$

- (10) 以上より、次式を導け:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{p}{P_0 \gamma} \quad (25.38)$$

式 (25.38) によって、空気塊の変位と圧力 (気圧) の関係が定まった。

次に、空気の運動を規定する式を作ろう。津波の水塊と同じように、この空気塊についても、その移動を規定するのはニュートンの運動方程式である。

問 685

- (1) 空気塊
- Ω
- の質量を
- m
- とすれば、

$$m = \rho_0 V_0 = \rho_0 S \Delta x \quad (25.39)$$

であることを示せ。ここで、 ρ_0 は、静止状態における空気の密度 (定数) である。

- (2) 空気塊
- Ω
- の左端に働く力は、
- $P(x - \Delta x/2, t)S$
- であり、右端に働く力は、
- $-P(x + \Delta x/2, t)S$
- であることを示せ。ここで、点 A と点 A' は非常に近いので、点 A' での圧力は、点 A での圧力とほぼ等しいとみなす。同様に、点 B' での圧力は、点 B での圧力とほぼ等しいとみなす。

- (3) 空気塊
- Ω
- に働く
- x
- 方向の合力は、

$$-\frac{\partial P}{\partial x} S \Delta x \quad (25.40)$$

となることを示せ。ヒント: 前問で考えた、左右端に働く力をそれぞれ線型近似して足し合わせる。

- (4) 以上より、空気塊
- Ω
- の
- x
- 方向の運動方程式は、以下のようになることを示せ:

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial x} S \Delta x \quad (25.41)$$

- (5) 前小問の式から次式を導け:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (25.42)$$

ここで、 $P = P_0 + p$ であり、 P_0 は定数なので、 $\partial P / \partial x = \partial p / \partial x$ となることに注意せよ。

式 (25.42) によって、空気塊の運動が定まった。では、式 (25.38) と式 (25.42) を組み合わせよう。

問 686 式 (25.42) を、 x で偏微分し、式 (25.38) から $\partial s / \partial x$ を $-p / P_0 \gamma$ で置き換えれば、次式のようになるこ

*4 これは熱力学第一法則と、気体の状態方程式から導かれる法則である。

*5 単原子分子の運動エネルギーは、直線運動に付随する運動エネルギーだけだが、2 原子分子になると、回転運動に付随する運動エネルギーもある。そのことが、 γ の違いを生じさせる。

*6 もともと p も v も微妙 (微小) としているので、両者の積はゼロにとっても近い。

とを示せ：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{P_0 \gamma}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (25.43)$$

式 (25.43) は式 (24.15) と同じ形の方程式、つまり波動方程式になっている。この式に従って、圧力の分布が波として伝播するのが音波である。

問 687 式 (25.43) に基づいて、大気圧 ($P_0 = 1.0 \times 10^5$ Pa) 常温 (300 K) での空気の音速 (音の速さ) を求めよう。空気の平均分子量を 30 とする。有効数字は 2 桁でよい。

(1) 音速 (音の速さ) c が次式で表されることを示せ：

$$c = \sqrt{\frac{P_0 \gamma}{\rho_0}} \quad (25.44)$$

- (2) $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ となることを示せ。
- (3) 空気はほとんどが N_2 と O_2 であるとする。 $\gamma \doteq 7/5$ となることを示せ。
- (4) $c \doteq 340 \text{ m/s}$ となることを示せ。

25.3 面を伝わる波の波動方程式

ピンと張られた膜 (太鼓の皮など) に伝わる波を考えよう。図 25.3 のように x, y, z の 3 つの直交する軸を考える。膜は静止状態では xy 平面に沿ってピンと張られている。膜が上下に振動することによって、膜に波が生じる。膜は z 方向だけに動くとする。 xy 平面上の位置 (x, y) における、時刻 t での膜の高さ (上下方向の変位) を $z(x, y, t)$ とする。 z は微小であると仮定する。

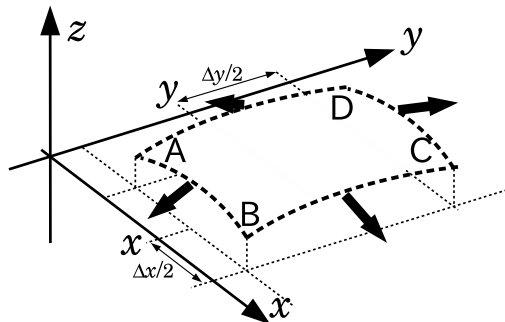


図 25.3 膜の上を伝わる波の一部 (拡大図)。太い点線で囲まれた四角形 Σ は膜の上にある。4 つの太い矢印は、四角形 Σ の各辺にかかる膜の張力で、その大きさは辺の長さに比例し、向きは膜に平行で辺に垂直である。

図 25.3 のように、膜の上に四角形 ABCD を考え、それを Σ と呼ぶ。膜が静止している状況では、 Σ は xy 平面上にあるから、辺 AB, 辺 CD は x 軸に平行で、その長さは Δx で、中点の x 座標を x とする。同じく膜が静止している状況では、辺 BC, 辺 DA は y 軸に平行で、その長さは Δy で、中点の y 座標を y とする。辺 AB, 辺 BC, 辺 CD, 辺 DA にそれぞれ働く力を、

$$\mathbf{F}_1 = (f_{1x}, f_{1y}, f_{1z}) \quad (25.45)$$

$$\mathbf{F}_2 = (f_{2x}, f_{2y}, f_{2z}) \quad (25.46)$$

$$\mathbf{F}_3 = (f_{3x}, f_{3y}, f_{3z}) \quad (25.47)$$

$$\mathbf{F}_4 = (f_{4x}, f_{4y}, f_{4z}) \quad (25.48)$$

とおく。

膜の張力 (膜を横切る単位長さあたりにかかる力) を K とする。現実的には膜が伸縮することで K は多少は変わるかもしれないが、ここではその影響は無視し、 K は場所や時刻によらず一定とする。重力は無視する。

問 688 次式が成り立つことを示せ：

$$|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_3| = K \Delta x \quad (25.49)$$

$$|\mathbf{F}_2| = |\mathbf{F}_4| = K \Delta y \quad (25.50)$$

また、各辺に働く力は辺に垂直であるとみなし、

$$f_{1x} = f_{2y} = f_{3x} = f_{4y} = 0 \quad (25.51)$$

とおく。

さて、例えば辺 BC に働く力を考えよう。その力は、この辺を境界として四角形 ABCD の隣の膜から引っ張られることによって生じるはずだ。従って、その力の向きは、隣の膜の方向である。すなわち、その力は膜に接する (膜に平行な) 方向である。それは、膜を辺 BC に垂直な面で切ったときに、切り口に現れる曲線の接線の向きでもある。従って、

$$\frac{f_{2z}}{f_{2x}} = \frac{\partial z}{\partial x} \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, t \right) \quad (25.52)$$

となる。

問 689

(1) 次式を示せ：

$$\sqrt{f_{2x}^2 + f_{2z}^2} = K \Delta y \quad (25.53)$$

(2) 次式を示せ:

$$f_{2x} \equiv K \Delta y \quad (25.54)$$

$$f_{2z} \equiv K \Delta y \frac{\partial z}{\partial x} \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, t \right) \quad (25.55)$$

(3) 次式を示せ:

$$f_{1y} \equiv -K \Delta x \quad (25.56)$$

$$f_{3y} \equiv K \Delta x \quad (25.57)$$

$$f_{4x} \equiv -K \Delta y \quad (25.58)$$

$$f_{1z} \equiv -K \Delta x \frac{\partial z}{\partial y} \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, t \right) \quad (25.59)$$

$$f_{3z} \equiv K \Delta x \frac{\partial z}{\partial y} \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, t \right) \quad (25.60)$$

$$f_{4z} \equiv -K \Delta y \frac{\partial z}{\partial x} \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, t \right) \quad (25.61)$$

(4) この膜に働く合力を $\mathbf{F} = (f_x, f_y, f_z)$ とする。次式のようになることを示せ*7:

$$f_x \equiv 0 \quad (25.62)$$

$$f_y \equiv 0 \quad (25.63)$$

$$f_z \equiv K \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \Delta x \Delta y \quad (25.64)$$

(5) 膜の面密度 (単位面積当たりの質量) を σ とする。次式を示せ (ヒント: 運動方程式):

$$\sigma \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = f_z \quad (25.65)$$

(6) 次式を示せ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \equiv \frac{K}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (25.66)$$

式 (25.66) は、2 次元の波動方程式である。ここでは詳述しないが、一般に、波動方程式は、位置と時刻に依存する何らかの物理量 ψ について、

1 次元:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (25.67)$$

2 次元:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (25.68)$$

*7 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ などには本来は (x, y, t) をつけるべきだが、省略してある。位置や時刻が特別な値 $(x + \Delta x/2)$ とか) でないときは、このように引数を書くことを省略する。

3 次元:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (25.69)$$

のような形に書けるのだ*8。そして、右辺の係数に現れる c は、いずれも、波の速度に相当する。

問 690 上で紹介した、2 次元、3 次元の波動方程式 (式 (25.68) と式 (25.69)) について、

- (1) これらは、いずれも線型同次偏微分方程式であることを示せ。
- (2) 波が動かないとき (つまり ψ が t に依存しないとき、つまり波が治まっているとき)、これらはラプラス方程式になることを示せ。

演習問題

演習問題 15 問 687 と同じ温度・圧力で、純粋なヘリウム気体の音速は $c \equiv 1020$ m/s となることを示せ*9。ヒント: ヘリウムガスの密度と γ を求めよ。いずれも前問で考えた空気の場合とは違うことに注意せよ。

演習問題 16 (発展) もともと八長調の歌を、声の出し方を同じままで、ヘリウムガスを吸って歌うと、何調の歌に聞こえるか?

*8 3 次元の波動方程式は、本書の最後の方で、光の方程式として現れるだろう。

*9 ヘリウム気体は音速が大きいため、ヘリウム気体を吸い込むと、気管や声帯の付近で起きる共鳴の振動の振動数も大きくなる。従って声が高い音になる。これをドナルドダック効果という。注意! このように、ヘリウム気体を吸い込んで声を変える遊びがあるが、そのときに、決して純粋なヘリウム気体を使ってはならない。純粋ヘリウムは、当然ながら酸素を含まない。従って、純粋ヘリウムを吸い込んだときの肺は酸素欠乏状態になる。たとえ 1, 2 回の吸い込みで平気だったとしても、そのうち体全体が酸欠になり、突然、窒息する可能性がある。そのような死亡事故が、実際に起きている。この遊びのために市販されているヘリウムガスは、純粋ヘリウムではなく、酸素が添加されているのだ。

25.4 解答

答 680

- (1) 略 (ヒント: 静止しているときの水塊 Ω は, 底面積 $w \Delta x$, 高さ h_0 の直方体を満たしている。従って, その体積は式 (25.6) の左辺ようになる。動いているときの水塊 Ω の体積も同様に考えて, 式 (25.6) の右辺になることを示せば良い。ただし, 水面が必ずしも水平ではないため, 直方体にはならないのではないか, と思う人がいるだろう。そのとおりなのだが, ここは直方体として近似してかまわない。また, 高さとしてどの位置での $h_0 + h$ を使うべきか迷う人もいるだろう。それもそのとおりなのだが, ここでは変位 s は十分に小さいとみなして, x での高さを使えばよい。)

- (2) 略 (ヒント: 式 (25.6) の右辺において, s について線型近似を使う。つまり,

$$s\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) \doteq s(x, t) + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \quad (25.70)$$

などを使う。)

- (3) 式 (25.7) の右辺を展開すると,

$$h_0 \doteq h_0 + h + h_0 \frac{\partial s}{\partial x} + h \frac{\partial s}{\partial x} \quad (25.71)$$

右辺の最後の項を, 問題文に従って無視すると,

$$h_0 \doteq h_0 + h + h_0 \frac{\partial s}{\partial x} \quad (25.72)$$

この両辺から h_0 を引くと,

$$0 \doteq h + h_0 \frac{\partial s}{\partial x} \quad (25.73)$$

この両辺を h_0 で割って適当に移項すると, 与式を得る。

答 681

- (1) 略 (ヒント: F は, 式 (25.11) と式 (25.12) の和である。 h について線型近似を行うこと。)
- (2) 水塊 Ω は, もともと高さ h_0 , 幅 Δx , 奥行き w の直方体に入っているのだから, その体積は $h_0 w \Delta x$ 。これと密度 ρ の積が質量なので, 与式を得る。
- (3) 略 (ヒント: 加速度の定義を思い出そう。)
- (4) 略 (ヒント: 式 (25.13), 式 (25.14), 式 (25.15) を $F = ma$ に代入する。)
- (5) 略 (ヒント: 式 (25.16) で h/h_0 を無視する。)

答 682 式 (25.17) を x で偏微分して, 左辺の偏微分の順序を入れ替えると,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial s}{\partial x} \doteq -g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (25.74)$$

となる (g は定数であることに注意)。この右辺の $\partial s / \partial x$ を, 式 (25.9) によって $-h/h_0$ で置き換えると,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\frac{h}{h_0}\right) \doteq -g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (25.75)$$

となる。 $1/h_0$ は定数なので偏微分の前に出し, 両辺にマイナスをかけると,

$$\frac{1}{h_0} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \doteq g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (25.76)$$

となる。この両辺に h_0 をかけて与式を得る。

答 683

- (1) 式 (25.18) は, $c = \sqrt{gh_0}$ とすると式 (24.15) に一致する。式 (24.15) において c は波の速度であることが既にわかっている。
- (2) 略 (約 30 分間... 諸君は導出せよ。)
- (3) 沿岸に近づくにつれて水深は浅くなるので, 波の速度 $\sqrt{gh_0}$ は小さく (遅く) なる。すると, 津波全体では, 先頭部は後続部より速度が小さい (遅い) ことになる。すると, 後続部が先頭部に接近するため, 津波全体が, 次第に狭い領域に圧縮されることになる。その結果, 波が高くなる。この効果は, 遠浅な海岸で顕著である。

答 684

- (1) 略。
- (2) 式 (25.23) から式 (25.22) を引くと,

$$\Delta x + s\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - s\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right)$$

となる。 s を線型近似すると, これは,

$$\Delta x + s(x, t) + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} - s(x, t) + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

となる。これは与式に等しい。

- (3) 与式の左辺は, もともと A から B までの円筒にあった空気塊が時刻 t でどの程度の体積になったかを表している。それは A' から B' までの円筒に相当するが, その体積は, 前問の結果に断面積 S をかけたもの。それは与式の右辺。
- (4) 以降略。

答 685 略。

答 686 略。

答 687

(1) 式 (25.43) において $p = \psi$, $P_0\gamma/\rho_0 = c^2$ とおけば式 (24.15) に一致する。 c が波の速さを表すので、音速は $c = \sqrt{P_0\gamma/\rho_0}$ 。

(2) 略。

(3) N_2 も O_2 も 2 原子分子なので、式 (25.31) より $\gamma = 7/5$ 。実際は H_2O など 3 原子分子や、He, Ne などの単原子分子も空気中には存在するが、それらは微量であり、その影響はここでは無視する。

(4) 略。

答 688 (略解) 辺 AB には、単位長さあたり K の力がかかる。辺 AB の長さは Δx である。従って、辺 AB にかかる力の大きさは、 $K\Delta x$ となる。他も同様。

注意: 膜が変形すると辺 AB は伸びて Δx よりも大きくなるかもしれない。しかし、膜の変位 z は微小だと仮定しているので、この影響は無視してよい。

答 689

(1) 式 (25.50) より、 $|\mathbf{F}_2| = K\Delta y$ である。また、式 (25.46) より、 $|\mathbf{F}_2| = \sqrt{f_{2x}^2 + f_{2y}^2 + f_{2z}^2}$ である。さらに、式 (25.51) より、 $f_{2y} = 0$ 。以上より、与式を得る。

(2) 膜の変位 z は微小なので、膜はほとんど水平に近い。従って、式 (25.53) において、 $f_{2x} \gg f_{2z}$ とみなして f_{2z}^2 を無視し、式 (25.54) を得る。それを式 (25.52) に代入すると、式 (25.55) を得る。

(3) 略。

(4) 略解:

$$\begin{aligned} f_x &= f_{1x} + f_{2x} + f_{3x} + f_{4x} \\ &\doteq 0 + K\Delta y + 0 - K\Delta y = 0 \end{aligned} \quad (25.77)$$

$$\begin{aligned} f_y &= f_{1y} + f_{2y} + f_{3y} + f_{4y} \\ &\doteq -K\Delta x + 0 + K\Delta x + 0 = 0 \end{aligned} \quad (25.78)$$

f_z については、式 (25.59)、式 (25.55)、式 (25.60)、式 (25.61) をぜんぶ足せばよい。その前に、それぞれ線型近似しておく、

$$f_{1z} \doteq -K\Delta x \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \quad (25.79)$$

$$f_{2z} \doteq K\Delta y \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \quad (25.80)$$

$$f_{3z} \doteq K\Delta x \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \quad (25.81)$$

$$f_{4z} \doteq -K\Delta y \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \quad (25.82)$$

従って、

$$\begin{aligned} f_z &= f_{1z} + f_{2z} + f_{3z} + f_{4z} \\ &\doteq K\Delta y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} \Delta x + K\Delta x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \Delta y \\ &= K \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (25.83)$$

(5) この膜の質量は、

$$m = \sigma \Delta x \Delta y \quad (25.84)$$

である。また、この膜の z 方向の加速度は、

$$a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (25.85)$$

である。また、この膜の z 方向の運動方程式は、

$$f_z = ma_z \quad (25.86)$$

である。式 (25.86) に、式 (25.84)、式 (25.85) を代入すると、与式を得る。

(6) 式 (25.65) の右辺に式 (25.64) を代入し、両辺を $\Delta x \Delta y$ で割れば、与式を得る。

答 690 ~ 16 略。

一問一答

● 人口ピラミッドが波だと聞いてなるほど! と思いました。

... この考え方は、生態学などでもよく使います。

● 人口ピラミッドは波だという話は信じがたいです。波は物理現象に限らないということなのでしょうか... でもなんだか拒絶反応でした。

... 波の定義によりますね。何らかの物理量が、似たようなパターンを保って空間を伝播することを波と言うのなら、人口ピラミッドは波とは言えません。だって人口ピラミッドは人口の統計であり、空間を伝播するものではありませんから。ただし、人口ピラミッドが波動方程式 (の片割れ) と同じような方程式に従うことは事実だし、その結果、人口ピラミッドのグラフの形が、似たようなパターンを保って時と共に移動するのも事実です。

第26章

線型偏微分方程式3: 変数分離法

26.1 線型偏微分方程式の変数分離法

これまで見たように、式 (24.15) の波動方程式、すなわち関数 $\psi(x, t)$ に関する次の偏微分方程式:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (26.1)$$

は、弦を伝わる波・津波・音波等、様々な波動現象を司る。従ってこれを解ければ波動現象を予測・解明できる。

実は既にこの方程式は解けている。それは式 (24.18) で示したように、任意の2つの関数 f, g による、

$$\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (26.2)$$

というものだった。そして、 $f(x - ct)$ は右に進む波、 $g(x + ct)$ は左に進む波を表すのだった。

ここでは、別のアプローチで、式 (26.1) を解いてみよう。既に解けているものを何で今更、と思うかもしれないが、これから学ぶ方法は、この方程式以外にも適用できる、強力な方法なのである。

まず、唐突ではあるが、式 (26.1) の解として、

$$\psi(x, t) = X(x)T(t) \quad (26.3)$$

というふうに、2つの関数 $X(x), T(t)$ の積で表されるものを考えることにしよう。 $X(x)$ は x だけの関数であり、 t には依存しない。 $T(t)$ は t だけの関数であり、 x には依存しない。式 (26.3) のような解が都合よく求まるかどうかはわからないが、とにかく強引に進める。なお、以下で、 $X(x)$ の (x) は、 x に相当する部分が特殊な式や値、例えば $x + ct$ 等でないときは、適宜、省略し、 $X(x)$ を X と書く。 $T(t)$ の (t) についても同様。

問 691

(1) 式 (26.3) を式 (26.1) に代入することで以下を示せ:

$$X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (26.4)$$

(2) 次式を示せ:

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (26.5)$$

式 (26.5) の左辺は t のみの関数であり、 x には依存しない。ところが右辺は x のみの関数であり、 t には依存しない。それらが互いに等しいということは、結局、それらは x にも t にも依存しない。 x と t 以外に変数は存在しないので、 x にも t にも依存しない「関数」は、定数である。そこで、その定数を $-\omega^2$ と置こう (なんで A とか a のようなシンプルな文字を使わずにわざわざ $-\omega^2$ という変な置き方をするのかは、そのうちわかる)。すなわち、

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\omega^2 \quad (26.6)$$

とする。これを2つの式に分離する:

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2 \quad (26.7)$$

$$c^2 \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\omega^2 \quad (26.8)$$

式 (26.7) の両辺に T をかけ、式 (26.8) の両辺に X/c^2 をかけると、次のようになる:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2 T \quad (26.9)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} X \quad (26.10)$$

式 (26.9) は1つだけの変数 t を持つ関数に関する微分方程式なので、常微分方程式である。式 (26.10) も同様に常微分方程式である。従って、もはや偏微分記号 ∂ を使い続ける必要は無く、

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 T \quad (26.11)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} X \quad (26.12)$$

となる。右辺を左辺に移項すれば、

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (26.13)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0 \quad (26.14)$$

となる。式 (26.13) や式 (26.14) は、式 (20.29) とよく似ている。その解き方を思い出しながら、先に進もう。

問 692 式 (26.13) を演算子法で解き、次式を示せ (α_1, α_2 は任意の定数):

$$T(t) = \alpha_1 e^{i\omega t} + \alpha_2 e^{-i\omega t} \quad (26.15)$$

式 (26.15) は複素数を陽に含むのでそのままではちょっと使い辛い。そこで、 $\alpha_1 = 1/(2i)$, $\alpha_2 = -1/(2i)$ とすると、

$$T(t) = \sin \omega t \quad (26.16)$$

となる。また、 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ とすると、

$$T(t) = \cos \omega t \quad (26.17)$$

となる。式 (26.16)、式 (26.17) には陽に複素数が出てこないのが使いやすい。式 (26.13) は線型同次微分方程式なので、解の線型結合も解である。従って、(a_1, a_2 を任意の定数として)

$$T(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t \quad (26.18)$$

も式 (26.13) の解である。

注: 式 (26.13) は 2 階常微分方程式なので、その解には積分定数に相当する任意定数が 2 つあるはずだ。それは式 (26.15) や式 (26.18) のように 2 つの線型独立な解の線型結合の係数に相当する。そのとき、 $\{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}\}$ や $\{\sin \omega t, \cos \omega t\}$ のような「2 つの線型独立な解の集合」は、全ての解の集合における基底である (基底が 2 つの要素からなるので、全ての解の集合は 2 次元の線型空間である)。従って式 (26.15) や式 (26.18) は式 (26.13) の全ての解を表すことができる。

式 (26.14) についても、ほぼ同様のやり方で解くことができる。

問 693 式 (26.14) を解き、次式を示せ (b_1, b_2 は任意の定数):

$$X(x) = b_1 \sin \frac{\omega x}{c} + b_2 \cos \frac{\omega x}{c} \quad (26.19)$$

式 (26.18)、式 (26.19) を式 (26.3) に代入すると、次式

のようになる:

$$\psi = (a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t) \left(b_1 \sin \frac{\omega x}{c} + b_2 \cos \frac{\omega x}{c} \right) \quad (26.20)$$

問 694 式 (26.20) が式 (26.1) を満たすことを示せ。

ここで注意: 式 (26.20) は確かに式 (26.1) の解だが、だからといって、式 (26.1) の解の全てが必ずしも式 (26.20) の形になるとは限らない。

しかし、式 (26.1) は線型同次微分方程式なので、解の線型結合も解である (重ね合わせの原理)。すなわち、式 (26.20) のような関数を複数個作って、それを重ね合わせたものも解になるのだ!! 式 (26.20) の中で、 $\omega, a_1, a_2, b_1, b_2$ はそれぞれ任意の定数だったことに注意して欲しい。これらの「任意の定数」にいろんな値を入れれば、いろんな関数ができるだろう。それらを重ね合わせて、それぞれの状況に応じた解を作ればいいのだ。

このように、線型同次偏微分方程式の解を、それぞれの独立変数の 1 変数関数の積と仮定して解き、その重ね合わせで一般解を得ることができる。この方法を「変数分離法」という。数学リメディアル教材で学んだ常微分方程式の変数分離法と同じ言葉だが意味は違う。多義語である。

問 695 変数分離法による解が式 (24.18) を表せることを確認しよう。

(1) 以下の 4 つの関数は、式 (26.20) の形の関数 (つまり変数分離法による解) であることを示せ:

$$\psi_1 = \sin \omega t \sin \frac{\omega x}{c} \quad (26.21)$$

$$\psi_2 = \cos \omega t \cos \frac{\omega x}{c} \quad (26.22)$$

$$\psi_3 = \sin \omega t \cos \frac{\omega x}{c} \quad (26.23)$$

$$\psi_4 = \cos \omega t \sin \frac{\omega x}{c} \quad (26.24)$$

(2) 次式を示せ (ヒント: 三角関数の加法定理):

$$\psi_2 + \psi_1 = \cos \left(\frac{\omega(x-ct)}{c} \right) \quad (26.25)$$

$$\psi_4 - \psi_3 = \sin \left(\frac{\omega(x-ct)}{c} \right) \quad (26.26)$$

式 (26.25)、式 (26.26) は、変数分離法による解の線型結合なので、それらも式 (26.1) の解である (これらは右に進行する正弦波)。そして、様々な値の ω について式 (26.25)、式 (26.26) のような関数を作り、重ね合わせれば、フーリエ級数展開の考え方で式 (24.18) の $f(x-ct)$

を表すことができるのだ。 $g(x+ct)$ についても同様。

26.2 初期条件・境界条件

現実の問題では、解は「任意の定数」を含まない特定の関数として定めたい。でないと、波動現象（津波の到達範囲や規模など）を予測・解明できない。

P.106 あたりでも述べたように、一般的に、式 (26.1) のような、時刻 t と位置 x に関する 2 変数の偏微分方程式の解を定めるには 2 種類の付帯条件が必要だ：

1. 初期条件 (initial condition)
2. 境界条件 (boundary condition)

初期条件とは、時刻の最初 ($t=0$) でどうあるかである。境界条件とは、 x の端でどのようになるかである。初期条件・境界条件は、波動のメカニズムで決まるのではなく、個々の問題設定に応じて、解析者が与えるものだ。

ここでは、例として以下のような付帯条件を与えて式 (26.1) を解いてみよう：波は $x=0$ から $x=L$ までの線上だけに存在し、

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 3L/8 \text{ のとき}) \\ h & (3L/8 \leq x < 5L/8 \text{ のとき}) \\ 0 & (5L/8 \leq x \leq L \text{ のとき}) \end{cases} \quad (26.27)$$

$$\forall x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (26.28)$$

$$\forall t, \quad \psi(0, t) = 0 \quad (26.29)$$

$$\forall t, \quad \psi(L, t) = 0 \quad (26.30)$$

とする。ここで h は適当な定数とする。

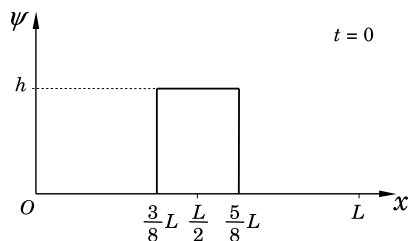


図 26.1 式 (26.27) のグラフ。波は最初はこの形の静止状態から出発すると仮定する (初期条件)。

式 (26.27) は初期条件である。波が最初に図 26.1 のような形から始まる、ということを言っている。式 (26.28) も初期条件である。波は静止状態から始まる、ということを言っている (初期条件がこのように 2 つ必要なのは、この方程式が時刻 t に関する 2 階の微分を含むからである)。式 (26.29)、式 (26.30) は境界条件である。波は左端 ($x=0$) と右端 ($x=L$) では 0 に固定されていて変位できない、ということを言っている。

式 (26.1) の解でこれらの条件を満たすような関数を、変数分離法による解 (つまり式 (26.20) のような関数) の重ね合わせによって求めてみよう。

とりあえず式 (26.27) は手強いので後に回し、まず式 (26.28)、式 (26.29)、式 (26.30) を満たす解を見つけよう：

問 696 式 (26.20) のような関数を考える。この関数は「恒等的に 0」ではないとする。

- (1) 式 (26.29) を満たす場合、 $b_2 = 0$ となることを示せ。
- (2) さらに式 (26.28) を満たす場合、 $a_1 = 0$ となることを示せ。

すると、式 (26.20) は次式のようになる：

$$\psi(x, t) = A \cos \omega t \sin \frac{\omega x}{c} \quad (26.31)$$

ここで、 $a_2 b_1 = A$ と置き直した。言うまでもなく、 A は任意の定数である。

問 697 式 (26.31) のような関数を考える。式 (26.30) より、次の 2 つの式を示せ (n は任意の整数)：

$$\frac{\omega}{c} L = n\pi \quad (26.32)$$

$$\omega = \frac{cn\pi}{L} \quad (26.33)$$

その結果、式 (26.31) は次式のようになる：

$$\psi = A \cos \frac{cn\pi t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (26.34)$$

問 698 式 (26.34) は式 (26.1) を満たし、なおかつ、式 (26.28)、式 (26.29)、式 (26.30) を満たすことを、確認せよ。(まだ式 (26.27) は満たしていない。)

当初は任意の数が許されていた ω が、式 (26.32) によって、ある値の整数倍に限定されてしまった! ω は、時刻 t に関する三角関数 (つまり振動) の中の t の係数になっている。つまり、 ω は振動の角速度である。これが連続した値ではなく、ある値の整数倍という離散的な値 (とびとびの値) になった。これが起きたのは、境界条件 (式 (26.29) と式 (26.30)) を課したからである。

ここでは詳述しないが、一般に、波動現象の多くは、有限な領域に局在するような条件を課すと、振動の角速度や波数は離散的な値しか許されなくなる。これに対応する現象が、弦楽器や管楽器の共鳴 (弦や筒の長さによって特定の周波数の音を出す現象) である。また、原子内部で電子のエネルギー準位が離散的な値になるのも、こ

れと本質的には共通した仕組みである。これについては後でもう少し詳しく調べよう。

さて、式 (26.34) は、いい線まで行っているが、残念ながら式 (26.27) をまだ満足していない。そこで、いよいよ「重ね合わせ」を使うのだ。

問 699 式 (26.34) のような関数の重ね合わせ:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{cn\pi t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (26.35)$$

のような関数も、式 (26.1) を満たし、なおかつ、式 (26.28)、式 (26.29)、式 (26.30) を満たすことを、確認せよ。ここで、 A_n は任意の定数である。

式 (26.35) は式 (26.27) 以外の条件を既に満たしていることが問 699 でわかったので、心置きなく式 (26.35) を使って式 (26.27) に挑戦しよう。式 (26.35) で $t = 0$ と置くと t に関する \cos の項が全部 1 になるので、

$$\psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (26.36)$$

となる。従って、式 (26.35) が式 (26.27) を満たすようにするために、次式が成り立つように、 A_n の値を決めればよいのだ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 3L/8 \text{ のとき}) \\ h & (3L/8 \leq x < 5L/8 \text{ のとき}) \\ 0 & (5L/8 \leq x \leq L \text{ のとき}) \end{cases} \quad (26.37)$$

これを実現するためにフーリエ級数展開を使う。まず、式 (26.37) の右辺は $x = 0$ から $x = L$ までで定義されているが、これを便宜上、 $x = -L$ から $x = 0$ に、奇関数として拡張しよう (これはフーリエ級数展開を楽にするための工夫。実体としては、 $x < 0$ への拡張には意味が無いが、数学的操作のためには有用なのだ)。これを $\phi(x)$ と書く。 $\phi(x)$ の式とグラフは以下ようになる:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & (-L \leq x < -5L/8 \text{ のとき}) \\ -h & (-5L/8 \leq x < -3L/8 \text{ のとき}) \\ 0 & (-3L/8 \leq x < 3L/8 \text{ のとき}) \\ h & (3L/8 \leq x < 5L/8 \text{ のとき}) \\ 0 & (5L/8 \leq x \leq L \text{ のとき}) \end{cases} \quad (26.38)$$

そして、次式が成り立つように A_n を定めるのが、当面の目標である (これが成り立てば式 (26.37) は自動的に

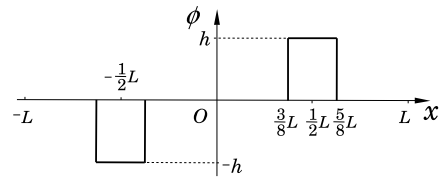


図 26.2 $\phi(x)$, つまり式 (26.38) のグラフ

に成り立つ):

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (26.39)$$

そのためには $\phi(x)$ をフーリエ級数展開したいのだが、諸君が知っているフーリエ級数展開は、 $-\pi \leq x \leq \pi$ で定義された関数に関するものなので、この場合の定義域 ($-L \leq x \leq L$) とは少し違う。なので、フーリエ級数展開のやり方もちょっと変えなければならない:

問 700 $x = -L$ から $x = L$ の間で定義された実数関数 (正確に言えば、2 乗して積分できる関数の集合) の集合 W を考える (それは \mathbb{R} を体とする線型空間である)。 W の任意の要素 $f(x), g(x)$ について、

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)g(x)dx \quad (26.40)$$

という演算を内積として導入する (これが内積の公理を満たすことは、少し考えればわかるだろう)。

- (1) 以下の集合は、 W の正規直交基底であることを示せ (ただし、 W の任意の要素をこの線型結合で表現できる、ということの証明は難しいので省略せよ)。

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{L}, \dots, \sin \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{L}, \dots \right\} \quad (26.41)$$

ここで n は 1 以上の任意の整数。

- (2) W の任意の要素 $f(x)$ を、

$$f(x) = \frac{P_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ P_n \cos \frac{n\pi x}{L} + Q_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} \quad (26.42)$$

と表すとき ($P_0, P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2, \dots$ は適当な定

数), 次式を示せ:

$$P_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{f(x)}{\sqrt{2}} dx \quad (26.43)$$

$$P_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (26.44)$$

$$Q_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (26.45)$$

問 701 式 (26.39) で定義した $\phi(x)$ を式 (26.42) のように表すと, 次式が成り立つことを示せ:

$$(1) P_0 = 0 \quad (26.46)$$

$$(2) P_n = 0 \quad (26.47)$$

$$(3) Q_n = \frac{4h}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{8} \quad (26.48)$$

$$(4) \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4h}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{8} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (26.49)$$

式 (26.39) と式 (26.49) を見比べてみよう。目標が達成できたことがわかるだろう。つまり, 式 (26.39) の A_n を, 式 (26.48) の Q_n のように定めればよい。その結果, 式 (26.35) は次式のようになる:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4h}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{8} \cos \frac{cn\pi t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (26.50)$$

式 (26.50) が, 求める解である。すなわち, 式 (26.50) は, 式 (26.1) を満たし, なおかつ, 式 (26.27) から式 (26.30) までの条件 (初期条件と境界条件) を全て満たす, パーフェクトな関数である。お疲れ様!!

では, 苦労して導いた式 (26.50) をグラフに描いてみよう。といっても, $n = \infty$ まで計算することはできないので, ここでは $n = 11$ までとしよう。

問 702

- (1) 式 (26.48) において, n が偶数の時は $A_n = 0$ となることを示せ。

(2) 次式を示せ:

$$A_1 = \frac{4h}{\pi} \sin \frac{\pi}{8}$$

$$A_3 = -\frac{4h}{\pi} \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{8}$$

$$A_5 = \frac{4h}{\pi} \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{8}$$

$$A_7 = -\frac{4h}{\pi} \frac{1}{7} \sin \frac{7\pi}{8}$$

$$A_9 = \frac{4h}{\pi} \frac{1}{9} \sin \frac{9\pi}{8}$$

$$A_{11} = -\frac{4h}{\pi} \frac{1}{11} \sin \frac{11\pi}{8}$$

...

(26.51)

- (3) $L = 4, h = 1, c = 1$ とする。表計算ソフトを使って, 式 (26.50) のグラフを, $t = 0, 0.5, 1, 2, 3, 4$ のそれぞれについて描け。ただし, 和は $n = 11$ までで打ちきってよい (やる気のある人はもっとたくさんまでやってもよい)。縦軸のスケールをグラフ間で統一すること。

図 26.3 に, この解のグラフの例を示す。ただし, このグラフは厳密な解ではない。例えば, $t = 0$ では式 (26.27) からずれている部分がある。式 (26.27), つまり図 26.1 では, グラフの山は $x = 3L/8$ と $x = 5L/8$ で垂直な壁を持ち, その間ではフラットな山頂と裾野を持つはずだが, 図 26.3 の $t = 0$ では, 壁が崩れているし, フラットであるべきところもフラットではない。これは, 式 (26.50) を $n = 11$ までしか計算していないからである。もっと多くの項まで計算すれば, よりシャープに式 (26.27) を再現するはずである。

式 (26.50) を $n = 31$ まで計算したグラフを図 26.4 に示す。図 26.3 よりもシャープに波形を再現していることがわかる。このグラフの細かい特徴を見ていこう:

$t = 0.5$ では, 山の高さが半分に, 幅が 2 倍になっている。これは, 最初の山の半分 (上下の半分。左右方向の半分ではない) が左方向へ, もう半分が右方向へ進む波になったからである。実際, 波は速度が $c = 1$ なので, $t = 0.5$ のときに, x 方向は 0.5 だけ移動しているはずだ。もとの山の半分以上を左に 0.5 だけずらし, もう半分以上を右に 0.5 だけずらせば, このようなグラフになることは明らかである。うまくつじつまがっていない (形が若干崩れているのは仕方ない。計算を有限項で打ち切ったことによる誤差である)。

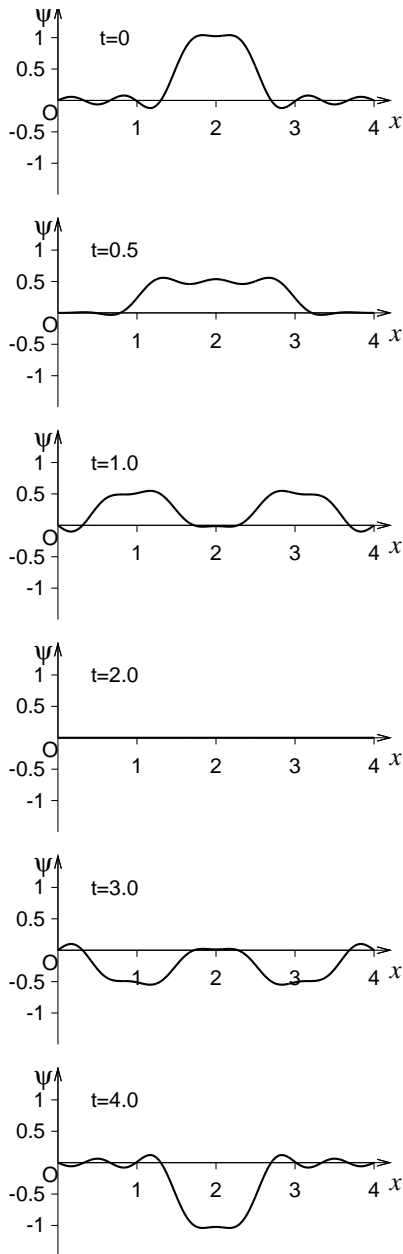


図 26.3 式 (26.50) のグラフ。 $L = 4, h = 1, c = 1$ とする。 $n = 11$ まで。

$t = 1$ では、半分半分に分かれた波が、左と右にそれぞれさらに進んで、完全に分離した状態である。この後、間もなく、それぞれは $x = 0$ と $x = 4$ の境界にぶつかることになる。

$t = 2$ では、それぞれの波が境界にぶつかり、既に反射した波が、まだ反射していない波と重なり合っ、互いに打ち消し合った瞬間である。一見、波は消えてしまって静穏が訪れたように見えるが、そうではない。波は動いており、 ψ は今にも上下に変化しようとしている (ψ は 0 でも $\partial\psi/\partial t$ は 0 ではない)。

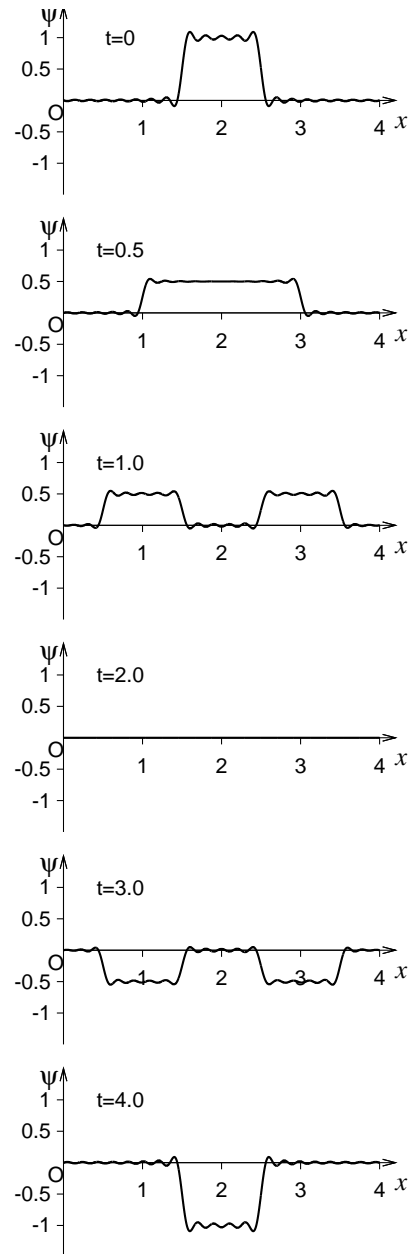


図 26.4 式 (26.50) のグラフ。 $L = 4, h = 1, c = 1$ とする。 $n = 31$ まで。

$t = 3$ では、それぞれの波が境界に衝突し終わり、反射した波だけが存在する状態だ。境界（つまり両端）では $\psi = 0$ という条件のために、 ψ は 0 以外の値をとることができない、つまりそこで波は変位できないから、反射波は上下がひっくり返った形になる。（こういう条件を固定端条件と言う。ちなみに境界条件には「自由端条件」というものもある。自由端条件では、反射波は上下がひっくり返らない。固定端条件と自由端条件を線型結合したような境界条件もある）。その理由を簡単に言うと、ひっくり返った反射波がもとの波と重ね合わさることで、両者が境界で互いに打ち消し合っ、そこでは ψ が常に 0 になるのである。境

界条件を満たすには、反射波はひっくりかえらざるを得ないのである。

$t = 4$ では、左右に進んだ波が反射波として戻ってきて再び重なり合い、もとの波形をそっくり上下逆にしたような形になっている。

問 703 式 (26.50) は、 $t = 5, 6, 7, 8$ ではそれぞれどうなるか、予想してグラフの概形を描け。

26.3 熱伝導方程式・拡散方程式

生物資源学類の研究対象には、温度や熱に関連する現象が多い。例えば、食品加工や殺菌処理には、熱処理が欠かせない。熱処理では、対象物体を、必要な温度に、必要な時間だけ、維持しなければならない。温度が高すぎても低すぎてもダメだし、時間が長すぎても短すぎてもダメである。従って、物体の温度と熱の挙動を、定量的に解析する手法は、我々にとって必須のものである。我々が学んできた線型微分方程式の考え方は、ここでも大いに活躍するのである。

では、手始めに、以下のような問題を考えよう： x 軸に沿って線状の物体がある。熱は物体に沿って伝導し、物体と外界との間で熱のやりとりはないとする。その物体の、位置 x 、時刻 t における温度を、 $T(x, t)$ と書こう。この関数 $T(x, t)$ が従う方程式をこれから見つけよう。

熱力学第二法則によれば、一般に、熱は、温かい部分から冷たい部分に向けて伝わるものである。そこで、いま、位置 x において、単位時間あたりに x の正の方向に通過する熱量 $J(x, t)$ は、

$$J = -k \frac{\partial T}{\partial x} \tag{26.52}$$

と書けると仮定しよう。右辺の $\partial T / \partial x$ は温度勾配である。すなわち、 x の正の方向に単位距離だけ進むと温度がどれだけ上がるかである。その値が大きいほど、温度は x に沿って急激に高くなる。右辺にマイナスがついているのは、温度勾配の方向と熱移動の方向が逆であることを表す。 k は熱伝導率と呼ばれる定数である。

式 (26.52) は、フーリエの法則と呼ばれ、多くの物質で成り立つことが確認されている。ちなみに、この法則から式 (16.22) が導かれる。

さて、位置 $x - \Delta x / 2$ と位置 $x + \Delta x / 2$ ではさまれた微小な部分を Ω と呼ぼう (図 26.5 参照)。

Ω の温度変化を考える。 Ω には、時間 Δt の間に、 Ω

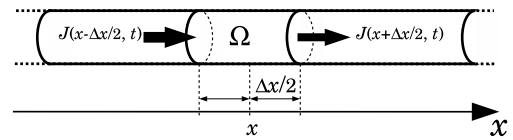


図 26.5 線状の物体に熱が伝わる様子。 J は断面を単位時間あたりに通過する熱量。

の左端 ($x - \Delta x / 2$ の位置) で左隣から

$$J(x - \frac{\Delta x}{2}, t) \Delta t \tag{26.53}$$

という熱量が入り、 Ω の右端 ($x + \Delta x / 2$ の位置) で右隣へ

$$J(x + \frac{\Delta x}{2}, t) \Delta t \tag{26.54}$$

という熱量が出て行く。差し引き、

$$q = J(x - \frac{\Delta x}{2}, t) \Delta t - J(x + \frac{\Delta x}{2}, t) \Delta t \tag{26.55}$$

という熱量が、 Ω に蓄積される (無論、この値が負であるなら、そのぶんだけ熱量が失われる)。

問 704 式 (26.55) は、 Δx が十分に 0 に近ければ、次式のように近似できることを示せ:

$$q = -\frac{\partial J}{\partial x} \Delta x \Delta t \tag{26.56}$$

この物体の、単位長さあたりの熱容量を η とする (熱容量とは、物体の温度を単位温度だけ上げるのに必要な熱量である)。すると、 Ω の長さは Δx なのだから、 Ω の熱容量は $\eta \Delta x$ となる。従って、 Ω の温度を ΔT だけ上げるには、 $\eta \Delta x \Delta T$ という熱量が必要である。従って、 Ω に熱量 q が入るときは、

$$q = \eta \Delta x \Delta T \tag{26.57}$$

という式を満たすような温度変化 ΔT が起きる。ここで、 Ω の温度を位置 x における温度で代表すると、

$$\Delta T = T(x, t + \Delta t) - T(x, t) \tag{26.58}$$

とできるから、結局、式 (26.57) は、

$$q = \eta \Delta x \{T(x, t + \Delta t) - T(x, t)\} \tag{26.59}$$

となる。

問 705

(1) 式 (26.59) は、 Δt が十分に 0 に近ければ、次式のよ

うに近似できることを示せ:

$$q \doteq \eta \frac{\partial T}{\partial t} \Delta x \Delta t \quad (26.60)$$

(2) 式 (26.56) と式 (26.60) から次式を示せ:

$$-\eta \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial x} \quad (26.61)$$

(3) 式 (26.52) と式 (26.61) から次式を示せ:

$$\eta \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (26.62)$$

(4) 特に, k が位置によらない定数ならば, 式 (26.62) は次式のように書けることを示せ:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\eta} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (26.63)$$

式 (26.62) や式 (26.63) が, 我々が探していた「関数 $T(x, t)$ が従う方程式」である。これらを 1 次元の熱伝導方程式と呼ぶ。熱伝導率 k は必ずしも定数とは限らない。材料が位置によって異なっていたり, 線がところどころ細かったり太かったりすると, k は x の関数になる。従って, 式 (26.62) の方が一般性の高い方程式であるが, 実用上や教育上は, 式 (26.63) のほうがよく現れる。

一般に, x, t の関数 $\psi(x, t)$ について,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (26.64)$$

のような方程式を, 1 次元の拡散方程式と呼ぶ。 $\psi = T$, $K = k/\eta$ と置けば, これは式 (26.63) になる。つまり, 熱伝導方程式は拡散方程式の一種である。従って, 拡散方程式を解くことができれば, 物体の温度を予測・解析できるわけだ。

26.4 変数分離法で拡散方程式を解く

では, 拡散方程式 (26.64) を解いてみよう。簡単のため, K は x, t によらない定数であるとする^{*1}。

波動方程式のときは, 演算子を因数分解して右向きの波と左向きの波の重ね合わせに帰着する, ということができたが, 拡散方程式では, 時刻に関する偏微分が 1 階なので, 波動方程式のような演算子の因数分解はできな

い。そこで, 変数分離法の出番である。式 (26.64) は線型同次微分方程式である。従って, 重ね合わせの原理が成り立つ。それを踏まえて, 式 (26.64) の解を,

$$\psi(x, t) = X(x)Y(t) \quad (26.65)$$

と置こう。式 (26.64) の解は必ずしもこのように書けるとは限らないが, ともかく強引に進める。我々には重ね合わせの原理という強い味方があるのだから!

問 706 式 (26.65) を式 (26.64) に代入することで, 次式を示せ:

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{K}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (26.66)$$

式 (26.66) の左辺は t のみの関数で, 右辺は x のみの関数である。これらが等しくなるには, これらが t にも x にも依存しない定数であることが必要である (P.121 あたりと同様の議論)。それを $-\lambda$ と置こう。マイナスをつけなくてもいいのだが, 後々, 形式的にはマイナスがあるほうが便利なのでつける。

問 707

(1) 式 (26.66) は次式のようになることを示せ:

$$\frac{dY}{dt} = -\lambda Y \quad (26.67)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{\lambda}{K} X \quad (26.68)$$

(2) 式 (26.67), 式 (26.68) はそれぞれ以下のように解けることを示せ:

$$Y = a \exp(-\lambda t) \quad (26.69)$$

$$X = b_1 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{K}} x + b_2 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{K}} x \quad (26.70)$$

ここで, a, b_1, b_2 は任意の定数である。

(3) 式 (26.65) は任意定数 a_1, a_2 を使って次式のようになることを示せ (ヒント: ab_1 を改めて a_1 に, ab_2 を改めて a_2 と置き直す。):

$$\psi(x, t) = \exp(-\lambda t) \left(a_1 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{K}} x + a_2 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{K}} x \right) \quad (26.71)$$

式 (26.71) のような関数は確かに式 (26.64) を満たすが, 式 (26.64) を満たす関数の中には, 式 (26.71) のように書けないものもあるかもしれない。しかし, そのようなものでも, 式 (26.71) の形の関数を様々な λ, a_1, a_2 に

^{*1} これは多くの実用的な問題で成り立つ仮定だが, 成り立たない場合も当然存在する。例えばパンを焼くときパンの温度変化を計算しようとする, パンが焼けて膨らんでいくうちに, 熱伝導率 k は低くなる (空隙のせいで熱が伝わりにくくなる)。

ついて作って重ね合わせれば構成できるのである。

26.5 初期条件・境界条件

式 (26.71) から先に進むには、初期条件・境界条件が必要である。ここでは、例として以下のような条件を与えてみよう: $\psi(x, t)$ は $x = 0$ から $x = L$ までの線上だけに存在し、

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 3L/8 \text{ のとき}) \\ h & (3L/8 \leq x < 5L/8 \text{ のとき}) \\ 0 & (5L/8 \leq x \leq L \text{ のとき}) \end{cases} \quad (26.72)$$

$$\forall t, \psi(0, t) = 0 \quad (26.73)$$

$$\forall t, \psi(L, t) = 0 \quad (26.74)$$

ここで h は適当な定数とする。式 (26.72) は初期条件、式 (26.73)、式 (26.74) は境界条件である。注: これらは前章で解析した波動方程式の初期条件・境界条件とほぼ同じだ。実際、初期条件式 (26.72) は P.123 式 (26.27) と全く同じだし、2つの境界条件も P.123 式 (26.29)、式 (26.30) と全く同じだ。ただし、式 (26.28) に相当する条件がここでは欠けている。その理由の詳細は割愛するが、これは拡散方程式 (26.64) が時刻に関して一階の微分しか含まない (つまり時刻に関する条件が1つだけで十分である) ことによる。以上の条件で、式 (26.64) の解を求めてみよう。

問 708

- (1) 式 (26.71) が式 (26.73)、式 (26.74) を満たすとき、式 (26.71) は次式のようになることを示せ (A は任意の定数):

$$\psi(x, t) = A \exp\left[-K\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (26.75)$$

- (2) 次式は式 (26.64) を満たし、かつ、式 (26.73)、式 (26.74) を満たすことを示せ:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left[-K\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (26.76)$$

式 (26.76) が式 (26.72) を満たすように A_n を決定しよう。式 (26.76) に $t = 0$ を代入して式 (26.72) を使うと次式を得る:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 3L/8 \text{ のとき}) \\ h & (3L/8 \leq x < 5L/8 \text{ のとき}) \\ 0 & (5L/8 \leq x \leq L \text{ のとき}) \end{cases} \quad (26.77)$$

式 (26.77) は式 (26.37) と全く同じ形なので、式 (26.37) 以降の解析結果をそのまま流用できる。すなわち、

$$A_n = \frac{4h}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{8} \quad (26.78)$$

とすればよい。すると、式 (26.76) は次式のようになる:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4h}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{8} \exp\left[-K\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (26.79)$$

式 (26.79) が、求める解である。すなわち、式 (26.79) は、式 (26.64) を満たし、なおかつ、式 (26.72) から式 (26.74) までの条件 (初期条件と境界条件) を全て満たす、パーフェクトな関数である。お疲れ様!!

問 709 $L = 4, h = 1, K = 0.1$ とする。表計算ソフトを使って、式 (26.79) のグラフを、 $t = 0, 0.5, 1, 2, 3, 4$ のそれぞれについて描け。ただし、和は $n = 11$ までで打ちきってよい (やる気のある人はもっとたくさんまでやってもよい)。縦軸のスケールをグラフ間で統一すること。

26.6 線型偏微分方程式と固有値・固有関数

さて、これまで線型同次偏微分方程式を変数分離法で解いたが、その過程で現れた、式 (26.11)、式 (26.12)、式 (27.56)、式 (27.57)、式 (26.67)、式 (26.68) などの方程式は、よく見るといずれも、何らかの線型微分演算子 L と何らかの関数 f 、何らかの定数 λ について、

$$Lf = \lambda f \quad (26.80)$$

という形をしている。

例えば式 (26.12) では、 $L = d^2/dx^2$ 、 $f = X(x)$ 、 $\lambda = -\omega^2/c^2$ とみなせば式 (26.80) の形になる。

ここで、線型微分演算子は行列で表されることと、関数はベクトルとみなせることを思い出せば、式 (26.80) は、正方行列の固有値・固有ベクトルの方程式:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (26.81)$$

(A は正方行列、 \mathbf{x} は A の固有ベクトル、 λ は A の固有値)

と同じ形をしていることがわかるだろう。そこで、式 (26.80) の定数 λ と関数 f を、線型微分演算子 L のそれぞれ固有値、固有関数と呼ぶ。そして、式 (26.80) や式 (26.81) のような方程式を固有方程式と呼ぶ。

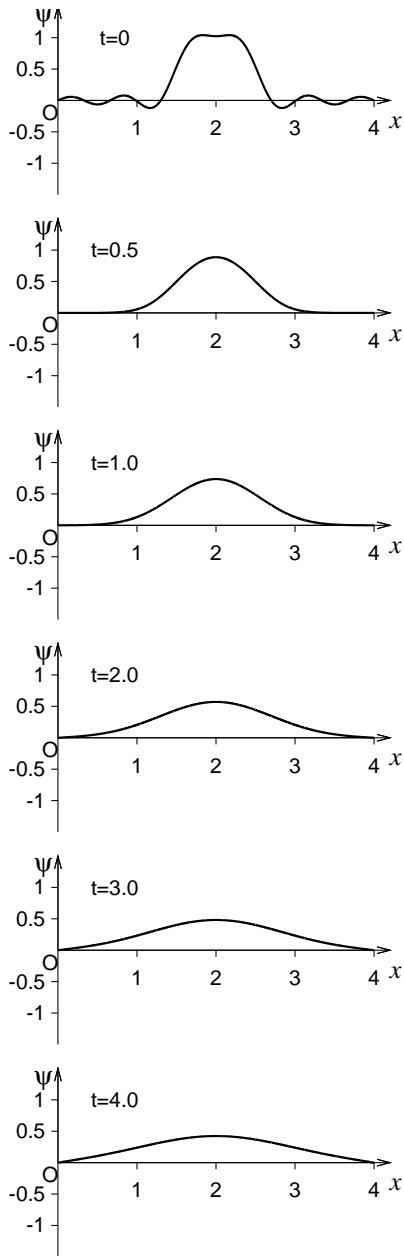


図 26.6 式 (26.79) のグラフ。 $L = 4, h = 1, K = 0.1$ とする。 $n = 11$ まで計算。

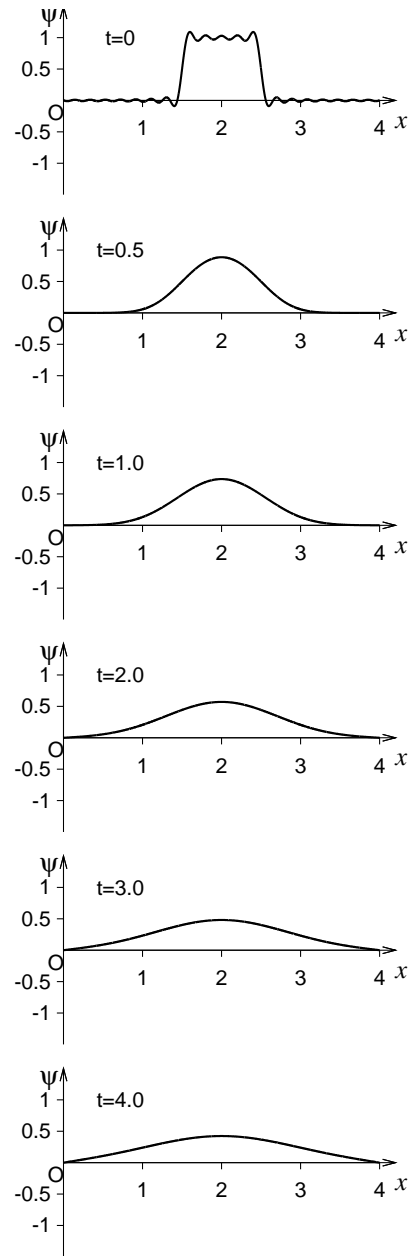


図 26.7 式 (26.79) のグラフ。図 26.6 と同じ定数条件だが、 $n = 41$ まで計算。

26.7 解答

答 691 略解

- (1) 略(代入するだけ。なお, X は t を含まないから, $\partial^2/\partial t^2$ では定数とみなしてその前に出せる。同様に, T は x を含まないから $\partial^2/\partial x^2$ では定数とみなす。)
- (2) 略(式(26.4)の両辺を XT で割る。)

答 692 式(26.13)を書き換えると,

$$\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)T = 0 \quad (26.82)$$

これは,

$$\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)T = 0, \quad \left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)T = 0 \quad (26.83)$$

という2つの方程式に分けることができる。これらはいずれも常微分方程式の変数分離法を使って解くことができ、解はそれぞれ $T = \alpha_1 e^{i\omega t}$, $T = \alpha_2 e^{-i\omega t}$ とできる。式(26.13)は線型同次微分方程式なので、これらの解の線型結合も解である。従って、式(26.15)のようにできる。

答 693 略(式(26.13)から式(26.15)を導出する過程を再現すればよい。ただし, t を x に, T を X に, ω を ω/c に読み替える。)

答 694 略(式(26.20)を式(26.1)の両辺にそれぞれ代入して計算し, 互いに等しくなることを示せばよい。実は簡単。)

答 695 略解

- (1) 略(例えば, 式(26.20)で $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 0$ とすれば, ψ_1 になる。このようにそれぞれの式について, a_1, a_2, b_1, b_2 を適切に決めてやる)
- (2) 三角関数の加法定理を使って,

$$\begin{aligned} \psi_2 + \psi_1 &= \cos \omega t \cos \frac{\omega x}{c} + \sin \omega t \sin \frac{\omega x}{c} \\ &= \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) = \cos\left(\frac{c\omega t - \omega x}{c}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\omega x - c\omega t}{c}\right) = \cos\left(\frac{\omega(x - ct)}{c}\right) \end{aligned}$$

残りも同様。

答 696

- (1) 式(26.20)に
- $x = 0$
- を代入すると,

$$\psi(0, t) = b_2(a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t) \quad (26.84)$$

となる。式(26.29)より, これがどんな t についても0に等しい。それには, $b_2 = 0$ となるか, $a_1 = a_2 = 0$ となるしかない。ところが, もし $a_1 = a_2 = 0$ なら, 式(26.20)は恒等的に0になり, 仮定に反する。従って $b_2 = 0$ である。

- (2) 前小問の結果(
- $b_2 = 0$
-)より, 式(26.20)は次式のようになる:

$$\psi = (a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t)b_1 \sin \frac{\omega x}{c} \quad (26.85)$$

これを t で偏微分すると,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (a_1 \omega \cos \omega t - a_2 \omega \sin \omega t)b_1 \sin \frac{\omega x}{c}$$

となる。これに $t = 0$ を代入すると,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = a_1 \omega b_1 \sin \frac{\omega x}{c}$$

となる。式(26.28)より, これが恒等的に0に等しい。それには, $a_1 = 0$ 又は $\omega = 0$ 又は $b_1 = 0$ となるしかない。ところが, もし $\omega = 0$ なら, 式(26.85)が恒等的に0になってしまい, 仮定に反する。また, もし $b_1 = 0$ となっても, 式(26.85)が恒等的に0になってしまい, 仮定に反する。従って, $a_1 = 0$ となるしかない。

答 697 式(26.31)に $x = L$ を代入すると,

$$\psi(L, t) = A \cos \omega t \sin \frac{\omega L}{c} \quad (26.86)$$

となる。式(26.30)より, これがどんな t についても0に等しい。特に, $t = 0$ とすれば,

$$\psi(L, 0) = A \sin \frac{\omega L}{c} = 0 \quad (26.87)$$

となる。これが成り立つには, $A = 0$ か, $\sin(\omega L/c) = 0$ である必要がある。ところが $A = 0$ なら, 式(26.31)は恒等的に0になってしまい, 仮定に反する。従って $\sin(\omega L/c) = 0$ である。それが成り立つには, n を任意の整数として, $\omega L/c = n\pi$ であればよい。こうして式(26.32)が得られた。これを変形すれば式(26.33)を得る。

答 698 略。

答 699 略。(式 (26.35) を式 (26.1) の左辺と右辺にそれぞれ代入して式変形し、両者が等しくなることを示す。その他の条件についても、素直に左辺に式 (26.35) を代入して式変形して右辺に到達することを示せばよい)

答 700

(1) n, m は 1 以上の整数で, $n \neq m$ とする。

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{1}{2} dx = \frac{2L}{2L} = 1$$

$$\left\langle \cos \frac{n\pi x}{L}, \cos \frac{n\pi x}{L} \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= (\text{途中計算略}) = 1$$

$$\left\langle \sin \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L} \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= (\text{途中計算略}) = 1$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \frac{n\pi x}{L} \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{1}{n\pi\sqrt{2}} \left[\sin \frac{n\pi x}{L} \right]_{-L}^L = 0$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \frac{n\pi x}{L} \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi\sqrt{2}} \left[\cos \frac{n\pi x}{L} \right]_{-L}^L = 0$$

$$\left\langle \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L} \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= (\text{途中計算略}) = 0$$

$$\left\langle \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{m\pi x}{L} \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx$$

$$= (\text{途中計算略}) = 0$$

$$\left\langle \cos \frac{n\pi x}{L}, \cos \frac{m\pi x}{L} \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx$$

$$= (\text{途中計算略}) = 0$$

$$\left\langle \sin \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{m\pi x}{L} \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx$$

$$= (\text{途中計算略}) = 0$$

(2)

$$\begin{aligned} & \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{P_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ P_n \cos \frac{n\pi x}{L} + Q_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{P_0}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle P_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle Q_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = P_0 \end{aligned}$$

となる(ここで (1) で示した, 正規直交基底の性質を使った)。一方, 式 (26.40) より,

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{f(x)}{\sqrt{2}} dx \quad (26.88)$$

となる。これらをあわせて, 式 (26.43) が成り立つ。式 (26.44), 式 (26.45) も同様。

答 701 (略解) 注: $\phi(x)$ が奇関数であることに注意せよ。

(1) 式 (26.43) の $f(x)$ を $\phi(x)$ とする。被積分関数 $\phi(x)/\sqrt{2}$ は奇関数なので, 対称な積分区間での積分は 0。よって $P_0 = 0$ 。

(2) 式 (26.44) の $f(x)$ を $\phi(x)$ とする。被積分関数 $\phi(x) \cos(n\pi x/L)$ は奇関数なので (奇関数 \times 偶関数は奇関数!), 対称な積分区間での積分は 0。よって $P_n = 0$ 。

(3) 式 (26.45) の $f(x)$ を $\phi(x)$ とする。被積分関数 $\phi(x) \sin(n\pi x/L)$ は偶関数なので (奇関数 \times 奇関数は偶関数!), $-L$ から L までの積分は, 0 から L までの積分の 2 倍に等しい。従って,

$$Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (26.89)$$

となる。 $\phi(x) = 0$ となる区間での積分は 0 なので考える必要は無い。 $\phi(x) = h$ となる区間だけを取り出して,

$$Q_n = \frac{2}{L} \int_{3L/8}^{5L/8} h \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (26.90)$$

となる。これを計算すると,

$$Q_n = \frac{2h}{n\pi} \left(\cos \frac{3n\pi}{8} - \cos \frac{5n\pi}{8} \right) \quad (26.91)$$

となる。これを三角関数の和積公式 (リメディアル教材参照) で変形すると, 与式を得る。

答 702 略。(1) では、 n が偶数のとき $\sin(n\pi/2)$ の中身 $(n\pi/2)$ が π の整数倍になるから、その \sin が 0 になることに注意。

答 703 略。以下、ヒント。まず、よくあるのが、グラフに表示される x の値がおかしいとか、なぜか $\psi = x$ のグラフが表示される、というケース：これは表計算ソフトでグラフを作るとき誤って「折れ線グラフ」などを選んでしている可能性が高い。「散布図」を選ぶこと。

次によくあるのは、 $t = 2$ のときにグラフがおかしな形になるケース： $t = 2$ では ψ が理論的には至る所で 0 になるため、数値計算結果も、0 に近い値になる。それを計算機が勝手に気をかかせて無理に拡大して表示してくれているのだ。このような場合、縦軸 (ψ 軸) のスケールに 2E-016 などという数字が現れるが、これは 2×10^{-16} というものすごく 0 に近い値である。縦軸 (ψ 軸) のスケールを、他の時刻でのグラフと同じように、例えば -1 から 1 までに設定変更すれば、きれいなグラフになるはずだ。

答 704 (略解) 線型近似を使って、

$$J\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \doteq J(x, t) - \frac{\partial J}{\partial x}(x, t) \frac{\Delta x}{2}$$

$$J\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) \doteq J(x, t) + \frac{\partial J}{\partial x}(x, t) \frac{\Delta x}{2}$$

とできる。これらを式 (26.55) に代入すれば、与式を得る。

答 705 (略解)

(1) 線型近似を使って、

$$T(x, t + \Delta t) \doteq T(x, t) + \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t$$

となる。右辺の $T(x, t)$ を左辺に移項すると、

$$T(x, t + \Delta t) - T(x, t) \doteq \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t$$

となる。これを式 (26.59) の右辺に代入して与式を得る。

(2) 略 (式 (26.56) と式 (26.60) の右辺どうしを等しいと置いて等式を作り、その両辺を $\Delta x \Delta t$ で割ればよい。)

(3) 略 (式 (26.52) の J を式 (26.61) に代入し、両辺に -1 をかける。)

(4) 略 (式 (26.62) 右辺の最初の偏微分において、 k を定数として前に出す。)

答 706 略。(代入してから両辺を $X(x)Y(t)$ で割る)

答 707 (略解)

(1) 式 (26.66) の両辺が $-\lambda$ に等しいことから、

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial Y}{\partial t} = -\lambda \quad (26.92)$$

$$\frac{K}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda \quad (26.93)$$

となる。この第 1 式の両辺に Y をかけると式 (26.67) を得るし、第 2 式の両辺に X/K をかけると式 (26.68) を得る。各関数は 1 変数関数なので、偏微分記号を使い続ける必要は無い為、 ∂ を d と書きなおした。

(2) 式 (26.67) を (常微分方程式の) 変数分離法で普通に解けば式 (26.69) を得る。式 (26.68) は式 (26.12) の解法と同じ (ω^2/c^2 が λ/K になっただけ)。

(3) 式 (26.69) と式 (26.70) を式 (26.65) に代入してヒントに従えば与式を得る。

答 708 (略解)

(1) 式 (26.71) に $x = 0$ を代入し、式 (26.73) を使うと、

$$\psi(0, t) = a_2 \exp(-\lambda t) = 0 \quad (26.94)$$

となる。これが任意の t に成立するので、特に $t = 0$ を代入すると、 $\psi(0, 0) = a_2 = 0$ となり、 $a_2 = 0$ を得る。従って、式 (26.71) は次式のようになる：

$$\psi(x, t) = a_1 \exp(-\lambda t) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{K}} x \quad (26.95)$$

これに $x = L$ を代入し、式 (26.74) を使うと、

$$\psi(L, t) = a_1 \exp(-\lambda t) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{K}} L = 0 \quad (26.96)$$

となる。これが任意の t に成立するので、特に $t = 0$ を代入すると、

$$\psi(L, 0) = a_1 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{K}} L = 0 \quad (26.97)$$

が成り立つ。もし $a_1 = 0$ なら、この式は成り立つが、式 (26.71) が恒等的に 0 になってしまい、あとでどんなに重ね合わせを使っても式 (26.72) を満たすことができない。従って、上式が成り立つには、

$$\sin \sqrt{\frac{\lambda}{K}} L = 0 \quad (26.98)$$

となる必要がある。それには、 n を任意の整数と

して,

$$\sqrt{\frac{\lambda}{K}} L = n\pi \quad (26.99)$$

となることが必要。この式は

$$\sqrt{\frac{\lambda}{K}} = \frac{n\pi}{L} \quad (26.100)$$

$$\lambda = K \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (26.101)$$

と変形できる。これらを式 (26.95) に代入し, a_1 を A と書きなおせば, 与式を得る。

(2) 略 (代入して計算せよ)。

答 709 略。

一問一答

- 困難なものを作るときには, それを要素に分けて, 解いて, 足して, 近似するというのが, 重ね合わせの原理の利用法なのかなと思った。

... まさにそのとおり。歴史で習った, 植民地主義の「分割統治」"divide and conquer"と同じ発想です (植民地主義は負の遺産ですが)。それが可能な対象が「ベクトル」なのです。

- なんか...線型空間って終わりのないパズルをやっているみたい。

... 発想の原点は単純で, 「線型結合」なんだけどね。

- 今まで学んできた内容が, 次々とつながっていて面白いと思いました。

... 線型空間と線型写像がわかれば, いろんなものをつなげていける。

- 2年生になったら物理を履修したいです。

... がんばれー。でも, 基礎数 II までマスターしたら, 大学初年級の物理は独学できるよ。自分に合った良い教科書をこつこつ読んでいくことが大事。ただし, 高校物理の本はやめたほうがよい。せっかく学んだ数学を使わずに, まだるっこしい説明に付き合わされるからね。最近では, 琉球大学の前野昌弘先生が書かれた教科書が素晴らしいと思います: 「よくわかる初等力学」 / 「よくわかる電磁気学」 / 「よくわかる解析力学」 / 「よくわかる量子力学」いずれも東京図書。数学を恐れずに使うけ

ど, 物理的な発想やイメージも豊かに説明してくれています。大学の講義の経験をたっぷり注いでいるようで, 多くの学生がまずくところに入念な説明が用意されています。ただし, なにぶん新刊なので, 誤植がたくさんあります。前野先生のホームページに正誤表が載っているので, それを確認してください。

- 津波が深い所では速く, 浅い所では遅くなる理由が数学的に分かった気がする。

... それ, 沿岸部で波が高くなる理由です。沿岸部は浅いので波が遅くなり, 後ろからどんどん波が覆いかぶさってきちゃう。

- 津波がそれほど速いとは知らなかったです。

... 水深が大きいと, 津波はむっちゃ速いです。逆に, 津波の速さからその場所の水深がわかる。

- 微分方程式を解けた時のエクスタシーはヤバイ。笑

... いや, ほんとやばいよね。

- 重ね合わせの原理の重要性がわかりました。

... そう言ってくれて嬉しいけど, この原理は, さらにもっと重要な概念なのです。

- 「線形」と「線型」の使い分けってあるんですか?

... 線型でも線形でもどっちでも OK。私は一応, 線型なるべく統一しています。

- 数学に分野は無いんですね。何にでもリンクするから便利だけど逆にややこしくなります。

... 数学に限らず, 「基礎学力」は何にでもリンクします。基礎学力なしに「幅広い視野」は無理です。

- 高校の時にベクトルと行列が大好きだったので抽象的な概念を持つ線型代数の世界へ中々離陸できません。具体的に考えようとしてしまう自分。

... 具体性と抽象性の間を行ったり来たりすることが大事。幾何ベクトル以外の具体例 (関数をベクトルと見る見方とか) をたくさん考えて下さい。

- 波動もおもしろそうです。

... 面白いよ! 物理の核心には波動がたくさんあります。物理以外でも, 波動に関連するような現象や概念はたくさんあります。

第27章

量子力学入門

これまで学んだ、線型空間、特に計量空間の理論は、量子力学、つまり分子や原子のスケールでの物質や光の挙動の原理の、数学的な基礎である。量子力学は、化学や生化学の基礎理論なので、生物資源学類でも大切な学問である。例えば、原子や分子の量や構造を測定するときに使われる、赤外分光法や、NMR (核磁気スピン共鳴) などの手法は、量子力学が無ければ理解できない。諸君が「化学」「化学結合論」「基礎化学」などの科目で悩んだ (あるいは悩むであろう) ことの多くは、量子力学である。

量子力学をきちんと理解するには、普通、物理学や化学の専門の学部 (学類) で、数学と物理学を基礎からみっちり2年間ほど勉強しないと無理である。しかし、諸君はこれまで一生懸命勉強してきたので、量子力学の「片鱗」を理解するくらいならできる数学力を身につけている。

27.1 状態ベクトル

諸君が学んできた物理学は、「運動の3法則」(慣性の法則、運動方程式、作用反作用の法則) を基本原理とし、それをもとに物体が「いつ、どこにいるか」を定めることが興味の対象だった。このような物理学を「ニュートン力学」という。そしてその目標は、運動方程式 $F = ma$ を微分方程式として解くことで達成されるのだった。

ところが、極微の世界になってくると、物体が「いつ、どこにいるか」が、必ずしも問題設定としてうまくないことがわかってきた。たとえ話で説明しよう。

いま、君が非常にうまいラーメンを食べている。君はラーメンに没頭し、「ラーメンがうまい!」という幸せで満たされている。そのとき君に携帯電話がかかり、友人から、「おい、明日提出の基礎数学のレポートできたか?」と聞かれたとする。とたんに君は憂鬱になる。「そういえばレポートまだできてない。やばい」... ラーメンのうまさを忘れて、君の頭はレポートのことでいっぱいになる。せっかくうまいラーメンを食ったのに、嫌なことを思い出させた友人に腹が立つ。そうすると、ラーメンもそれほどうまくなくなってきた。聞かれる前は、それなりの心理状態 (ラーメンうまい) にあったのに、

「レポートできたか」と聞かれることで別の心理状態 (レポートやばい) になったのだ。

物体に「どこにいるか」と問うことは、この話に似ている。君の心理状態が必ずしもレポートの出来具合で決まるのではないように、物体の状態は、必ずしも「どこにいるか」で決まるとは限らない。ところが「レポートできたか」と聞かれると、その瞬間、君の心理状態は他のこと (ラーメンのうまさとか) を忘れて急にレポートだけで決まるようになり、「どこにいるか」と聞かれると、その瞬間、物体の状態はほかのことを忘れて「どこにいるか」だけで決まるようになる。

なんだか不思議でわけわからない話だが、それは、例え話で無理に説明しようとしたからだ。量子力学を理解するには、例え話では無理で、多かれ少なかれ、数学が必要になる。

量子力学では、物体の状態は、「 \mathbb{C} を体とする計量空間の要素 (ベクトル)」で表すことができると信じる。それを「状態ベクトル」という。そして、状態ベクトルは、どういうものかは具体的にはイメージできないが、その物体の状態に関する全ての情報が含まれている、と信じるのだ。なぜそうなるのかは誰にもわからないが、そう信じて考えればとにかくつじつまがあうのだ! これは、ちょうどニュートン力学で、 $F = ma$ という「運動方程式」を固く信じていれば、物体の運動をきっちり予測できたのと同じような状況である。信じるものは救われる。それが物理学の考え方である。しかし、これは世界の認識のしかたとして、大きな飛躍である。ニュートン力学では「いつどこにいるか」を興味の対象としたのに、量子力学では、「状態ベクトル」を興味の対象とするのだ。

さて、状態ベクトルは計量空間の要素だというのだから、当然、全ての状態ベクトルを表現できる正規直交基底があるだろう。それがどんなものなのかは知らない

が、とにかくそれらを、

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \quad (27.1)$$

としよう。すると、物体の任意の状態ベクトル x は、

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad (27.2)$$

というふうに線型結合で表されるはずだ (基底による分解)。

例えば、1 個の電子が陽子 (水素原子核) のまわりの $1s$ 軌道にいるときに、その電子の状態ベクトル x は、

$$x = x_1 e_{1su} + x_2 e_{1sd} \quad (27.3)$$

というふうに、 e_{1su} 、 e_{1sd} という 2 つの互いに直交する単位ベクトル (前者は $1s$ 軌道の上向きスピンの状態、後者は $1s$ 軌道の下向きスピンの状態) の線型結合で表現される、と考えるのだ。このとき、

$$\{e_{1su}, e_{1sd}\} \quad (27.4)$$

は、「 $1s$ 軌道にいる電子の状態ベクトルの集合の正規直交基底」である。

ここでもし $x_1 = 1$ で^{*1}、 $x_2 = 0$ ならば、電子は上向きスピンの状態だけにいることになるが、そうでなければ、電子は上向きスピンの状態と下向きスピンの状態が「混ざった状態」にいることになる。

もう少し厳密に言おう。もともと状態ベクトルの集合は線型空間 (計量空間) をなすのだから、「複数の状態ベクトルの線型結合」もひとつの状態ベクトル、つまり「ひとつの状態」なのだ。

ここで先ほどの例を思い出そう。量子力学的にいえば、ラーメンを堪能している君にレポートの出来具合を聞くことは、「ラーメンうまい」という状態ベクトルを、「レポート OK」という状態ベクトルと「レポートやばい」という状態ベクトルの線型結合であらわすようなものである。つまり、

$$\begin{aligned} & \text{「ラーメンうまい」} \\ & = x_1 \text{「レポート OK」} + x_2 \text{「レポートやばい」} \end{aligned} \quad (27.5)$$

ということだ。これは、ラーメンのうまさ、レポートのやばさが、数学的に関係しあっていることになる。これは、現実的には無茶である。レポートができていれば心置きなくラーメンを堪能できるという面もあるが、本質的には、ラーメンのうまさ、レポートの出来は全く

独立のはずだ。しかし量子力学では、一見、独立しているように見えることが、このように関連しあっていることがあるのだ。例えば、ニュートン力学では、物体の位置と速度は^{*2}独立な物理量に思える。ある位置に物体があっても、それは様々な速度をとることができる。しかしそれは「可能性として」の話であり、実際の物体がひとつの物理的状态にあれば、速度は何らかのひとつの値である。一方、量子力学でも、ある箇所に局限されて存在する物体は、様々な速度 (というよりむしろ運動量) をとることができるのだが、それは可能性という意味ではなく、実際に、物体のひとつの状態はあらゆる速度をもつ状態の線型結合であり、あらゆる速度の状態が「混ざっている」と考えざるをえないのだ。

しかも、式 (27.3) や式 (27.5) の x_1 、 x_2 は複素数である。なぜ複素数? どういう意味? わけわからないが、そう考えないと、量子力学は、いろんな意味でつじつまがあわないのだ。実際、 x_1 、 x_2 には物理的な意味がある。量子力学では、物体が状態 x にいるときに、それが状態 y になる確率が、

$$|\langle x | y \rangle|^2 \quad (27.6)$$

で決まるとされている^{*3}。なぜそうなるのかは誰にもわからないが、そう考えればつじつまがあうのだ。

では、「ラーメンうまい」という心理状態にある君が、「レポートできたか?」と聞かれたときに、「OK」と答える確率を量子力学的に考えてみよう^{*4}。もし「レポートやばい」という状態ベクトルと「レポート OK」という状態ベクトルが互いに直交してそれぞれノルムが 1 ならば、式 (27.5) を使って、

$$\langle \text{ラーメンうまい} | \text{レポート OK} \rangle = x_1 \quad (27.7)$$

になる。従って、求める確率は、式 (27.6) より

$$|\langle \text{ラーメンうまい} | \text{レポート OK} \rangle|^2 = |x_1|^2 \quad (27.8)$$

となる。つまり、線型結合の係数 (の絶対値の 2 乗) は、確率をあらわすのだ。

^{*2} 位置や速度をあらわす「位置ベクトル」や「速度ベクトル」と、この話で出てきている「状態ベクトル」は全く別物である。前者は \mathbb{R} を体とするユークリッド空間の幾何ベクトル (「向きと大きさ」を持つベクトル) であり、後者は \mathbb{C} を体とする抽象的な計量空間の要素である。

^{*3} 式 (23.14) 参照。

^{*4} もちろんこれは例え話であり、現実的にはラーメンやレポートを量子力学的に扱うのはばかげている。

^{*1} 正確にいうと、ここで x_1 は $x_1 = 1$ である必要はなく、 $|x_1| = 1$ となる複素数であればよい。

同様に、電子が式 (27.3) のような状態にあるとすれば、この電子のスピンが上向きである確率は、

$$|\langle x | e_{1su} \rangle|^2 = |x_1|^2 \quad (27.9)$$

であり、この電子のスピンが下向きである確率は、

$$|\langle x | e_{1sd} \rangle|^2 = |x_2|^2 \quad (27.10)$$

である*5。

ここで注意。ある特定の状態にある電子が「その特定の状態」にいる確率は当然 1 なのだから、式 (27.6) より、電子の状態ベクトルのノルムは 1 でなければならない。そう言われると戸惑う人もいるだろう。「状態ベクトルは線型空間 (計量空間) の要素だろ? ならスカラー倍ができるはずだ。なのに、ノルムが 1 に制限されるのは矛盾していないか?」そこは臨機応変に対応するのだ。すなわち、もしノルムが 1 でない状態ベクトルがあったら、それを「そのノルム分の 1」倍することで、ノルム 1 に調整して取り扱う、という約束にするのだ。

27.2 状態ベクトルの時間変化

さて、電子は粒子なのだから、時間とともに、いろんな振る舞いをする可能性がある。それは、状態ベクトルが時間とともに変化しようということである。逆に、電子の状態ベクトルが時間とともにどう変化するのかがわかれば、電子の挙動が予測できるだろう。では電子の状態ベクトルは、どのような法則に従って時間的に変化するかを考えてみよう。

今、1 個の電子を考える。この電子の状態ベクトルの集合の正規直交基底を

$$\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\} \quad (27.11)$$

とする。すると、どんな状態 ψ も式 (27.11) の線型結合で表すことができる。従って、電子の時刻 t における状態ベクトル $\psi(t)$ も、

$$\psi(t) = a_1(t)\phi_1 + a_2(t)\phi_2 + \dots + a_n(t)\phi_n \quad (27.12)$$

と表すことができるだろう。ここで、 $a_1(t)$, $a_2(t)$, \dots , $a_n(t)$ は、複素数の値を持つ、時刻 t の関数である。これ

らを並べてできる数ベクトル

$$\begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{bmatrix} \quad (27.13)$$

は、式 (27.11) を基底とした時の、状態ベクトル $\psi(t)$ の座標である。P.81 で述べた考え方に従えば、状態ベクトル $\psi(t)$ は、この座標 (数ベクトル) と同一視できる。すなわち、

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{bmatrix} \quad (27.14)$$

とおいても構わないだろう (これは、式 (27.12) を簡略的に書いたものである。平面の幾何ベクトルを 2 次元の数ベクトルと同一視するのと同じような概念操作である)。以下、この同一視を前提に、話を進める。すると、微小時間 dt が経過したとき、つまり時刻 $t + dt$ における状態は、

$$\psi(t + dt) = \begin{bmatrix} a_1(t + dt) \\ a_2(t + dt) \\ \vdots \\ a_n(t + dt) \end{bmatrix} \quad (27.15)$$

となる。

さて、量子力学では、どんな要因であれ、状態の変化は、もともとの状態に対する線型写像で表される、と考える。そう考えればつじつまが..(略)。従って、 $\psi(t)$ から $\psi(t + dt)$ への変化は線型写像で表される。P.82 で学んだように、基底の線型結合 (つまり座標) で表されたベクトルに関する線型写像は、係数を並べてできる数ベクトルに行列をかけることと同じである。すなわち、

$$\psi(t + dt) = A\psi(t) \quad (27.16)$$

となるはずである。ここで A は適当な n 次の正方行列である。念のため成分で書くと、この式は次式と同じである:

$$\begin{bmatrix} a_1(t + dt) \\ a_2(t + dt) \\ \vdots \\ a_n(t + dt) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{bmatrix} \quad (27.17)$$

ここで、 dt が十分に 0 に近いので、変化は小さいはずだから、 A は単位行列に近いはずだ。すなわち、

$$A = I + Bdt \quad (27.18)$$

*5 ただし、確率の総和は 1 でなければならないので、 $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$ となるように、 x はあらかじめスカラー倍で調整されている必要がある。

とできるはずだ。ここで I は単位行列であり、 B は適当な n 次正方行列。これを式 (27.16) に代入すると、

$$\psi(t + dt) = \psi(t) + B dt \psi(t) \quad (27.19)$$

となる。右辺第 1 項を左辺に移項し、両辺を dt で割ると、

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = B \psi(t) \quad (27.20)$$

となる。行列 B がわかっていれば、この微分方程式を解くことで、電子の状態ベクトルの時間変化がわかる。

では、行列 B の意味を考えていこう。簡単のために、ここで、 B は $(1, 1)$ 成分以外は 0 であり、また、 $\psi(t)$ は、 ϕ_1 成分以外を持たない、すなわち座標は $a_1(t)$ 以外の全てが恒等的に 0 であるという状況を考えよう。すると、式 (27.12)、式 (27.20) はそれぞれ、

$$\psi(t) = a_1(t) \phi_1 \quad (27.21)$$

$$\frac{d}{dt} a_1(t) = b_{11} a_1(t) \quad (27.22)$$

となる。ここで b_{11} は行列 B の $(1, 1)$ 成分である。式 (27.21) は、 $t = 0$ のとき、

$$\psi(0) = a_1(0) \phi_1 \quad (27.23)$$

となる。さて、式 (27.22) は簡単な微分方程式であり、これを解けば、

$$a_1(t) = a_1(0) \exp(b_{11}t) \quad (27.24)$$

となる。これを式 (27.21) に代入すると、

$$\psi(t) = a_1(0) \exp(b_{11}t) \phi_1 \quad (27.25)$$

となる。右辺を式 (27.23) で変形すると、

$$\psi(t) = \exp(b_{11}t) \psi(0) \quad (27.26)$$

となる。ここで、両辺のノルムをとってみよう。状態ベクトルのノルムは必ず 1 になるという制限から、

$$|\psi(t)| = |\exp(b_{11}t)| |\psi(0)| = 1 \quad (27.27)$$

である。 $t = 0$ のときもこれが成り立たねばならないから、 $|\psi(0)| = 1$ である。従って、式 (27.27) は、

$$|\psi(t)| = |\exp(b_{11}t)| = 1 \quad (27.28)$$

となる。ところが、もし b_{11} が 0 以外の実数なら、 t が増えるに連れて、 $|\exp(b_{11}t)|$ は 0 が無限大に近づくので、1 にとどまることはできない。ノルムが 1 でない状態ベクトルは、「そのノルム分の 1」倍すればよいことになっているが、さすがにノルムが 0 や無限大になるのはまず

い。困った! しかし、 b_{11} が純虚数ならば、OK である。もし $b_{11} = -i\omega$ と置くと (i は虚数単位、 ω は適当な実数。マイナスをつけるのは慣習)、

$$|\exp(b_{11}t)| = |\exp(-i\omega t)| = 1 \quad (27.29)$$

が無理なく成立する (オイラーさんありがとう!)。というわけで、この場合の状態ベクトルは、式 (27.26) より、

$$\psi(t) = \exp(-i\omega t) \psi(0) \quad (27.30)$$

となる。

27.3 シュレーディンガー方程式 (行列表示)

式 (27.30) をよく見ると、素晴らしいことがわかる。状態ベクトルは、時間的に全く固定しているわけではなく、 $\exp(-i\omega t) = \cos \omega t - i \sin \omega t$ という係数によって、複素数の世界の中で、角速度 ω で時間的に振動しているのである。これは、実は、「電子は波の性質を持つ」というときの「波の性質」を表しているのだ。逆に言えば、あえて $b_{11} = 0$ とはせずに、わざと純虚数とすることで、「波の性質」を表したのだ。そんなテキトーなつじつま合わせをしていいのかわからないが、それでうまくいくならいいのだ! それが物理学なのだ。

このように、電子が特定の状態にとどまり続けるような状態を、「定常状態」という。定常状態では、状態ベクトルは、式 (27.30) のように、時間に依存しない状態ベクトルに $\exp(-i\omega t)$ が掛かったような形になる。

ところで化学や高校物理学で、電子のエネルギー E は、プランク定数 h と振動数 ν とによって、

$$E = h\nu \quad (27.31)$$

と表されることを学んだ。ここで、振動数 ν は単位時間あたり何回振動するかであり、一方、角速度 ω は単位時間あたり何ラジアン進むかなので、 $\omega = 2\pi\nu$ という関係がある。これを使って上式を書き換えると、

$$E = \frac{h}{2\pi} \omega \quad (27.32)$$

となる。ここで $\hbar := h/(2\pi)$ という新しい記号 \hbar (エイチバーと読む) を導入すると、

$$E = \hbar\omega \quad (27.33)$$

である。すなわち $\omega = E/\hbar$ である。今のケースでは、 E は電子が ϕ_1 にとどまり続けるときのエネルギーであ

る。式 (27.33) を式 (27.30) に代入すると、

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)\psi(0) \quad (27.34)$$

となる。つまり、 $b_{11} = (-i/\hbar)E$ である。

同様の議論が、 b_{22}, b_{33}, \dots についても可能である。つまり、 B の対角成分は、基底の各要素の状態にとどまり続けるときのエネルギーに $-i/\hbar$ を掛けたものに等しい。そう考えると、いっそのこと、 $-i/\hbar$ という係数をあらかじめ行列の外に出してしまつて、

$$B = -\frac{i}{\hbar}H = \frac{1}{i\hbar}H \quad (27.35)$$

とし、新しい n 次正方行列 H を考えるほうが、式はきれいになる。すると、式 (27.20) は、次式のようになる：

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi = H\psi \quad (27.36)$$

これを、「行列表示されたシュレーディンガー方程式」という。右辺の行列 H を、ハミルトニアン行列 という。ハミルトニアン行列の対角成分は、各状態にとどまり続けるエネルギーを表す。では非対角成分は、何を表すのだろう？ 行列とベクトルの掛け算を考えてみよう。非対角成分があると、ある状態から、次の瞬間に別の状態が生じることがわかる。つまり、非対角成分は、状態どうしの中の移りやすさをあらわす（この事情は、数学リメディアル教材の行列の章で学んだマルコフ過程とよく似ている）。

27.4 定常状態とエネルギー

式 (27.33) は、量子力学において、非常に重要な式である。すなわち、ある系のエネルギーは、その状態ベクトルの角速度 ω に比例する。ということは、その状態ベクトルが、角速度 ω で振動していなければ、エネルギーという概念が存在しないのだ。角速度 ω で振動するということは、つまり状態ベクトルが式 (27.30) のような形で時間に依存するということ、つまり、定常状態しかあり得ない。

では、式 (27.36) を満たす定常状態とは、どのような状態だろうか？ 先程は、 b_{11} 以外の B の成分が全て 0 であるという状況を考えてが、こんどはそのような単純化は行わない。そういう場合でも、定常状態 $\psi(t)$ は、式 (27.34) のように、

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)\psi(0) \quad (27.37)$$

という形になる。これを式 (27.36) に代入してみよう。左辺は、

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)\psi(0) &= i\hbar\left(-\frac{i}{\hbar}E\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)\psi(0) \\ &= E\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)\psi(0) \end{aligned} \quad (27.38)$$

となり、右辺は、

$$H\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)\psi(0) \quad (27.39)$$

となる。式 (27.38)、式 (27.39) が互いに等しいので、

$$H\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)\psi(0) = E\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)\psi(0) \quad (27.40)$$

となる。両辺を $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)$ で割ると、

$$H\psi(0) = E\psi(0) \quad (27.41)$$

となる。初心者はこの式を見て、「ならば $H = E$ だ」と思うかもしれないが、それは間違いである。 H は行列、 E はスカラー（エネルギー）だから、 $H = E$ とはならない。この式は、 $\psi(0)$ というベクトルに行列 H を掛けたものが、ベクトル $\psi(0)$ のスカラー倍になる、ということを行っている。それって... 固有値・固有ベクトルの話じゃないか!!

そう、定常状態は、ハミルトニアン行列の固有ベクトル（に $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)$ をかけたもの）であり、そのときのエネルギーは、固有値に相当するのだ！ 従って、定常状態のことを、「固有状態」と呼び、そのエネルギーを「固有エネルギー」とか「エネルギー固有値」と呼ぶ。

化学等で、化学物質（化合物）の中の電子のエネルギーを議論するときは、まず適当な基底を選び、それに基づいてハミルトニアン行列 H を決定し、その固有値を求める、という話になる。式 (27.41) を、行列表示された、定常状態のシュレーディンガー方程式という。

27.5 分子軌道法

さて、前節で学んだことを、実際の化学の問題に応用してみよう。ここでは、2 つの水素原子が 1 個の電子を共有することで結合する、「共有結合」を前節の理論で検討する。

空間に、2 つの水素原子核（陽子）P1, P2 が存在している系を考える。そこに 1 個の電子を投入する。まず、P1 と P2 が十分に離れているとする。電子は陽子に引きつ

けられるので、やがて電子は陽子 P1 か陽子 P2 のどちらかの近くに行くだろう。P1 の近くに行けば、P1 は電子を捉えて水素原子となるが、P2 は裸の原子核のままである。逆もまた然り。電子が P1 に捉えられている状態を ϕ_1 とする。電子が P2 に捉えられている状態を ϕ_2 とする。

P1 と P2 が十分に離れているなら、電子の状態は ϕ_1 か ϕ_2 のどちらかである。ところが、P1 と P2 をだんだん近づけて考えると、電子は P1 と P2 の間を行ったり来たりする可能性が出てくる。このような「どっちつかずの状態」を ψ とする。ここで、 ψ は、 ϕ_1 と ϕ_2 の線型結合で表される、と考えるのだ。つまり、様々な ψ からなる集合（計量空間）において、 $\{\phi_1, \phi_2\}$ が正規直交基底である、とみなすのだ。

そうすると、

$$\psi(t) = a_1(t)\phi_1 + a_2(t)\phi_2 \quad (27.42)$$

と書ける。あるいは、座標の考え方によって、状態ベクトルを数ベクトルと同一視して、

$$\psi = \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix} \quad (27.43)$$

と書くことができる。このとき、定常状態のシュレーディンガー方程式 (27.41) は、

$$H \begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{bmatrix} \quad (27.44)$$

と書ける。左辺の H はハミルトニアン行列であり、今のケースでは 2 次正方行列である。 H を以下のように成分で表す：

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (27.45)$$

ここで、 H_{11} は電子が P1 に捉えられているときのエネルギーであり、 H_{22} は電子が P2 に捉えられているときのエネルギーである。これらは互に対称な状況なので、 $H_{11} = H_{22}$ である。これを E_0 としよう。また、 H_{12} は P1 から P2 への電子の「飛び移りやすさ」を表し、 H_{21} は P2 から P1 への電子の「飛び移りやすさ」を表す。これらも互に対称な状況なので、 $H_{12} = H_{21}$ である*6。これを $-\epsilon$ としよう。ここで ϵ は正の実数とする（負の実数や複素数の可能性もあるが、今は簡単のため、それは考えない。考えたとしても、結局は同じよう

な結論になる）。マイナスをつけるのは慣習。すると、

$$H = \begin{bmatrix} E_0 & -\epsilon \\ -\epsilon & E_0 \end{bmatrix} \quad (27.46)$$

となり、式 (27.44) は次式のようになる：

$$\begin{bmatrix} E_0 & -\epsilon \\ -\epsilon & E_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{bmatrix} \quad (27.47)$$

問 710 式 (27.47) を満たす固有値 E と固有ベクトルは、以下のようになることを示せ。ただし、固有ベクトルのノルムは 1 になるようにせよ（状態ベクトルのノルムは 1 になって欲しいので）。

$E = E_0 - \epsilon$ のとき、

$$\begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (27.48)$$

$E = E_0 + \epsilon$ のとき、

$$\begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (27.49)$$

問 711 この系の 2 つの定常状態について、エネルギーの低い方を ψ_A 、高い方を ψ_B とし、それぞれのエネルギーを E_A 、 E_B とすると、以下のようになることを示せ：

$$E_A = E_0 - \epsilon \quad (27.50)$$

$$\psi_A = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_A t\right] \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2\right) \quad (27.51)$$

$$E_B = E_0 + \epsilon \quad (27.52)$$

$$\psi_B = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_B t\right] \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2\right) \quad (27.53)$$

ここで、2 つの定常状態を得た。それらはいずれも、「どちらかの原子核に捉えられている」という状態の重ね合わせである。まさしく「どっちつかずの状態」である。それらは、電子が片方の原子にだけ存在していた状態のエネルギーよりも、高いエネルギーをもつ状態と、低いエネルギーをもつ状態である。このような新しい状態ができると、もともとの、電子が片方の原子にだけ存在する状態はもはや定常状態ではなくなる（従って、そういう状態のエネルギーは確定しない）。

図 27.1 は、このような状況を模式的に表す。このような図を「エネルギー準位図」という。化学の教科書によく出てくる。

*6 実は、このあたりは少し微妙。量子力学の詳しい理論によれば、 $H_{12} = \overline{H_{21}}$ でも良い。

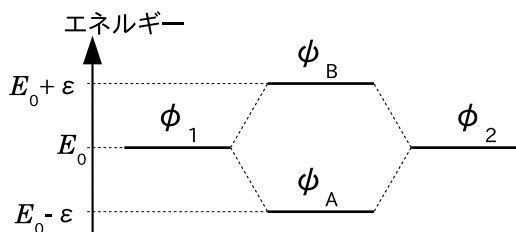


図 27.1 H₂ 分子内の電子のエネルギー準位図。図の上に行くほどエネルギーが高いことを表す。実線の横棒は電子の状態を表す。φ₁ と φ₂ という 2 つの状態が同じエネルギー E₀ で存在していたのが、原子どうしが近づくと、互いに混ざり合っ、φ_A と φ_B という新しい状態を生じる。

エネルギーの低い方の定常状態、すなわち式 (27.51) を、「結合性軌道」という。結合性軌道では、エネルギー E_A は、片方の原子に捉えられていたときのエネルギー E₀ よりも、ε だけ低い。これが、2 つの原子核を結びつける力の源である。

エネルギーの高い方の定常状態、すなわち式 (27.53) を、「反結合性軌道」という。反結合性軌道では、エネルギー E_B は、片方の原子に捉えられていたときのエネルギー E₀ よりも、ε だけ高い。従って、反結合性軌道は、通常は 2 つの原子を結合することに寄与しない。

結合性軌道も反結合性軌道も、1 つの電子が 2 つの原子核に「共有」されることで生じる。従って、これらの軌道に電子が入ることで生じる結合を、「共有結合」という。

このように、複数の原子に電子が共有される状態を、個々の原子に電子が捉えられているときの状態の重ねあわせで表現し、解析する手法を、分子軌道法という。ここで見たのは最もシンプルな分子軌道法である。実際は、多くの原子が存在し、電子も複数個存在するような状態を解析するために、様々な工夫がなされる。

ここでは、2 つの状態の線型結合で表される系を考えた。これは、磁場の中に電子や陽子が存在するときの様子などを記述する際にも同じ手法が使える。それは、NMR などの計測技術の理論的基礎である。

27.6 固有状態の直交性

問 712 前節で得られた 2 つの固有ベクトル: 式 (27.48) と式 (27.49) は、互いに直交していることを示せ。

これらのベクトルが互いに直交しているのは偶然ではない。ハミルトニアン行列、すなわち式 (27.46) をよく見てみよう。これは対称行列である。対称行列の固有ベクトルは、必ず互いに直交する、ということ、問 565 で学んだ。この例だけでなく、どんな系であっても、一般的に、ハミルトニアン行列は、対称行列か、もしくはそれを複素数に拡張した行列 (エルミート行列) である。これは量子力学の基本原理の一つである (そうしないとつじつまのあわないことが発生する)。従って、固有状態は必ず互いに直交する。

直交するということを、幾何学的な意味で解釈してはならない。我々は幾何ベクトルを考えているのではなく、「状態ベクトル」を考えているのだ。状態ベクトルどうしが直交するとは、片方の状態には、もう片方の状態が全く混ざっていないということだ。

27.7 シュレーディンガー方程式 (偏微分方程式)

さて、化学や量子力学では、シュレーディンガー方程式は、もうひとつ別の姿でも現れる。それは以下のような式である:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (27.54)$$

ここで、(x, y, z) は空間の座標であり、t は時刻、m は粒子の質量である。V(x, y, z) はポテンシャルエネルギーである。ψ(x, y, z, t) は「波動関数」と呼ばれる。後で述べるが、「波動関数」は、これまで見てきた「状態ベクトル」を関数で表したものである。

これからおいおい説明するが、式 (27.54) は、式 (27.36) と同じことを、行列を使わずに、かわりに偏微分方程式として表したものである。

問 713 式 (27.54) は、ψ に関する、線型同次偏微分方程式であることを示せ (従って、波動関数について「重ね合わせの原理」が成り立つ)。

問 714 式 (27.54) において、今、波動関数が、

$$\psi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z) \chi(t) \quad (27.55)$$

というふうに、位置 (x, y, z) だけに依存する何らかの

関数 $\phi(x, y, z)$ と、時刻 t だけに依存する何らかの関数 $\chi(t)$ の関数の積として表されると仮定し、変数分離法によって次式を示せ。ただし E は適当な定数とする。

$$i\hbar \frac{d\chi}{dt} = E\chi \quad (27.56)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z)\phi = E\phi \quad (27.57)$$

問 715 式 (27.56) を解き、次式を示せ (α は任意定数):

$$\chi = \alpha e^{-iEt/\hbar} \quad (27.58)$$

式 (27.58) を式 (27.55) に代入すると、波動関数は次のようになる (ここで α は省略した*7):

$$\psi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z)e^{-iEt/\hbar} \quad (27.59)$$

これは、式 (27.37) とよく似ている。電子は、定常状態において、時間 t に対して $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)$ の形で依存することを思い出そう。式 (27.59) はまさしくその形になっている。従って、式 (27.59) の E は式 (27.37) の E と同様にエネルギーを意味する。ただし、その数学的な由来は異なる。式 (27.37) では E は行列の固有値として出てくるのだが、式 (27.59) では E は偏微分方程式の変数分離法における定数として出てくるのだ。しかし、いったん変数分離をしたあとの式を見て欲しい。例えば、式 (27.57) では、左辺のごちゃごちゃした部分を、演算子の考え方を使って

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) \right] \phi = E\phi \quad (27.60)$$

と書き換えると、 $[]$ の中は明らかに線型微分演算子であり、それを H と置けば、式 (27.57) は、

$$H\phi = E\phi \quad (27.61)$$

となる。これは、式 (27.41) とそっくりの式ではないか...! 待て待て、式 (27.61) の H は線型微分演算子であり、式 (27.41) の H は行列である。これらは一見、異なるものである。しかし、既に学んだように、線型微分演算子は線型写像であり、線型写像は、適当な基底をとれば行列で表すことができる...。つまり、式 (27.60) の H

は、適当な基底 (それによって波動関数を線型結合で表すことができるような関数の集合) を用意すれば、行列で表すことができ、その際、波動関数は数ベクトルと同一視され、その結果、式 (27.61) は式 (27.41) になるのだ! そう考えると、式 (27.59) の E が、行列の固有値でもあるということが納得できるだろう。そして、式 (27.60) の線型微分演算子 H は、物理的にはハミルトニアン行列と同じことを意味する。そこで、この線型微分演算子 H を、ハミルトニアン演算子 と呼ぶ。

そう考えると、波動関数 ϕ は結局、状態ベクトルと同じではないのか、と思うだろう。初学者はそう思ってもおおむね差し支えない。きちんと言えば、波動関数は、状態ベクトルを、「位置 (x, y, z) に粒子が存在する」という状態ベクトルの集合 (それはひとつの基底になる) の線型結合で表した時の係数を並べたもの ((x, y, z) の関数)、つまり、状態ベクトルの座標の一種である*8。ベクトルはその座標と同一視してよい、という考え方に基づけば、これらが「同じ」だと考えても、的外れではないのだ。

ちなみに、ハミルトニアン演算子 H を使うと、式 (27.54) は、

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (27.62)$$

となる。これは、式 (27.36) とそっくりではないか! これらも、同じことを 2 つの違った形式で表したもののなのである。

注: 「化学」などでは、式 (27.57) が「シュレーディンガー方程式」と紹介されることがよくあるが、本来、シュレーディンガー方程式は式 (27.54) である。これに「定常状態」という制限をつけて変形したものが式 (27.57) である。従って、式 (27.57) は「定常状態のシュレーディンガー方程式」と呼ぶべきである。

*7 そんなことが許されるのか?と思う人へ: 許されるのだ。というのも、式 (27.57) は線型同次微分方程式なので、その解 ϕ の任意のスカラー倍も式 (27.57) の解になる。なので、定数 α を ϕ の方に押し付けて、 $\alpha\phi$ を改めて ϕ とおけば、 α は消える。

*8 従って、その値の絶対値の 2 乗は、その位置に粒子が存在する確率を表す、確率密度関数になる (それは、式 (27.9) で見たように、座標の絶対値の 2 乗が、その状態にある確率を表すというのと同じ事)。ただし、ここではその理由は述べないが、電子のスピンに関する情報は、位置 (x, y, z) だけの波動関数で表すことはできない。

27.8 波動方程式・拡散方程式とシュレーディンガー方程式

さて、シュレーディンガー方程式（偏微分方程式）は、我々がこれまで学んだ波動方程式と、形式的には少し違うが、共通する性質をたくさん持つ。特に、その解（つまり波動関数）が空間的に局在する時に、 E （や振動数や角速度）は離散的な値しか許されなくなる。これは第 26 章で波動方程式を境界条件のもとで解いた時と同じ状況である。例えば電子と原子核の間の静電気力によって電子が原子核の近くに束縛されることによって、電子の波動関数は空間的に局在することになる。原子や分子の内部で電子のエネルギー準位が離散的な値になるのは、このような仕組みによるものである。

式 (27.54) は、「シュレーディンガーの波動方程式」とも呼ばれる。波動方程式と言えば、式 (24.15) のような方程式が思い起こされるが、式 (27.54) はそのような形にはあまり似ていない。とりわけ、時間に関する偏微分が、式 (24.15) では 2 階だったのが、式 (27.54) では 1 階になり、しかも時間に関する微分に虚数単位が掛かっている。

今、簡単のために、式 (27.54) を 1 次元 (x 方向) に限定し、さらに、 V を恒等的に 0 だという状況に限定すれば、

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (27.63)$$

となる。

問 716 以下の関数は、式 (27.63) の解であることを示せ (A は任意の定数):

$$\psi(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)] \quad (27.64)$$

$$\psi(x, t) = A \exp[i(-kx - \omega t)] \quad (27.65)$$

$$\text{ただし、} k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar} \quad (27.66)$$

式 (27.64)、式 (27.65) は、それぞれオイラーの公式を使って、

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + iA \sin(kx - \omega t)$$

$$\psi(x, t) = A \cos(kx + \omega t) - iA \sin(kx + \omega t)$$

と書ける。これらは、式 (24.65) とよく似ている。つまり、式 (27.54) は、場合によっては実際に「波」（複素数の波）を解とするのだ。だから式 (27.54) は「波動方程式」と呼ばれるのだ。

一方、式 (27.63) は、P.128 で見た拡散方程式、すなわち式 (26.64)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

にもよく似ている。実際、 $i\hbar/2m$ を K とおけば、全く同じ式になる。ただし、その場合は K は虚数になっている。式 (26.64) では、 K が虚数になることは想定していなかった。従って、シュレーディンガー方程式は拡散方程式と同じとは言い切れない。それでも、シュレーディンガー方程式には拡散方程式のような性質がある。例えば、電子が空間の特定の 1 箇所に存在するという状況（電子の粒子的な性質が際立っている状態）は、時間が経つにつれて、波動関数が次第に空間全体に広がって行って、やがて電子が空間のどこにいるのかわからない状態（電子の波としての性質が際立っている状態）に移行する。これは、拡散方程式の持つ性質である。このように、シュレーディンガー方程式は、波動方程式と拡散方程式の両方の性質を兼ね備えており、そのことによって、電子の粒子的な性質と波としての性質が矛盾なく数学的に表現されるのだ。その根幹は、係数が虚数であることにあるのだ。

27.9 量子力学の旅

以上は量子力学の入り口に過ぎない。量子力学は、いくつもの分野の抽象的な数学が、互いにリンクしあって、ひとつの調和した理論体系を構成する。それは人の直感を裏切りつつ、現実の物理現象を見事に予測する。その不思議さ・壮かさ・美しさは、他の何にも例えようがない。我々と同じ人間が、このような代物を思いついたなんて、信じられないではないか。

ただし、この理論は、物理学者が直感や理詰めだけで構築したのではない。ガリレオ・ガリレイ以降、物理学者は、物理法則は全て数学で記述できると信じている。それを頼りに、実験事実につじつまがあうような数学を探して、泥臭い試行錯誤の繰り返しの末に、ここに至ったのだ。電子工学から生化学まで、現代文明の多くは量子力学の理解に立脚していることを思えば、現代の文明は数学に導かれた文明だと言えるのではないだろうか。

量子力学をさらに知りたい人には以下の本を勧める：
 ファインマン「光と物質の不思議な理論」岩波書店
 朝永振一郎「鏡の中の物理学」講談社学術文庫（この中の「素粒子は粒子であるか」「光子の裁判」）

27.10 解答

答 710 略。ヒント: 行列 H の固有値と固有ベクトルを求めればよい (やり方がわからない人は数学リメディアル教材を復習せよ)。固有ベクトルは、例えば代表的に

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (27.67)$$

のように求まる。これらはいずれもノルムが $\sqrt{2}$ であるので、これらを $\sqrt{2}$ で割ればノルムが 1 になる。

答 711 $E_A < E_B$ だから、前問より、 $E_A = E_0 - \epsilon$, $E_B = E_0 + \epsilon$ である。式 (27.37) において、 $E = E_A$ と $E = E_B$ をそれぞれ考えると、与式を得る (これは状態ベクトルを数ベクトルに同一視していたものを、もともとの表記に書きなおしただけである)。

答 712 略。ヒント: 式 (27.48) と式 (27.49) の内積をとって、それが 0 になることを言えばよい。

答 713 略。ヒント: 線型同次微分方程式の定義に戻って考えれば簡単。

答 714 式 (27.55) を式 (27.54) に代入し、両辺を $\phi\chi$ で割ると、

$$-\frac{\hbar^2}{2m\phi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) = \frac{i\hbar}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

となる。この左辺は (x, y, z) のみに、右辺は t のみに依存する式なので、それらが等しくなるには、それらが同じ定数 E に等しい状況に限る。従って、

$$-\frac{\hbar^2}{2m\phi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) = E$$

$$\frac{i\hbar}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} = E$$

この第 1 式の両辺に ϕ をかけ、第 2 式の両辺に χ をかければ、与式を得る。なお、 χ は 1 変数関数なので、 t による偏微分は通常の微分として扱って構わない。

答 715 略 (常微分方程式の普通の変数分離法で解けばよい)

答 716 略 (代入して式が成立することを示せばよい)。

一問一答

- 今までで一番ぼんやりとした章でした……。ですが、分子軌道法のところで、結合性軌道と反結合性軌道が現れるということ、数学的に表すことができたので、感動しました。

... 行列の固有値・固有ベクトルを求める、ということに尽きるのです。2つの原子が近づいてできる電子軌道 (の状態ベクトル) を、各原子が孤立している場合の電子軌道 (の状態ベクトル) の線型結合で表す。それがハミルトニアン行列の固有ベクトルになるようにしてやれば、定常状態が得られる。それが結合性軌道と反結合性軌道なのです。

第28章

線型代数6: 行列式

行列式は、正方行列の成分に関する、ある種の多項式である。これは、数ベクトルが張る図形（平行四辺形や平行六面体）の大きさ（面積や体積）を表したり、空間の「向き」を定義付けたり、数ベクトルの線型独立性を評価することなどに威力を発揮する、非常に強力な基本的な概念である。後の章で学ぶ、多変数の積分（ヤコビアン）や、量子力学でも重要な役割を演じる。

28.1 2次の行列式と面積

我々が日常的な意味で言うところの2次元平面や3次元空間をユークリッド空間という。いま、2次元ユークリッド空間（平面）上の任意の2つの幾何ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} を考える。まず、平面に何らかの正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を選び出し、その線型結合によって \mathbf{a}, \mathbf{b} を表す：

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 \quad (28.1)$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 \quad (28.2)$$

a_1, a_2, b_1, b_2 はそれぞれ適当な実数である。これらの右辺に現れた係数をそれぞれ列ベクトルに書き換えて、

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (28.3)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (28.4)$$

と表す^{*1}。式 (28.3) は数ベクトルだが、同時に、式 (28.1) のような幾何ベクトルでもある、と解釈するのだ（幾何ベクトルと数ベクトルの同一視）。このように、正規直交基底を用いて幾何ベクトルを列ベクトル（ \mathbb{R}^2 の要素）で表すことを、正規直交座標とか、 xy 座標とか、デカルト座標という。このとき、当然ながら

$$\mathbf{e}_1 = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 \quad (28.5)$$

$$\mathbf{e}_2 = 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 \quad (28.6)$$

なので、

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (28.7)$$

である。なんか当たり前のことをもったいぶってやっているように見えるかもしれないが、幾何ベクトルを座標であらわすには、論理的にはこのような手続きが必要なのである。高校数学では幾何ベクトルをすぐに座標で書いていたが、あれはここで述べている手続きを省略しているのだ。

さて、 \mathbf{a}, \mathbf{b} が張る平行四辺形の面積を、 $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ としよう^{*2}。すると、数学リメディアル教材で習ったように、

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_2 - a_2b_1 \quad (28.8)$$

となるはずだが（これに絶対値がつかなくやおかしいのだが、今はあえて絶対値を外して考える）、なぜそうなるのだろうか？ 数学リメディアル教材では、座標平面上の平行四辺形について解析幾何学的^{*3}な観点から式 (28.8) を導いた。ここでは、 $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ が満たすべき代数的な性質を調べ、そこから式 (28.8) を導いてみよう。

まず、片方の辺が長さ 0 ならば平行四辺形はできない（面積ゼロになる）から、任意の幾何ベクトル \mathbf{a} について

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = S(\mathbf{0}, \mathbf{a}) = 0 \quad (28.9)$$

である。また、同じベクトルが 2 辺となったら平行四辺形はつぶれてしまう（面積ゼロになる）から、

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \quad (28.10)$$

である。さて、図 28.1 のように幾何学的に考えれば、任意の正の実数 p について、

$$S(p\mathbf{a}, \mathbf{b}) = pS(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (28.11)$$

$$S(\mathbf{a}, p\mathbf{b}) = pS(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (28.12)$$

^{*2} すぐ後で、この定義は微妙に修正される。

^{*3} 図形や立体を座標平面や座標空間の点や辺、面の集まりとみなして、それぞれを方程式で表して互いの位置関係や大きさを調べる数学を、解析幾何学という。

^{*1} 行ベクトルではなく列ベクトルで書いたことには、特段の理由はない。いずれわかるが、そのほうが見やすい・書きやすいからである。

となることがわかる (片方の辺が何倍になれば、面積も何倍になる)。

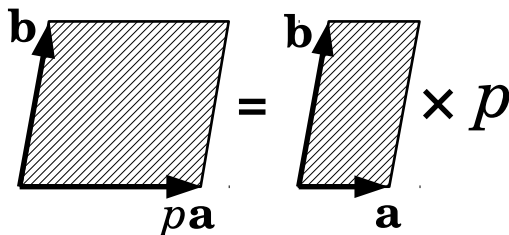


図 28.1 平行四辺形の片方の辺が p 倍になれば面積も p 倍になる。

また、図 28.2 のように幾何学的に考えれば、平面の幾何ベクトル c について、

$$S(a + c, b) = S(a, b) + S(c, b) \tag{28.13}$$

となることがわかる。式 (28.13) において c を $-a$ と置

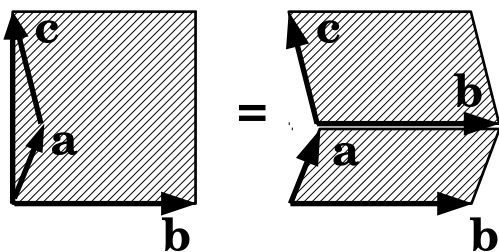


図 28.2 1 辺が 2 つのベクトルの和で作られる平行四辺形の面積 (左) は、1 辺が各ベクトルである 2 つの平行四辺形 (右) の面積の和と等しい。

き換えれば、

$$S(a + (-a), b) = S(a, b) + S(-a, b) \tag{28.14}$$

であり、一方、式 (28.9) によって、次式が成り立つ:

$$S(a + (-a), b) = S(0, b) = 0 \tag{28.15}$$

式 (28.14)、式 (28.15) より、 $S(a, b) + S(-a, b) = 0$ となる。従って、

$$S(-a, b) = -S(a, b) \tag{28.16}$$

である... ちょっと待て! 式 (28.16) によると、 $S(-a, b)$ と $S(a, b)$ は符号が違う。ということは、「両方が零」でない限りは、どちらかが負の値をとることになる。これは変だ。 $S(-a, b)$ も $S(a, b)$ も、それぞれ、2 つのベクトルが張る平行四辺形の面積であると定義した以上、その値は必ず 0 以上であるはずで、負になることはありえない! という疑問が諸君の心に生じるだろう。

それはそうなのだが、ここではこのまま押し通してしまおう。つまり、 $S(a, b)$ に負の値の存在を許容するのだ。つまり、 $S(a, b)$ はただの面積ではなく、「符号付きの面積」であり、その絶対値は面積を表すものの、その符号は場合に応じて正になったり負になったりすることもある、と約束するのだ。すると、式 (28.16) のような式の成立が許容される。このように、数学では、「都合が悪くなったら定義を修正・拡大する」ということがしばしば行われる。人為的な定義が数学の自然な構造とうまく噛み合わなければ、定義がまずいのだと考えるのだ。

問 717 式 (28.13) と同様に考えれば、

$$S(a, b + c) = S(a, b) + S(a, c) \tag{28.17}$$

が成り立つ。そのことから、次式を示せ:

$$S(a, -b) = -S(a, b) \tag{28.18}$$

式 (28.16)、式 (28.18) より、式 (28.11)、式 (28.12) は、任意の実数 p について ($0 < p$ に限定しなくても) 成り立つ。式 (28.11)、式 (28.12)、式 (28.13)、式 (28.17) から、 $S(a, b)$ は、 a と b のそれぞれについて線型写像である。いわば「二重線型写像」と言えよう。

一方、幾何学的に考えれば、 $|S(a, b)| = |S(b, a)|$ である。従って、

$$S(a, b) = \pm S(b, a) \tag{28.19}$$

である。この右辺の符号は、正負のどちらだろうか? それを知るために、以下の式を考えよう:

$$S(a, a) + S(b, a) + S(a, b) + S(b, b) \tag{28.20}$$

これは、式 (28.13)、式 (28.17) を適宜用いると、

$$\begin{aligned} &= \{S(a, a) + S(b, a)\} + \{S(a, b) + S(b, b)\} \\ &= S(a + b, a) + S(a + b, b) \\ &= S(a + b, a + b) \end{aligned} \tag{28.21}$$

となる。式 (28.10) より、式 (28.21) は 0 である。従って、式 (28.20) は 0 である:

$$S(a, a) + S(b, a) + S(a, b) + S(b, b) = 0 \tag{28.22}$$

ところが、式 (28.10) より、 $S(a, a) = S(b, b) = 0$ だから、式 (28.22) は $S(b, a) + S(a, b) = 0$ となる。従って、

$$S(b, a) = -S(a, b) \tag{28.23}$$

である。つまり、2つのベクトルを入れ替えると、符号が変わるのだ。

問 718 式 (28.10)(28.11)(28.12)(28.13)(28.17)(28.23) は、 $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の重要な性質である。これらを使って式 (28.8) を導こう。なお、 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ は正規直交基底であり、 \mathbf{a}, \mathbf{b} は式 (28.1)、式 (28.2) で定義する。

(1) 次式を示せ:

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = S(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0 \quad (28.24)$$

(2) 次式を示せ:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 S(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}) + a_2 S(\mathbf{e}_2, \mathbf{b})$$

(3) 次式を示せ:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_2 S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_2 b_1 S(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$$

(4) 次式を示せ:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \quad (28.25)$$

(5) \mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_2 が張る平行四辺形は、一辺の長さが 1 の正方形だから、面積は 1 である。そこで $S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$ と定めよう。すると、

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (28.26)$$

となることを示せ。

(6) $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ は、 \mathbf{a}, \mathbf{b} をそれぞれ列ベクトルとして並べてできる 2 次正方行列の行列式に等しいことを示せ。

(7) $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ は、 \mathbf{a}, \mathbf{b} をそれぞれ行ベクトルとして並べてできる 2 次正方行列の行列式に等しいことを示せ。

$S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 、すなわち、2 次正方行列の行列式は、平面図形の面積を求めるときに非常に有用な道具である。直線で構成された多角形なら、どんなものでも、適当に分割すれば 3 角形の集合に帰着される^{*4}ので、個々の 3 角形の面積を

$$\frac{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{2} \quad (28.27)$$

で求めて合計すれば、その多角形の面積が求まる (\mathbf{a}, \mathbf{b} は 3 角形を構成する 2 本の辺に沿ったベクトルである)。

そう聞くと諸君は、「なら別に $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ でなくても、高

校で習った、

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2} \quad (28.28)$$

という式を使ってもいいじゃないか?」と思うだろう。実際、多くの学生は、式 (28.27) よりも、受験勉強で慣れ親しんだ式 (28.28) を使いたがる。ところが、式 (28.27) の方が、圧倒的に便利なのだ。なぜか? まず、式 (28.27) の方が計算が楽である。

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$$

とすれば、式 (28.27)、式 (28.28) はそれぞれ、

$$\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{2} \quad (28.29)$$

$$\frac{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}}{2} \quad (28.30)$$

となる。明らかに前者の方がシンプルで、計算量は少ない。

しかし、行列式を使う方法 (式 (28.27) や式 (28.29)) には、もっと本質的な長所がある。それは「符号がある」ということだ。以下の例に示すように、符号のおかげで、複雑な図形の面積の計算が自動的になるのだ。

例 28.1 図 28.3 のような平面図形 ABCDEFG の面積を求めてみよう。各頂点の座標は以下の通りである:

- A: (4, 1)
- B: (1, 5)
- C: (-3, 0)
- D: (1, 2)
- E: (0, -1)
- F: (-4, -2)
- G: (2, -4)

このような 7 角形を 3 角形に分割するにはいろんなやりかたがある。例えば、線分 BD、線分 AD、線分 AE、線分 EG でこの図形を 3 角形に分割し、各 3 角形の面積を式 (28.29) または式 (28.30) で求めれば、

$$\triangle DAB = 4.5$$

$$\triangle DBC = 6$$

$$\triangle DAE = 5$$

$$\triangle EAG = 8$$

$$\triangle EGF = 7$$

となり、これを合計すれば、30.5 となる。 ■

ところが、こういう方法が通用するのは、図形がシン

^{*4} 曲線で構成された図形も、頂点の間隔を十分に小さくすれば、直線で構成される多角形で近似でき、3 角形の集合に帰着される。

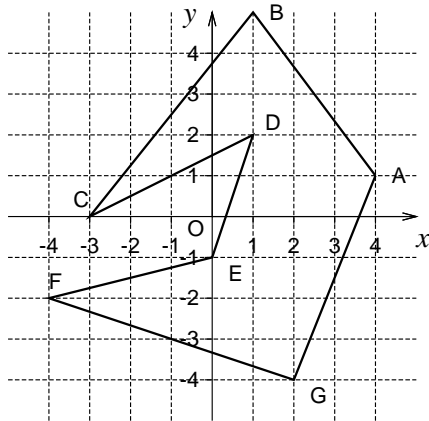


図 28.3 平面図形の面積を求める。

ブルで、分割が簡単にできるときだけである。頂点が数 100 個にもなるような複雑な多角形を相手にする場合は、どのように分割すればよいか、戸惑うだろう。シンプルな図形であっても、その数が大量になると計算機に自動的に処理させたい。そういうときには、人の目で見て分割するという作業はできるだけ避けたい。

そういう願いを叶えてくれる方法を、次の例で示す：

例 28.2 まず、A から G まで順に並んでいる頂点に対して、隣接する 2 頂点と原点 O でできる 3 角形を考え、その「符号付き面積」を式 (28.29) で計算する：

$$\triangle OAB = \frac{4 \cdot 5 - 1 \cdot 1}{2} = \frac{19}{2}$$

$$\triangle OBC = \frac{1 \cdot 0 - 5 \cdot (-3)}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\triangle OCD = \frac{-3 \cdot 2 - 0 \cdot 1}{2} = -\frac{6}{2}$$

$$\triangle ODE = \frac{1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\triangle OEF = \frac{0 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-4)}{2} = -\frac{4}{2}$$

$$\triangle OFG = \frac{-4 \cdot (-4) - (-2) \cdot 2}{2} = \frac{20}{2}$$

$$\triangle OGA = \frac{2 \cdot 1 - (-4) \cdot 4}{2} = \frac{18}{2}$$

マイナスの面積も現れてしまったが、気にしないで (符号はそのままにして) これらを合計してしまおう：

$$\frac{19}{2} + \frac{15}{2} - \frac{6}{2} - \frac{1}{2} - \frac{4}{2} + \frac{20}{2} + \frac{18}{2} = 30.5 \quad (28.31)$$

例 28.1 で求めた結果と同じ値が出てくるではないか! ■

例 28.2 の計算過程を振り返ってみると、「符号付き面積」が負の値になったのは、 $\triangle OCD$, $\triangle ODE$, $\triangle OEF$ であった。これらの 3 角形は、原点 O から順に頂点たどると時計回りに回る。だから符号が負になるのだ。他の 3 角形は、頂点が反時計回りの順に並んでいるので、「符号付き面積」は正である。図形が入り組んでいるところ (この場合は C, D, E, F のあたり) は、この正の面積と負の面積が、ちょうどうまく余分な部分を打ち消しあって、対象とする図形の内側の部分だけをうまくカウントするのだ。

一般に、2 次元平面上の n 個の点

$$P_k = (x_k, y_k) \quad (28.32)$$

(ただし、 $k = 1, 2, 3, \dots, n, n+1$ とし、 $P_{n+1} = P_1$ とする) で反時計回りに順に並んだ点で囲まれる n 角形の面積 S は、

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k}{2} \quad (28.33)$$

となる。あえて証明はしないが、例 28.2 を振り返ればわかるだろう。これは、測量や画像解析などで、何かの面積を測定する際の、基本原理である*5。

問 719 以下の頂点で順に囲まれた多角形の面積を求めよ：

$$P_1 : (1, -2)$$

$$P_2 : (3, 1)$$

$$P_3 : (-1, 3)$$

$$P_4 : (0, -1)$$

$$P_5 : (-2, 4)$$

$$P_6 : (-1, -1)$$

$$P_7 : (-2, -5)$$

$$P_1$$

28.2 3 次の行列式と体積

上の話を、3 次元に拡張してみよう。すなわち、3 次元ユークリッド空間の任意の 3 つのベクトル a, b, c を考える。3 次元ユークリッド空間に正規直交基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$

*5 これを知らない人は、求めたい図形と相似の図形を紙に描いて切り抜いて、その重さを測ることで面積を求めたりする。愚かなことである。

を導入して、

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

のように \mathbb{R}^3 の要素 (つまり座標) であらわそう。

ここで、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が張る平行六面体 (図 28.4) の (符号つき) 体積 $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ を考えよう。

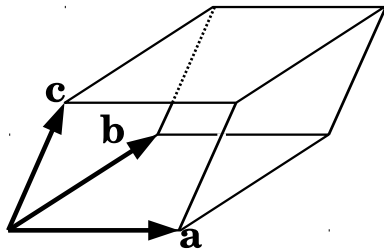


図 28.4 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が張る平行六面体

$S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の議論と全く同様に、3 辺のうち 2 辺が同じベクトルだったら平行六面体はつぶれてしまう (体積ゼロになる) から、

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = 0 \quad (28.34)$$

である。また、図 28.1 を平行六面体に拡張して考えれば、任意の実数 p について、

$$V(p\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = pV(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (28.35)$$

$$V(\mathbf{a}, p\mathbf{b}, \mathbf{c}) = pV(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (28.36)$$

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, p\mathbf{c}) = pV(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (28.37)$$

となることがわかる (いずれかの辺が何倍かになれば、体積も何倍かになる)。

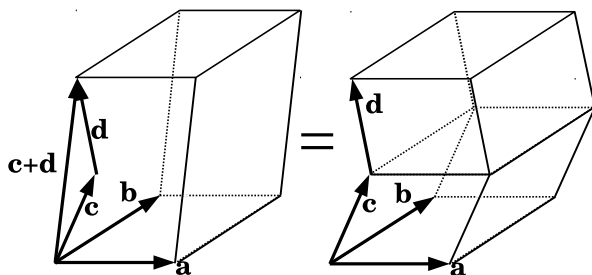


図 28.5 1 辺が 2 つのベクトルの和で作られる平行六面体 (左) の体積は、1 辺が各ベクトルである 2 つの平行六面体 (右) の体積の和と等しい。式 (28.40)。

また、図 28.2 を平行六面体に拡張して考えれば (例え

ば図 28.5), ユークリッド空間のベクトル \mathbf{d} について、

$$V(\mathbf{a} + \mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + V(\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (28.38)$$

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{d}, \mathbf{c}) = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + V(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}) \quad (28.39)$$

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} + \mathbf{d}) = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) \quad (28.40)$$

となることがわかる。従って、 $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ は、いわば 3 重線型写像であることがわかる。

問 720

- (1) 次式を示せ。ヒント: 式 (28.34)。

$$V(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \quad (28.41)$$

- (2) 次式を示せ。ヒント: 式 (28.38)。

$$V(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = V(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) + V(\mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

- (3) 前小問の式は以下のように変形されること示せ。ヒント: 式 (28.39)。

$$= V(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) + V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + V(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) + V(\mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

- (4) 前小問の式は以下のように変形されること示せ。ヒント: 式 (28.34)。

$$= V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + V(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$$

- (5) 以上から次式を示せ:

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -V(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) \quad (28.42)$$

同様に、

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -V(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) \quad (28.43)$$

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -V(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) \quad (28.44)$$

となる。つまり、2 つのベクトルを入れ替えると、符号が変わるのだ。

では、これらの代数的な性質を使って、 V の関数形を具体的に決めてみよう。

問 721

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする。

- (1) 次式を示せ。ヒント: 式 (28.42)。

$$V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = -V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

- (2) 次式を示せ:

$$V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = V(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

- (3) 次式を示せ:

$$V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = V(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$$

- (4)
- \mathbf{a}
- を
- $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
- の線型結合であらわすと,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \quad (28.45)$$

となる。これを使って、次式を示せ。ヒント: V は三重線型写像であることを使う。

$$\begin{aligned} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= a_1V(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ &\quad + a_2V(\mathbf{e}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ &\quad + a_3V(\mathbf{e}_3, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \end{aligned} \quad (28.46)$$

- (5) さらに、
- \mathbf{b}, \mathbf{c}
- も
- $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
- の線型結合であらわすことによって、次式を示せ:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 \\ &\quad - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1) \\ &\quad V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (28.47)$$

- (6)
- \mathbf{e}_1
- と
- \mathbf{e}_2
- と
- \mathbf{e}_3
- が張る平行六面体は、一辺の長さが 1 の立方体だから、体積は 1 である。そこで

$$V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1 \quad (28.48)$$

と定めよう。すると,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 \\ &\quad - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 \end{aligned} \quad (28.49)$$

となることを示せ。

「数学リメディアル教材」で学んだように、式 (28.49) は、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を列ベクトルとするような 3 次正方行列の行列式 (サラスの公式) である。つまり、3 次正方行列の行列式と、3 本のベクトルが張る平行六面体の符号つき体積とは、同じものである。

28.3 外積 (ベクトル積)

「数学リメディアル教材」で学んだように、3 次元ユークリッド空間の、任意の 2 つの幾何ベクトル^{*6}

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

の間で定義される以下の演算を、外積 (またはベクトル積) と呼ぶ:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \quad (28.50)$$

一方で、1 学期の「物理学」では、外積は 2 つのベクトルが張る平行四辺形の面積をその大きさとし、2 つのベクトルの両方に垂直なベクトル (のうち片方) である、と学んだ。本当にそうなるか、ここで確認してみよう。

「数学リメディアル教材」で、ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を列ベクトルとする行列 $[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$ の行列式は、以下のように表されることを学んだ:

$$\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c} \quad (28.51)$$

この式の右辺を、「スカラー 3 重積」という。一方で、前章で

$$\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (28.52)$$

であることも学んだ。従って、

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c} \quad (28.53)$$

である。これらの式から、

「3 次正方行列の行列式」

「平行 6 面体の (符号つき) 体積」

「スカラー 3 重積」

は全て互いに同じものであることがわかる。

問 722

- (1) 式 (28.53) を利用して、次式を示せ:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{a} = 0 \quad (28.54)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{b} = 0 \quad (28.55)$$

- (2) これらをもとに、
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
- は
- \mathbf{a}
- と
- \mathbf{b}
- の両方に垂直であることを示せ。

^{*6} これは、もちろん正規直交基底を使って、幾何ベクトルを数ベクトル (\mathbb{R}^3 の要素) で表現したもの (座標) である。

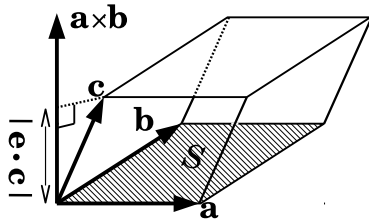


図 28.6 スカラー 3 重積と外積の図形的な意味。

ここで、図 28.6 のように、 a, b, c が張る平行六面体を考えよう。 a, b が張る平行四辺形を底面と考えれば、高さは、 c を底面の法線方向へ正射影した長さである。従って、底面の単位法線ベクトルを e とすると、高さは、 $|e \cdot c|$ である。従って、底面積を S とすると、この平行六面体の体積 V は、

$$V = S|e \cdot c| \quad (28.56)$$

とあらわされる。ところが、式 (28.53) より、

$$V = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$$

である。従って、

$$S|e \cdot c| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| \quad (28.57)$$

である。これがどのような a, b, c についても成り立たねばならないから、 $Se = \pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ である。従って、

$$|Se| = S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \quad (28.58)$$

である。つまり、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の大きさは、 a, b が張る平行四辺形の面積 S に等しい。

さて、ここでは詳述しないが、 $V(a, b, c)$ は、 a から b に右ネジをまわすときにネジが進む側に c があるときはプラス、そうでないときはマイナスである*7。前者のときは、 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ はプラスである。つまり $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は c と同じ方 (角度は 0 から $\pi/2$ までの間) にある。つまり $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は a から b に右ネジをまわすときにネジが進む側にある。

問 723 次式を示せ (θ は a, b のなす角で、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする) :

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta \quad (28.59)$$

*7 これは式 (28.48) で $V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ の符号を定めたときに決まる。このとき、 \mathbf{e}_1 から \mathbf{e}_2 に右ネジをまわすときにネジが進む側に \mathbf{e}_3 があるように座標系 (基底ベクトル) を選ぶこと、つまり「右手系」を選ぶことが前提になっている。

問 724 式 (28.50) に基づいて、任意の 3 次元ベクトル a, b, c に関して以下を証明せよ (p は任意の実数とする)*8。

$$(1) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (28.60)$$

$$(2) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (28.61)$$

$$(3) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (28.62)$$

$$(4) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (28.63)$$

$$(5) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (28.64)$$

$$(6) \quad (p\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (28.65)$$

問 725 3 次元ユークリッド空間の 3 つのベクトル*9:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

について、

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad (28.66)$$

を計算しよう。このような計算は「ベクトル三重積」と呼ばれる (物理学で重要である)。

(1) 上の式を、成分で書くと次式になることを示せ :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{bmatrix}$$

(2) 前小問の式を次式に変形せよ:

$$\begin{bmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{bmatrix}$$

(3) 前小問の式を次式に変形せよ:

$$\begin{bmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 \\ a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 \\ a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{bmatrix}$$

(4) 前小問の式を次式に変形せよ:

$$\begin{bmatrix} (a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3) - (a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1) \\ (a_3b_2c_3 + a_1b_2c_1) - (a_3b_3c_2 + a_1b_1c_2) \\ (a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2) - (a_1b_1c_3 + a_2b_2c_3) \end{bmatrix}$$

*8 式 (28.61) の右辺などにある 0 は、ゼロベクトル、すなわち $(0, 0, 0)$ のことである。一般に、ベクトルの 0 とスカラーの 0 は、同じ記号“ 0 ”で表す。

*9 これは、もちろん正規直交基底を使って座標 (\mathbb{R}^3 の要素) でベクトルを表現したものである。

(5) 前小問の式を次式に変形せよ:

$$\begin{bmatrix} (a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ (a_3c_3 + a_1c_1)b_2 - (a_3b_3 + a_1b_1)c_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2)c_3 \end{bmatrix}$$

(6) 前小問の式を次式に変形せよ:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c} - a_1c_1)b_1 - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} - a_1b_1)c_1 \\ (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c} - a_2c_2)b_2 - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} - a_2b_2)c_2 \\ (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c} - a_3c_3)b_3 - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} - a_3b_3)c_3 \end{bmatrix}$$

(7) 前小問の式を次式に変形せよ:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})b_1 - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})c_1 \\ (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})b_2 - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})c_2 \\ (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})b_3 - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})c_3 \end{bmatrix}$$

(8) 前小問の式を次式に変形せよ:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})b_1 \\ (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})b_2 \\ (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})c_1 \\ (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})c_2 \\ (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})c_3 \end{bmatrix}$$

(9) 以上より, 次式を示せ:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (28.67)$$

式 (28.67) は物理学で大切な公式である (覚える必要はないが)。

28.4 n 次の行列式

行列式に話を戻す。28.1 節と 28.2 節で, 2 次と 3 次の行列式の性質を調べた。2 次の行列式は, 2 つの 2 次の列ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に対して, それらが張る平行四辺形の (符号付きの) 面積 $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ であった。3 次の行列式は, 3 つの 3 次の列ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に対して, それらが張る平行六面体の (符号付きの) 体積 $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ であった。

それらが持つ性質をまとめると, 以下のようになる: n を 2 または 3 とすると,

行列式の大切な性質

- (1) n 次行列式は, n 次の列ベクトル n 個に対してスカラー 1 個を割り当てる写像である。
- (2) それぞれの列ベクトルについて行列式は線型写像である。
- (3) 2 つの列ベクトルを入れ替えると行列式の値は符号が反転する。
- (4) 単位行列の行列式は 1 である。

これらは 2 次の行列式にも, 3 次の行列式にも, 共通のものだった。そして, これらの性質から出発すれば, 2 次行列式の公式 (たすきがけ) も 3 次行列式の公式 (サラスの公式) も導出できた。ということは, 上記の性質は行列式の本質的な性質であり, これらによって少なくとも 2 次や 3 次の行列式は完全に特徴づけることができるのである。そこで, これらの性質を使って, 4 次以上の行列式を定義しよう。すなわち,

行列式の一般的な定義

n を任意の自然数とする。 n 次行列式とは, 上記の「行列式の大切な性質」を全て満たすようなものである。

この定義に基づいて, 実際に大きな次数の正方行列の行列式を求めることができるのだが, その準備のために, 以下の定理を証明しておこう:

問 726 n を 2 以上の整数とする。 n 本の n 次列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ を横に並べてできる n 次正方行列 $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$ を A とする。 i, j を 1 以上 n 以下の任意の整数とする (ただし $i \neq j$)。もし, $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$ ならば, $\det A = 0$ であることを示せ。つまり, 列ベクトルに重複があると, 行列式は 0 になるのだ。

問 727 n を 2 以上の整数とする。 n 本の n 次列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ を横に並べてできる n 次正方行列 $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$ を A とする。 i, j を 1 以上 n 以下の任意の整数とし (ただし $i \neq j$)。 p を任意のスカラーとする。 A の第 i 列に第 j 列の p 倍を加えてできる行列の行列式:

$$\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i + p\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n] \quad (28.68)$$

は $\det A$ に等しいことを示せ。

問 728 対角行列の行列式は, 対角成分をすべて掛けあわせた値に等しいことを示せ。

問 727 の結果と, 上記の行列式の新しい定義を使うと, 行列式に関して以下のことが一般的に言える:

- どれかの列ベクトルに別の列ベクトルのスカラー倍を加える (これを変形 1 と呼ぼう) ことによって行列式の値は変わらない。

- どれかの列ベクトルをスカラー倍する (これを变形 2 と呼ぼう) ことによって行列式の値はそのスカラー倍になる (これは P.145 式 (28.11) や P.149 式 (28.35) に相当する。行列式が列ベクトルに関する線型写像であることから明らか)。
- 2 つの列ベクトルを入れ替える (これを变形 3 と呼ぼう) ことによって行列式の値は符号が逆転する (これは定義から明らか。P.149 式 (28.42), 式 (28.43), 式 (28.44) に相当する)。
- 単位行列の行列式は 1 である (これも定義から明らか。これは一辺の長さが 1 の正方形の面積や立方体の体積が 1 であることに相当する)。

变形 1, 2, 3 を, 「列基本変形」と呼ぶ。これらを使うと, 行列式の値を効率良く計算できる。

例 28.3 以下の行列:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (28.69)$$

の行列式, $\det A$ を計算しよう。直接, サラスの公式を使えば, $\det A = -1$ であることがわかるが, ここではあえて列基本変形を使ってやってみよう。まず, 第 2 列から第 1 列を引いてみる。これは变形 1 である (第 2 列に第 1 列の (-1) 倍を足す) ので, 行列式の値は変わらないはず。従って,

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 1-1 & 2 \\ 1 & 2-1 & 4 \\ 1 & 3-1 & 5 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

となる。この最右辺の行列は $(1, 2)$ 成分に 0 が現れたので, 式 (28.69) より少しシンプルになった気がする。さらに, その第 3 列から第 1 列の 2 倍を引こう。これも变形 1 なので行列式の値は変わらないから,

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2-2 \\ 1 & 1 & 4-2 \\ 1 & 2 & 5-2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

となる。さらに, この第 3 列から第 2 列の 2 倍を引けば,

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (28.70)$$

となる。ここまで 0 成分が増えれば, 暗算でサラスの公式を計算できるが, あえてそうせずにもうちょっと頑張

る。第 1 列から第 2 列を引くと,

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (28.71)$$

第 1 列から第 3 列を引き, 第 2 列に第 3 列の 2 倍を足すと,

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (28.72)$$

第 3 列の -1 を, -1×1 とみなすと (变形 2), これは

$$\det A = -1 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28.73)$$

に等しい。ここで単位行列の行列式が 1 であることを使えば, $\det A = -1$ と決まる。 ■

变形の方針としては, まず, 第 1 列と变形 1 を使って, 他の列の第 1 成分を消す。次に, 第 2 列と变形 1 を使って, 他の列の第 2 成分を消す。そうやっていくと, 対角成分だけが残る。そうしたら变形 3 を使って, 単位行列に帰着させる。

時として, 例えば第 1 列の第 1 成分 (第 1 行の成分) が 0 になっているようなこともあり得る。そのようなときは, 变形 1 を使っても他の列の第 1 成分を消せないから, 先に变形 3 を使って, 第 1 列を他の列 (第 1 成分が 0 でない列) と入れ替えればよい。

例 28.4 以下の行列式を考えよう:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (28.74)$$

↓ (2 列) $-2 \times$ (1 列), (3 列) $+(1$ 列), (4 列) $-(1$ 列)

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (28.75)$$

↓ (1 列) $-2 \times$ (2 列), (3 列) $-(2$ 列), (4 列) $+2 \times$ (2 列)

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (28.76)$$

↓ (1 列) $+(3$ 列), (2 列) $-(3$ 列), (4 列) $-2 \times$ (3 列)

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (28.77)$$

↓ (1 列) $-(4$ 列), (3 列) $+(4$ 列)

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (28.78)$$

$$= -1 \quad (28.79)$$

注意: 実は, 行列式の値を求める時, 列基本変形は, 単位行列になるまでやる必要はないのだ。例 28.4 では, 式 (28.77) までで OK で, この対角成分を掛けあわせればよいのだ。というのも, この行列は, 対角成分より上の部分 (行列の右上の部分) が全部 0 になっており, 0 でない成分は対角成分と, 対角成分より下の部分 (行列の左下の部分) にしか残っていない。左下に残った各成分は, その行の対角成分を持つ列のスカラー倍を足すことで消せる。従って, 左下に残った成分は列基本変形 1 によって (対角成分や右上に影響を与えることなく) 結局は 0 になり, 行列は対角行列 (対角成分以外が 0 の行列) になる。問 728 で見たように, 対角行列の行列式は, 対角成分を全部掛けあわせたものである。

問 729 以下を, 列基本変形を利用して計算せよ。どのような変形をしたかも明記せよ。

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

問 730 以下の行列 A の行列式の値を求めよ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ヒント: 変形 3 を何回か使って単位行列に変形する。変形 3 を 1 回使うたびに, 行列式は (-1) 倍されることに注意。

問 731 以下の行列式の値を計算せよ (列基本変形では, どのような変形をしたかも明記せよ):

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

行列式には, もう少し, 大切な性質がある。以下, n を任意の自然数とする。

任意の 2 つの n 次正方行列 A, B について,

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) \quad (28.80)$$

であることが知られている。この式は, $n = 2$ の場合は数学リメディアル教材で証明したが, 3 以上の n についても成り立つのである。その証明は若干複雑なので, ここでは述べない (興味のある人は, 線型代数というタイトルのついた本を勉強しよう)。

また, 任意の n 次正方行列 A について,

$$\det({}^t A) = \det(A) \quad (28.81)$$

であることも知られている (${}^t A$ は A の転置行列)。

問 732 n を任意の自然数とする。任意の n 次正方行列 A について, 次式を示せ:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad (28.82)$$

問 733 n を任意の自然数とする。 n 次正方行列 Q が, ${}^t Q = Q^{-1}$ を満たすとき, Q を直交行列というのであった。任意の直交行列 Q について, その行列式 $\det(Q)$ の値は, 1 か -1 のどちらかであることを証明せよ。

行列式には, 様々な用途があるが, 実用上は以下の性質が特に重要である:

問 734 (発展) n を 2 以上の整数とする。 n 本の n 次列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ を横に並べてできる n 次正方行列 $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$ を A とする。 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が線型従属であれば, $\det A = 0$ であることを示せ。注: 線型従属は, どれか 1 つのベクトルが $\mathbf{0}$ であったり, 2 つのベクトルが互いに平行であったりするだけでなく, それ以外にもいろんな場合がある。

問 735 (発展) 電子が複数個存在する状況では, スレーター行列式というものを使って状態ベクトルを表現することがよくある。このスレーター行列式について調べ, 行列式の数学的な性質が電子のどのような性質をうまく表現するのか述べよ。

28.5 解答

答 717 式 (28.17) で \mathbf{c} を $-\mathbf{b}$ にすれば,

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b} + (-\mathbf{b})) = S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + S(\mathbf{a}, -\mathbf{b})$$

であり, 一方, 式 (28.9) によって,

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b} + (-\mathbf{b})) = S(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = 0$$

となる。従って,

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + S(\mathbf{a}, -\mathbf{b}) = 0$$

従って,

$$S(\mathbf{a}, -\mathbf{b}) = -S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

すなわち式 (28.18) が成り立つ。

答 718

(1) 式 (28.10) で $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$ とすれば,

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0$$

$S(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)$ も同様。

(2) 式 (28.1) から,

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = S(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, \mathbf{b})$$

式 (28.13) より, これは,

$$S(a_1\mathbf{e}_1, \mathbf{b}) + S(a_2\mathbf{e}_2, \mathbf{b})$$

に等しい。さらに式 (28.11) より, これは

$$a_1S(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}) + a_2S(\mathbf{e}_2, \mathbf{b})$$

に等しい。

(3) 前小問より,

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1S(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}) + a_2S(\mathbf{e}_2, \mathbf{b})$$

式 (28.2) より, これは次式に等しい:

$$a_1S(\mathbf{e}_1, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) + a_2S(\mathbf{e}_2, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2)$$

式 (28.17), 式 (28.12) より, これは次式に等しい:

$$a_1b_1S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + a_1b_2S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ + a_2b_1S(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + a_2b_2S(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)$$

ところが, 小問 (1) の結果から, この第一項と第四項はゼロである。すなわち, この式は,

$$a_1b_2S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_2b_1S(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$$

に等しい。

(4) 式 (28.23) より, $S(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = -S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ である。これを使うと, 前小問の結果は,

$$a_1b_2S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) - a_2b_1S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

となり, 与式を得る。

(5) 略 (前小問より自明)

(6) 略 (わからぬ人は, 2 次正方行列式の行列式の定義を数学リメディアル教材で確認せよ)

(7) 略。

答 719 (略解) 17

答 720

(1) 略 (式 (28.34) より, 3 つの変数のうち少なくとも 2 つが同じベクトルなら V はゼロになる。この場合は $\mathbf{a} + \mathbf{b}$)

(2) 略 (式 (28.38) より, 最初の変数の和は分解できる)

(3) 略 (式 (28.39) より, 2 つめの変数の和を分解する)

(4) 式 (28.34) より, $V(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0$ かつ, $V(\mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ 。これを前小問の右辺に代入すれば与式を得る。

(5) 前小問の式はゼロになる (小問 (1) より)。従って,

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + V(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0$$

ここから与式を得る。

答 721

(1) 式 (28.42) において, $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2, \mathbf{b} = \mathbf{e}_1, \mathbf{c} = \mathbf{e}_3$ とおけば与式を得る。

(2) 式 (28.42), 式 (28.43), 式 (28.44) で明らかのように, V は 2 つの変数 (ベクトル) を入れ替えると, 符号が変わる。そのことを繰り返し使って,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) &= -V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \\ V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) &= -V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = V(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

従って与式を得る。

(3) 前小問の証明過程で, 次式も明らかになった:

$$V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$$

また,

$$V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = -V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = V(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$$

従って与式を得る。

(4) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ 。これと式 (28.35), 式 (28.38) より,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= a_1V(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ &\quad + a_2V(\mathbf{e}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ &\quad + a_3V(\mathbf{e}_3, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \end{aligned}$$

(5) 前小問で \mathbf{a} についてやったのと同様に,

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{c} &= c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

についても式 (28.36), 式 (28.37), 式 (28.39), 式 (28.40) を用いて展開すると,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= a_1b_1c_1V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \\ &\quad + a_1b_1c_2V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ &\quad + a_1b_1c_3V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ &\quad + a_1b_2c_1V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \\ &\quad + a_1b_2c_2V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \\ &\quad + a_1b_2c_3V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + a_3b_3c_3V(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

ここで, 式 (28.34) より, $V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ などのように同じベクトルが引数として V に与えられると 0 になるから, 上の式の右辺で 0 にならずに残るのは $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ がひとつずつ引数として V に与えられ

ている項だけである。従って,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= a_1b_2c_3V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ &\quad + a_1b_3c_2V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) \\ &\quad + a_2b_1c_3V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ &\quad + a_2b_3c_1V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \\ &\quad + a_3b_1c_2V(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ &\quad + a_3b_2c_1V(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \end{aligned}$$

一方, 式 (28.42), 式 (28.43), 式 (28.44) より,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) &= -V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) &= -V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) &= V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ V(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ V(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) &= -V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= a_1b_2c_3V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ &\quad - a_1b_3c_2V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ &\quad - a_2b_1c_3V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ &\quad + a_2b_3c_1V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ &\quad + a_3b_1c_2V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ &\quad - a_3b_2c_1V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

ここから与式を得る。

(6) 略 (前小問より自明)。

答 722

- (1) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$ 。これは P.149 式 (28.34) より 0。 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b})$ 。これも P.149 式 (28.34) より 0。
- (2) 前小問より自明。

答 723 本文の解説で明らかになったように, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の大きさは, \mathbf{a}, \mathbf{b} が張る平行四辺形の面積に等しい。この平行四辺形について, $|\mathbf{a}|$ を底辺とすると, 高さは $|\mathbf{b}| \sin \theta$ 。従って, 面積は底辺掛ける高さで $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$ 。

答 724

(1)

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \times \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} b_2a_3 - b_3a_2 \\ b_3a_1 - b_1a_3 \\ b_1a_2 - b_2a_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{aligned}$$

(2)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_2a_3 - a_3a_2 \\ a_3a_1 - a_1a_3 \\ a_1a_2 - a_2a_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

(3)

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 \\ &\quad + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 \\ &\quad + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 \\ &= \cdots = 0 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)b_1 \\ &\quad + (a_3b_1 - a_1b_3)b_2 \\ &\quad + (a_1b_2 - a_2b_1)b_3 \\ &= \cdots = 0 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} (a_2 + b_2)c_3 - (a_3 + b_3)c_2 \\ (a_3 + b_3)c_1 - (a_1 + b_1)c_3 \\ (a_1 + b_1)c_2 - (a_2 + b_2)c_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_2c_3 - a_3c_2 \\ a_3c_1 - a_1c_3 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} (p\mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} pa_2b_3 - pa_3b_2 \\ pa_3b_1 - pa_1b_3 \\ pa_1b_2 - pa_2b_1 \end{bmatrix} \\ &= p \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{aligned}$$

答 725 略。

答 726 行列式の大切な性質 (3) より, 第 i 列と第 j 列を入れ替えると行列式は符号が変わるはずである。すなわち,

$$\begin{aligned} &\det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n] \\ &= -\det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n] \end{aligned}$$

である。ところが, $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$ なのだから, 第 i 列と第 j 列を入れ替えても行列は変わらないので, 行列式の値も変わらないはずである:

$$\begin{aligned} &\det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n] \\ &= \det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n] \end{aligned}$$

上の 2 式が等しいことから,

$$\begin{aligned} &-\det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n] \\ &= \det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n] \end{aligned}$$

となる。左辺を右辺に移項して 2 で割れば,

$$0 = \det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n]$$

となり, 従って,

$$\det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n] = 0$$

となる。

答 727 行列式の大切な性質 (2) より,

$$\begin{aligned} &\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i + p\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n] \\ &= \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n] \\ &\quad + p \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n] \end{aligned}$$

となる。ところが, $\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n]$ に着目すると, 第 i 列と第 j 列に同じ列ベクトル \mathbf{a}_j が入っている。問 726 より, この行列式は 0 である。従って,

$$\begin{aligned} &\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i + p\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n] \\ &= \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n] \\ &= \det A \end{aligned}$$

答 728 対角行列を A とし, その次数を n とする。

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

と置く。第 1 列について, \det は線型写像だから,

$$\det A = a_1 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

となる。同様に, 第 2 列, 第 3 列, ... について, それぞれ

\det が線型写像であることを順に使うと,

$$\det A = a_1 a_2 \cdots a_n \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

となる。右辺に現れた行列は単位行列だから、その行列式は 1 である。従って、 $\det A = a_1 a_2 \cdots a_n$ となる。

答 729

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad (28.83)$$

↓ (2 列)−2×(1 列), (3 列)−2×(1 列)

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (28.84)$$

↓ (1 列)−(1/2)×(2 列), (3 列)−(2 列)

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad (28.85)$$

↓ (1 列)−(3 列), (2 列)+4×(3 列)

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (28.86)$$

↓ 変形 2

$$= 2 \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -2 \quad (28.87)$$

注: 式 (28.85) で列基本変形を終了し、その時点での対角成分を掛け合わせるだけでもよい。

答 730 第 1 列と第 4 列を入れ替え, 第 2 列と第 3 列を入れ替えると, 行列は単位行列になり, 行列式には $(-1)^2$ がかかる。従って, 行列式は 1。

答 731 略。

ちなみに, この問題を, 統計解析ソフト R を使ってやる方法 (コマンド) を以下に示す:

```
A<-rbind(c(1,2,2,1), c(2,5,4,-1), c(1,6,5,1), c(2,5,4,1))
```

(行列を定義)

```
det(A)
```

(行列式を計算)

答 732 略。ヒント: $AA^{-1} = I$ の両辺の行列式を考える。 $\det(I) = 1$ である。

答 733 略。ヒント: ${}^t Q = Q^{-1}$ の両辺の行列式を考え, 式 (28.82) と式 (28.81) を使う。

答 734 略 (発展問題なので)。

答 735 略 (発展問題なので)。

一問一答

- 別の列ベクトルにまた別の列ベクトルのスカラー倍を加えても行列式の値が変わらないのは, 式の上ではわかりましたが, 感覚的にはとても不思議です。

... よい質問です。2 次の行列式で考えるとわかりやすい。その場合, 行列式は平行四辺形の面積です。図 28.7 を見て下さい。片方の列ベクトルにもう片方の列ベクトルのスカラー倍を加えるという事は, 平行四辺形を, 高さを変えずに歪ませることに相当します。面積は変わらない。だから行列式も変わらない。

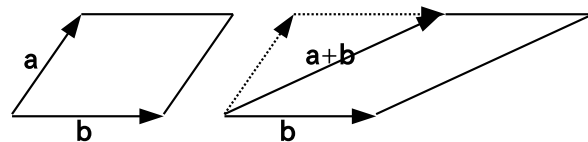


図 28.7

- 太字で書くべきところとそうでないところで混乱しています。

... 一般論を語る時のベクトルは太字。幾何ベクトルや数ベクトルも太字。集合や関数や行列は細字。でも \mathbb{R} や \mathbb{C} は太字。

- 定義が多すぎて覚えるのに苦労する。

... その苦労はいずれ報われます。

第29章

ベクトル解析1

ユークリッド空間 (普通の平面や 3 次元空間) におけるベクトルは、高校で学んだように、素朴な意味で「大きさと向きを持つ量」つまり幾何ベクトルである。それは例えば、力、変位、速度、加速度、風速、流速、電場、磁場などである。これらを扱うためには、幾何ベクトルの微積分に関する数学が必要になる。それを「ベクトル解析」という。これは秋学期の「物理学」で扱う電磁気学の基礎であり、水や熱などの「流れ」全般に関わる基礎でもある。また、経済学で出てくる最適化問題とも、密接に関係している。

29.1 スカラー場とベクトル場

ユークリッド空間の一部の領域または全領域について、領域内の全ての点にそれぞれひとつの値がある (対応する) ような概念 (存在) のことを「場」という。例えば「部屋の中の気温の分布^{*1}」は、部屋^{*2}の中の各点に、その点の温度が対応する概念であるから、一種の場である。だから温度分布のことを「温度場」と言うこともある。温度はスカラー (大きさだけを持ち、方向は持たない量) である。このように値がスカラーであるような場を「スカラー場」と呼ぶ。

また例えば、「部屋の中の風速の分布」は、部屋の中の各点に、その点での風速が対応する概念であるから、これも一種の場である。だから風速分布のことを「風速場」と言うこともある。風速はユークリッド空間のベクトル (大きさと方向も持つ量) である。このように値がベクトルであるような場を「ベクトル場」と呼ぶ。

場を数学的に扱うことを考えよう。まず、スカラー場を考える。ユークリッド空間の点は、デカルト座標であらわせば、 (x, y, z) のように \mathbb{R}^3 の要素で表現できるし、スカラーは \mathbb{R} の要素で表現できる^{*3}。スカラー場は、空

間の各点 (x, y, z) にスカラーが対応するようなものだから、 \mathbb{R}^3 から \mathbb{R} への写像と考えることができる。つまり、スカラー場は、

$$f(x, y, z) \quad (29.1)$$

のように、 \mathbb{R}^3 から \mathbb{R} への写像 (3 変数関数) で表現されるのだ。

こんどはベクトル場を考えよう。ここでいうベクトルとはユークリッド空間のベクトル、つまり「大きさと方向を持った量」のことだから、適当な基底を選べば、 (u, v, w) のように \mathbb{R}^3 の要素で表すことができる。すると、ベクトル場は、空間の中の各点 (x, y, z) に、ベクトル (u, v, w) が対応するものだから、 \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^3 への写像と考えることができる。つまり、ベクトル場は、

$$\mathbf{U}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \quad (29.2)$$

というような、 \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^3 への写像 (3 つの 3 変数関数の組み合わせ、すなわち 3 変数ベクトル値関数) で表現されるのだ^{*4}。

問 736 以下の場は、スカラー場かベクトル場か?

- (1) 部屋の中の湿度の分布
- (2) 海の中の水圧の分布

問 737 スカラー場

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^3 + z \quad (29.3)$$

について、 $(1, 2, 3)$ における値を求めよ。

問 738 ベクトル場

$$\mathbf{U}(x, y, z) = (xyz, x + y + z, 2x + yz) \quad (29.4)$$

について、 $(1, 2, 3)$ における値を求めよ。注: \mathbf{U} は太字!

*1 まぎらわしいが、これは「確率分布」の分布ではなくて、どこにどのくらいの大きさの値があるかという空間分布を意味する。

*2 それは 3 次元ユークリッド空間の一部の領域である。

*3 もちろんスカラーとして複素数を考えたければ、ここは \mathbb{R} ではなくて \mathbb{C} になるが、今は実数に限定して考えよう。

*4 「 $\mathbf{U}(x, y, z)$ 」を「 $\mathbf{U} = (x, y, z)$ 」と誤解しないように。

物理学, 特に電磁気学でよく出てくるのが, 「電場」と「磁束密度」である。それぞれは, 以下のように定義される: 空間の中に, 微小な電荷 q を持った粒子が v という速度で運動しているとき, その粒子が受ける力 F が, ある 2 つのベクトル場 E, B によって

$$F = qE + qv \times B \quad (29.5)$$

と表されるとき, E を電場, B を磁束密度, という。

E と B をまとめて電磁場と呼ぶ。

式 (29.5) の右辺の \times は外積 (ベクトル積) である。上の定義で, q を微小としたのは, 以下の理由による: もし q が大きな値ならば, その電荷が, 周りの他の電荷に影響を及ぼし, 電荷の分布の様子が変わってしまい, その結果, E や B も変わってしまう可能性がある。その可能性を排除するために, q を微小としたのだ。実際は, 微小でない電荷であっても, E や B が既に決定している状態であれば, 式 (29.5) は成り立つ。

スカラー場やベクトル場は, 2 次元ユークリッド空間 (つまり平面) で考えることもある。つまり, 平面内の各点にスカラーが対応するのが 2 次元のスカラー場であり, それは \mathbb{R}^2 から \mathbb{R} への写像 (2 変数関数) で表現される。例えば, 「物理学実験」の「等電位線」で扱った, 金属箔の面上の電位は平面のスカラー場である。

また, 平面内の各点に平面ベクトルが対応するのが \mathbb{R}^2 のベクトル場であり, それは \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 への写像 (2 つの 2 変数関数の組み合わせ) で表現される。例えば, 「物理学実験」の「等電位線」では, 金属箔を流れる電流密度 (に箔の厚さをかけたもの) は平面のベクトル場である。

29.2 2 次元極座標上での積分

数学リメディアル教材で, 面積分や体積分を学んだ。特に面積分では, 平面を x 軸と y 軸に平行な線群によって微小な矩形^{*5}に分割した。実は, これ以外にも面の分割のやり方がある。例として, 極座標による面積分を学ぼう。

図 29.1 のように, 平面を, 原点を中心とするいくつかの同心円と, 原点から四方八方に放射状に伸びるいくつかの直線で分割する。隣どうしの同心円の間隔を Δr とし, 隣どうしの直線どうしのなす角を $\Delta \theta$ とする。図の

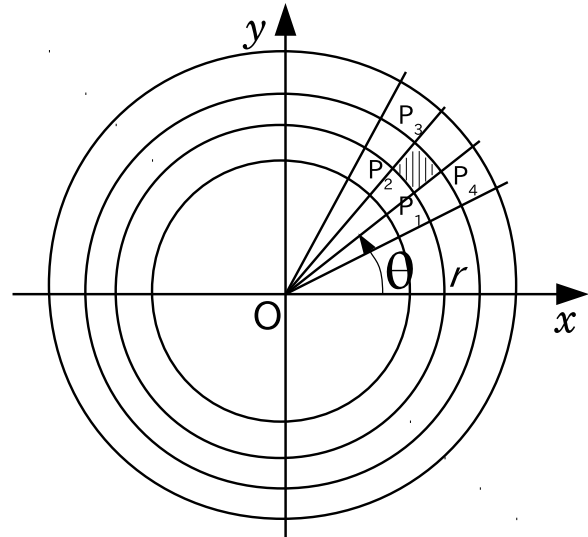


図 29.1 2 次元極座標の面積分

ように, 点 P_1, P_2, P_3, P_4 を考える。それぞれの位置を極座標で表すと,

$$\begin{aligned} P_1 &: r, \theta \\ P_2 &: r, \theta + \Delta \theta \\ P_3 &: r + \Delta r, \theta + \Delta \theta \\ P_4 &: r + \Delta r, \theta \end{aligned}$$

である。この 4 つの点を頂点とし, 同心円と直線で囲まれる「歪んだ四角形」を考えよう。平面は, このような四角形 (無論, 場所によって向きも形も大きさも違うが) で敷き詰められているとみなせる。

この「歪んだ四角形」は, $\Delta \theta$ が微小であれば, 長方形として近似できる。つまり, 本来は辺 P_1P_2 と辺 P_4P_3 は扇形の弧だからどちらもまっすぐではないし, P_4P_3 の方がわずかに長そうだが, $\Delta \theta$ が微小であれば, これらを同じ長さの直線と近似できそう。また, 辺 P_2P_3 と辺 P_1P_4 は本来は平行ではないが, $\Delta \theta$ が微小であれば, これらを平行な直線と近似できそう。というわけで, この四角形の面積 ΔS は, 辺 P_1P_2 の長さ ($r\Delta \theta$) と辺 P_1P_4 の長さ (Δr) を掛けて,

$$\Delta S \doteq r\Delta r\Delta \theta \quad (29.6)$$

となる。

半径 R の円を, このようなやりかたで分割すると, その面積は,

$$\sum_{\theta} \sum_r \Delta S \doteq \sum_{\theta} \sum_r r\Delta r\Delta \theta \quad (29.7)$$

となる。ここで \sum_{θ} は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の区間を分割する場

*5 「くけい」と読む。長方形のこと。

合の総和を表し、 \sum_r は、 $0 \leq r < R$ の区間を分割する場合の総和を表す。分割を無数に増やし、 Δr と $\Delta \theta$ を 0 に近づければ、式 (29.7) は、

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\theta \quad (29.8)$$

となる。この積分は、内側から計算できて、

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R d\theta = \frac{1}{2} R^2 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} R^2 [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \pi R^2 \end{aligned} \quad (29.9)$$

となり、円の面積の公式が出てくる。

ここで振り返ると、長方形の畑の積分では、単に dx と dy の掛け算でできたが、極座標の積分では、 dr と $d\theta$ の掛け算の前に r が入った。この r のもとをたどると、式 (29.6) に行き着く。そこで微小な「四角形」の面積が、 r に比例していたことが源である。これは考えれば当然で、円周の外側に行くほど、微小四角形が円周方向に伸びるからである。

さて、式 (29.8) では、単に微小面積を足しただけなので、積分の結果はその領域の面積を出すだけだが、もちろん、積分本来の定義である、「何らかの関数に微量(微小面積)をかけて足す」ということもできる：

問 739 半径 R の円形の底面を持つ高さ h の円錐の体積 V が次式になることを、極座標の積分を使って証明せよ：

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \quad (29.10)$$

ここで、デカルト座標^{*6}と極座標で面積分がどうなるかをまとめておこう。 (x, y) をデカルト座標、 (r, θ) を極座標として、

$$x = r \cos \theta \quad (29.11)$$

$$y = r \sin \theta \quad (29.12)$$

という関係のもとで、

^{*6} x, y のように、互いに直交する直線方向に 2 つの軸をとって点の位置を表すやりかた。

デカルト座標と極座標での面積分

関数 $f(x, y) = g(r, \theta)$ について、平面上の領域 D における面積分 I は、

$$I = \int_D f(x, y) \, dx \, dy \quad (29.13)$$

$$= \int_D g(r, \theta) r \, dr \, d\theta \quad (29.14)$$

式 (29.14) の被積分関数に r が入ることに注意せよ。

この式の D は、どのような形の図形でもかまわない。例えば数学リメディアル教材で考えた「雨の降る畑」では四角い畑だし、式 (29.8) の場合は半径 R の円である。場合によっては星型とか台形とか楕円形とかになるかもしれない。それぞれの場合で D を無数の微小面積に刻んで(その刻み方は座標系のとり方によって様々である)、関数にその微小面積をかけて足すのである。

実際のところ、なんでわざわざ極座標での面積分なんか考えるのかというと、被積分関数や積分領域 D が、極座標で表す方がシンプルになる場合が多々あるからである。例えば、原点からの距離 r だけに依存するような関数(スカラー場)を面積分するときは、 r を $\sqrt{x^2 + y^2}$ と置き換えて x, y で面積分するのは計算が大変(というか不可能)なことが多い。また、 D が円形の場合は、 x, y による面積分では x と y のそれぞれの下限と上限を設定するのがめんどくさいが、極座標なら簡単である。

さて、式 (29.13) と式 (29.14) を組み合わせると、すごい公式を証明できるのである：

問 740 以下の積分を考える：

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} \, dx \, dy \quad (29.15)$$

これは、 xy 平面全域にわたる面積分である。以下、 (r, θ) を極座標とする。

(1) 次式を示せ：

$$-x^2 - y^2 = -r^2 \quad (29.16)$$

(2) 次式を示せ：

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\theta \quad (29.17)$$

(3) 次式を示せ (C は積分定数):

$$\int e^{-r^2} r dr = -\frac{1}{2}e^{-r^2} + C \quad (29.18)$$

(4) 次式を示せ:

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2} \quad (29.19)$$

(5) 次式を示せ:

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta \quad (29.20)$$

(6) 次式を示せ:

$$J = \pi \quad (29.21)$$

(7) 次式を示せ:

$$J = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \right) \quad (29.22)$$

(8) 次式を示せ:

$$J = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 \quad (29.23)$$

(9) 次式を示せ:

$$\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi \quad (29.24)$$

(10) 次式を示せ:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (29.25)$$

(11) 式 (29.25) は、数学リメディアル教材の計算機数学の章で、数値積分によって調べた。その該当箇所を探して、ページ・式番号・積分の名前を述べよ。

(12) 式 (29.25) は、数学リメディアル教材の統計学の章で利用した。その該当箇所を探して、ページ・式番号を述べよ。

29.3 3次元の極座標

2次元ユークリッド空間 (つまり平面) の上でデカルト座標で表された点

$$(x, y) \quad (29.26)$$

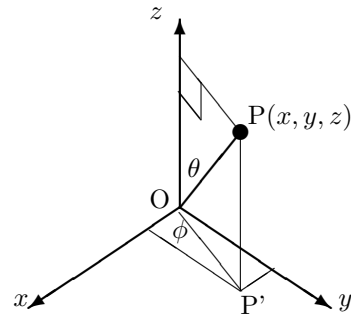
は、

$$(r, \theta) \quad (29.27)$$

のように、原点からの距離 r と、 x 軸からの角度 (偏角) θ の組み合わせであらわすこともできた。これ (r, θ の組み合わせ) が (2次元の) 極座標だった。このとき、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix} \quad (29.28)$$

という関係が背後にあった。この考え方を 3次元ユークリッド空間に拡張してみよう。



いま、3次元ユークリッド空間の中の1点 $P(x, y, z)$ を考える。原点 O から P までの距離を r とすると、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (29.29)$$

である。また、 z 軸の正の方向とベクトル \overrightarrow{OP} とのなす角を θ とすると、

$$z = r \cos \theta \quad (29.30)$$

である。また、 P を xy 平面に正射影した点を P' とすると、当然ながら、 P' のデカルト座標は $(x, y, 0)$ である。 OP' の距離を r' としよう。直角三角形 OPP' を考えて、角 OPP' は θ に等しいから、

$$r' = r \sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (29.31)$$

となる。 x 軸の正の方向とベクトル $\overrightarrow{OP'}$ とのなす角を ϕ とすると、 xy 平面上の極座標を考えて、

$$x = r' \cos \phi = r \sin \theta \cos \phi \quad (29.32)$$

$$y = r' \sin \phi = r \sin \theta \sin \phi \quad (29.33)$$

となる。式 (29.30)(29.32)(29.33) をまとめると、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{bmatrix} \quad (29.34)$$

となる。ただし、

$$0 \leq r, \quad (29.35)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad (29.36)$$

$$0 \leq \phi < 2\pi \quad (29.37)$$

である。

このようにデカルト座標 (x, y, z) であらわされるような点を, r, θ, ϕ であらわすことを, 3次元極座標もしくは球面座標と呼ぶ。3次元極座標は, 物理学においても重要である。

例 29.1 3次元極座標

$$r = 2, \theta = \frac{\pi}{3}, \phi = \pi \quad (29.38)$$

で表される点 Q を, デカルト座標で表してみよう。式 (29.34) より,

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi = 2 \sin(\pi/3) \cos \pi = -\sqrt{3} \\ y &= r \sin \theta \sin \phi = 2 \sin(\pi/3) \sin \pi = 0 \\ z &= r \cos \theta = 2 \cos(\pi/3) = 1 \end{aligned}$$

従って,

$$(x, y, z) = (-\sqrt{3}, 0, 1)$$

となる。(例おわり)

例 29.2 デカルト座標

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$$

で表される点 R を, 極座標で表してみよう。

$$r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$$

だから, $r = 2$ である (r は OR 間の距離だから $0 \leq r$)

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

だから, $\theta = \pi/6$ である。

$$\cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

だから, $\phi = \pi/3$ である。以上より,

$$r = 2, \theta = \frac{\pi}{6}, \phi = \frac{\pi}{3}$$

となる。(例おわり)

を, デカルト座標 (x, y, z) で表せ。

- (1) $r = 1, \theta = 0, \phi = 0$
- (2) $r = 1, \theta = \pi/2, \phi = 0$
- (3) $r = 1, \theta = \pi/2, \phi = \pi/4$
- (4) $r = 1, \theta = \pi/4, \phi = 0$
- (5) $r = 1, \theta = \pi/4, \phi = \pi$
- (6) $r = 1, \theta = \pi/6, \phi = \pi/4$
- (7) $r = 2, \theta = 2\pi/3, \phi = \pi/4$
- (8) $r = 3, \theta = \pi/4, \phi = \pi/4$

問 742 以下のデカルト座標 (x, y, z) で表される点を極座標で表す場合の, r, θ, ϕ を求めよ。必要なら電卓を使うこと。

- (1) $(1, 0, 0)$
- (2) $(0, 1, 0)$
- (3) $(0, 1, 1)$
- (4) $(1, 1, 1)$
- (5) $(1, 1, -1)$
- (6) $(-1/2, \sqrt{3}/2, \sqrt{3})$

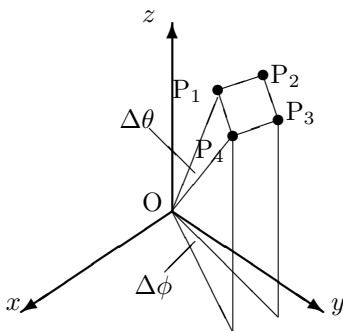
問 743 一般に, 球面上の 2 点間を結ぶ, 球面上の最短経路は, その 2 点と球の中心点を含む平面で球を切ったときの切口 (大円という) に沿っている。極座標とベクトルの内積を使って, 球面上の 2 点 P_1, P_2 の間の最短経路を求めてみよう。

- (1) 点 P_1 の極座標を r, θ_1, ϕ_1 とし, 点 P_2 の極座標を r, θ_2, ϕ_2 とする。両者は同一球面上 (ただし中心を原点とする) にあるので, r は共通である。 P_1 と P_2 のデカルト座標 (xyz 座標) をそれぞれ求めよ。
- (2) 上の結果から, $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ の内積を求めよ。
- (3) 角 P_1OP_2 を ψ としよう。上の結果から, $\cos \psi$ を求めよ。
- (4) P_1, P_2 の間の球面上の最短経路は, $r\psi$ であることを示せ。
- (5) 東京 (北緯 36 度, 東経 140 度) とパリ (北緯 49 度, 東経 2 度) の間の, 地表上の最短経路は約 9700 km であることを示せ。ただし地球を球とし, 半径を 6400 km とする。

問 741 以下の r, θ, ϕ によって極座標で表される点

29.4 3次元極座標上での積分

問 744 極座標を使って、球面の面積の公式を導いてみよう。原点 O を中心とし、半径 r の球面を考え、その球面上の点 $P_1(x, y, z)$ を考えよう。 P_1 の極座標を、 r, θ, ϕ とする。 P_1 のすぐ近くに、極座標 $r, \theta, \phi + \Delta\phi$ となる点 P_2 、極座標 $r, \theta + \Delta\theta, \phi$ となる点 P_4 、極座標 $r, \theta + \Delta\theta, \phi + \Delta\phi$ となる点 P_3 を考える。 $\Delta\phi$ や $\Delta\theta$ は十分に小さいとすれば、球面上の領域 $P_1P_2P_3P_4$ は、近似的に長方形と見ることができらるだろう。



- (1) 辺 P_1P_4 の長さは、近似的に $r \Delta\theta$ に等しいことを示せ。
- (2) 辺 P_1P_2 の長さは、近似的に $r \sin\theta \Delta\phi$ に等しいことを示せ。
- (3) 長方形 $P_1P_2P_3P_4$ の面積を ΔS とすると、

$$\Delta S \doteq r^2 \sin\theta \Delta\theta \Delta\phi \quad (29.39)$$

となることを示せ。

- (4) 球面の面積 S は、この ΔS を、 θ と ϕ の取りうる範囲にわたってたしたもの（つまり積分）である。つまり、

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (29.40)$$

である。この積分を実行して、次式を示せ。

$$S = 4\pi r^2 \quad (29.41)$$

問 745 前問の考え方を応用して、球の体積の公式を示してみよう。点 P_1, P_2, P_3, P_4 はそのままにして、それぞれの点について、同じ θ 、同じ ϕ を持つけど、 r が Δr だけ大きい点を考えよう。例えば点 P_1 について、極座標 $r + \Delta r, \theta, \phi$ となる点を P_1' とする。同様に、例えば P_3 については、極座標 $r + \Delta r, \theta + \Delta\theta, \phi + \Delta\phi$ とな

る点を P_3' と考える。

すると、面 $P_1P_2P_3P_4$ と、面 $P_1'P_2'P_3'P_4'$ は、厳密には後者のほうが大きいけど、 Δr が十分にゼロに近ければ、ほとんど同じ形・同じ大きさの長方形とみなすことができるだろう。そして、面 $P_1P_2P_3P_4$ と、面 $P_1'P_2'P_3'P_4'$ にはさまれた領域は、直方体と考えることができる。その直方体の体積を ΔV としよう。

- (1) 辺 P_1P_1' の長さが Δr であることから次式を示せ。

$$\Delta V \doteq \Delta S \Delta r \doteq r^2 \sin\theta \Delta\theta \Delta\phi \Delta r \quad (29.42)$$

- (2) 球の体積 V は、この ΔV を、 r と θ と ϕ の取りうる範囲にわたって総和したもの（つまり積分）である。つまり、

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr \quad (29.43)$$

である (R は球の半径)。次式を示せ。

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \quad (29.44)$$

問 746 北緯 30 度以上 60 度以下、東経 120 度以上 150 度以下の範囲の面積は、地球の全表面積の何パーセントか？ ただし地球を球とみなす。ヒント：基本的な考え方は式 (29.40) とほぼ同様。ただし、積分区間は球面の一部に限定される。それは即ち、 θ の範囲と ϕ の範囲が限定されることである。前者は緯度、後者は経度で決まる。ただし θ がそのまま緯度になるわけではないこと、度ではなくラジアンで考えねばならないことに注意せよ。

29.5 ヤコビアン

さて、2次元や3次元の極座標における積分は、微小面積や微小体積をそれぞれの座標で考えたとき、近似的に長方形とか直方体とみなすことができたので、各辺の長さをかけるだけで、微小面積や微小体積を表すことができた。しかし、一般的には、そのような考え方は通用しない。特に、微小面積や微小体積が必ずしも長方形や直方体にならないときにはもう少し工夫が必要である。それが、ここで学ぶヤコビアンである。それは、いわば「多変数版の置換積分の公式」である。

今、2次元ユークリッド空間（平面）の各点 (x, y) が、

u, v という 2 つの変数で,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{bmatrix} \quad (29.45)$$

と表されるとしよう。ここで (x, y) はデカルト座標である。このとき, u, v で面積分をするにはどうすればよいだろうか?

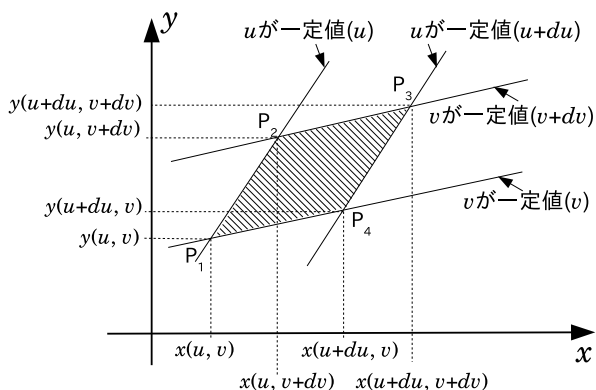


図 29.2 一般の座標における面積分(ヤコビアン)の説明図。斜線のかかった微小な平行四辺形は、変数 u が一定値となる曲線 2 本 (u と $u + du$) と、変数 v が一定値となる曲線 2 本 (v と $v + dv$) で囲まれている。各辺は、 du, dv が微小であれば近似的に直線とみなせる。互いに向きあう辺は、 du, dv が微小であれば近似的に平行とみなせる。4 隅の位置は、 u, v, du, dv であらわすことができる。例えば点 P_2 は変数 u が u という値をとる線と、変数 v が $v + dv$ という値をとる線の交点に位置するため、そのデカルト座標は $(x(u, v + dv), y(u, v + dv))$ となる。他の点も同様。

図 29.2 のように、 u が u から $u + du$ まで変わり、 v が v から $v + dv$ まで変わるようなとき、点は、平面上で微小な平行四辺形 $P_1P_2P_3P_4$ を描く。この微小平行四辺形は、以下の 2 つのベクトルで張られる:

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \begin{bmatrix} x(u + du, v) - x(u, v) \\ y(u + du, v) - y(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du \\ \frac{\partial y}{\partial u} du \end{bmatrix} \quad (29.46)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} x(u, v + dv) - x(u, v) \\ y(u, v + dv) - y(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{bmatrix} \quad (29.47)$$

従って、その面積 dS は、この 2 つのベクトルを並べてできる行列の行列式に等しい (P.145 の 28.1 節より):

$$dS = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ \frac{\partial y}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| du dv \quad (29.48)$$

従って、

デカルト座標と一般座標での面積分

関数 $f(x, y) = g(u, v)$ について、平面上の領域 D における面積分 I は、

$$\begin{aligned} I &= \int_D f(x, y) dx dy \\ &= \int_D g(u, v) \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| du dv \end{aligned} \quad (29.49)$$

となる。式 (29.49) は、置換積分を面積分に拡張したものである。最後の項の \int の中にある行列式を、ヤコビアンという。ヤコビアンは、慣習的に、以下のように表記する:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (29.50)$$

この記号を使うと、式 (29.49) の最後の式は以下のようにも書ける:

$$\int_D g(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (29.51)$$

さて、この考え方を 3 次元ユークリッド空間に拡張すると、微小体積は微小な平行六面体になり、ヤコビアンは 3 次の行列式になることがなんとなくわかるだろう。式 (29.14) の r や、式 (29.43) の $r^2 \sin \theta$ は、実はヤコビアンだったのだ。

問 747 式 (29.49) から式 (29.14) を導け。

問 748 3 次のヤコビアンを考えて、式 (29.43) を導け。

29.6 (発展) 原子内の電子軌道

電子は 1 個の原子核からクーロン力 (原子核が電子を電氣的に引き付ける力) を受ける。その場合、この方程式で空間の座標を (x, y, z) ではなく、3 次元極座標を使って表すことができる (ただし極座標の ϕ は式 (27.57) の方程式の ϕ と記号がかぶるので、ここでは η と表すことにする)。その詳細は数学的に高度なので省くが、極座標の各変数について式 (27.57) を変数分離すると、 r, θ, η のそれぞれを独立変数とする関数に関する固有方程式ができ、その結果として、合計 3 つの固有値が出てくる。

それらの 3 つの固有値は、いずれも整数であり、慣習的に n, l, m と表す。そして、 n を主量子数、 l を方位量子数、 m を磁気量子数という。一般に、「量子数」とは、このように、シュレーディンガー方程式を変数分離法で解いたときに固有値に現れる整数のことを意味する。

r に関する固有方程式の固有値の中には主量子数 n と方位量子数 l が現れる。この固有方程式が解 (固有関数) を持つことの数学的な条件から、 n は 1 以上、 l は 0 以上 n 以下に制限される。

θ と η に関する固有方程式の固有値の中には方位量子数 l と磁気量子数 m が現れる。この固有方程式が解 (固有関数) を持つことの数学的な条件から、 m は $-l$ 以上 l 以下の整数に制限される。

また、主量子数 n は、電子のエネルギーを規定する。方位量子数 l は、電子の角運動量の大きさを規定する。磁気量子数 m は、電子の角運動量の z 成分を規定する。

量子化学では、 n が 1, 2, 3, ... のときのことを、それぞれ K 殻, L 殻, M 殻, ... と呼び、 l が 0, 1, 2, ... のときのことをそれぞれ s 軌道, p 軌道, d 軌道, ... と呼ぶことは、諸君が「化学」や「化学結合論」で習ったとおりである (一般に、電子の状態ベクトルや波動関数のことを、「軌道」とか「電子軌道」という。電子が原子の中にあるときの電子軌道のことを「原子軌道」という。電子が分子の中にあるときの電子軌道のことを「分子軌道」という)。このようにして得られる $1s$ 軌道, $2p_x$ 軌道等は、定常状態 (固有状態) を表す、電子の状態ベクトルなのである。

問 749 (発展) シュレーディンガー方程式を原子の中の電子について解くと、ラゲール陪関数とルジャンドル陪関数というものが現れる。これらについて調べ、さらに、3 つの量子数がこれらの多項式の中の何に対応するか、述べよ。

演習問題

演習問題 17 秋分の午後 2 時、北緯 30 度の地表の地点 E での太陽天頂角と太陽方位角 (真北からの角度) を求めてみよう*7。

太陽は正午に南中するとして*8、午後 2 時は南中時か

ら 2 時間後である。

地球中心を原点 O、地軸を z 軸にとろう。地点 E を通る経線と赤道の交点を Q とする。O から Q に向かって x 軸をとろう。 z 軸と x 軸の両方に垂直な方向は 2 つあるが、そのうち、地点 E から見て東向きの方に y 軸をとろう。

地球中心 O から地点 E へ向かう単位ベクトルを \mathbf{E} とする。地球中心 O から太陽 S に向かう単位ベクトルを \mathbf{S} とする。緯度を η とする。

- (1) $\mathbf{E} = (\cos \eta, 0, \sin \eta)$ であることを示せ。
- (2) $\mathbf{S} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ とすると、 $\phi = -2\pi \times 2/24$, $\theta = \pi/2$ であることを示せ。
- (3) \mathbf{S} と \mathbf{E} の内積が、この瞬間の太陽天頂角の余弦である*9。それを利用して、この瞬間の太陽天頂角を有効数字 2 桁で度単位で求めよ。
- (4) $\mathbf{S} \times \mathbf{E}$ を求めよ。このベクトルは、この地点の地面 (水平面) に平行であり、この地点に立つ人には、太陽を水平面に正射影したときの方向から西へ 90 度まわった向きを向いている。
- (5) この地点で地表面に接して北を向く単位ベクトル \mathbf{N} を考えよう。 \mathbf{N} は xz 面内にあるから y 成分はない。 $\mathbf{N} = (-\sin \eta, 0, \cos \eta)$ となることを示せ。
- (6) $\mathbf{S} \times \mathbf{E}$ と \mathbf{N} のなす角から太陽方位角を求めよう。結果として、太陽は、真南から約 49 度だけ西にまわったところにあることを示せ。

29.7 解答

答 736

- (1) スカラー場
- (2) スカラー場 (パスカルの原理)

答 737 $1^2 + 2 \times 2^3 + 3 = 1 + 16 + 3 = 20$

答 738 $(1 \times 2 \times 3, 1 + 2 + 3, 2 \times 1 + 2 \times 3) = (6, 6, 8)$

答 739 円錐の底面を xy 平面に置き、その中心を原点に置く。高さ方向に z 軸をとる。 xz 平面による円錐の

*7 太陽天頂角と方位角は、農林業における生産性を数値モデルで解析する際に不可欠な要素である。

*8 実際は必ずしもそうとは限らない。まず、標準時からのずれを考えねばならない。例えばつくば (東経 140 度) は、東経 135 度を標準とする日本標準時よりも 20 分、時計を進めて考えね

ばならない。さらに、地軸の向きが太陽-地球間の方向に対して一定でないことのせいで、 ± 15 分程度の変動がある (それを均時差という)。それによれば、南中時刻は 2 月中旬に最も遅く、11 月上旬に最も早い。

*9 「余弦」とはコサインのこと。

断面の上縁 (の片側) は, デカルト座標系で $(0, 0, h)$ と $(R, 0, 0)$ を通る直線である。その傾きは $-h/R$, 切片は h なので, この直線は

$$z = -\frac{h}{R}x + h \quad (29.52)$$

となる。従って, 底面上で原点から r だけ離れた位置では, その上に $-hr/R + h$ の高さに円錐の側面がある。従って, 例えば, 図 29.1 の点 P_1 の上には, 高さ $-hr/R + h$ のところに円錐の側面がある。従って, 四角形 $P_1P_2P_3P_4$ の上には, 高さ $-hr/R + h$ の角柱があるとみなせる。その角柱の体積 ΔV は,

$$\Delta V = \left(-\frac{hr}{R} + h\right)r\Delta r\Delta\theta \quad (29.53)$$

となる (角柱の高さは P_1, P_2 と P_3, P_4 で同じではないが, 四角形が微小ならほぼ一緒とみなせる)。円錐の体積 V はこの総和なので,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(-\frac{hr}{R} + h\right)r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(-\frac{hr^2}{R} + hr\right) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{hr^3}{3R} + \frac{hr^2}{2}\right]_0^R d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{hR^2}{3} + \frac{hR^2}{2}\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{hR^2}{6} d\theta = 2\pi \frac{hR^2}{6} = \pi \frac{hR^2}{3} \end{aligned}$$

答 740 略。以下, ヒントのみ。

- (1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を $x^2 + y^2$ に代入すればよい。
- (2) 式 (29.14) で $g(r, \theta) = e^{-r^2}$ とおく。積分範囲 D は平面全体だから, r が 0 から ∞ まで, θ が 0 から 2π までである。
- (3) $r^2 = s$ として置換積分。 s の式を r の式に戻すのを忘れないように。
- (4) 前小問の結果を利用する。
- (5) 式 (29.19) を式 (29.17) (の内側の積分のところ) に代入。
- (6) 式 (29.20) を計算するだけ。定数の積分だから超簡単。
 $(1/2) \times (2\pi) = \pi$ 。
- (7) 式 (29.15) で, $e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2}e^{-y^2}$ とすれば, x に関す

る積分と y に関する積分を分離できる:

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \end{aligned}$$

2 行目から 3 行目の変形には, e^{-y^2} が x にとっては定数なので x に関する積分の外に出せることを使った。3 行目から 4 行目の変形には, x に関する積分全体が, y にとっては定数なので y に関する積分の外に出せることを使った。

- (8) 定積分は, 積分変数をどのような記号で書いても結果は同じなので, 式 (29.22) の y に関する積分で y を x と書き換えてよい。すると与式を得る。
- (9) 式 (29.21) と式 (29.23) が等しいことから与式を得る。
- (10) 式 (29.24) の両辺の平方根をとればよい。すると右辺に

± がつくが, もともと e^{-x^2} は常に正なので, その積分結果は正のはず。なのでマイナスはありえない。

答 741

$$(1) \quad (2)$$

$$(0, 0, 1) \quad (1, 0, 0)$$

$$(3) \quad (4)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(5) \quad (6)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(7) \quad (8)$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -1\right) \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

答 742

- (1) $r = 1, \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0$
 (2) $r = 1, \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2}$
 (3) $r = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}, \phi = \frac{\pi}{2}$
 (4) $r = \sqrt{3}, \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.955 \text{ rad}$
 $\cong 54 \text{ 度}, \phi = \frac{\pi}{4}$
 (5) $r = \sqrt{3}, \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2.186 \text{ rad}$
 $\cong 125 \text{ 度}, \phi = \frac{\pi}{4}$
 (6) $r = 2, \theta = \frac{\pi}{6}, \phi = \frac{2\pi}{3}$

答 743

- (1) $\overrightarrow{OP_1} = (r \sin \theta_1 \cos \phi_1, r \sin \theta_1 \sin \phi_1, r \cos \theta_1)$
 $\overrightarrow{OP_2} = (r \sin \theta_2 \cos \phi_2, r \sin \theta_2 \sin \phi_2, r \cos \theta_2)$
 (2) $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = r^2 \{ \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2$
 $+ \sin \phi_1 \sin \phi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \}$
 $= r^2 \{ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \}$
 (3)
- $$\cos \psi = \frac{\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}}{|\overrightarrow{OP_1}| |\overrightarrow{OP_2}|}$$
- $$= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad (29.54)$$

- (4) P_1, P_2 の間の球面上の最短経路は、この 2 点を通る大円上の弧 P_1P_2 であり、その長さは、 $r\psi$ である。
 (5) 東京 (北緯 36 度, 東経 140 度) を P_1 ,
 パリ (北緯 49 度, 東経 2 度) を P_2 として,
 $\theta_1 = 90 - 36 = 54 \text{ 度}, \phi_1 = 140 \text{ 度},$
 $\theta_2 = 90 - 49 = 41 \text{ 度}, \phi_2 = 2 \text{ 度}$
 を式 (29.54) に代入すると、 $\cos \psi \cong 0.049$ 。よって $\psi \cong \cos^{-1} 0.049 \cong 1.522 \text{ ラジアン}$ 。よって、弧 P_1P_2 の長さは、 $r\psi = 9700 \text{ km}$ 。

答 744

- (1) 辺 P_1P_4 は、半径 r , 角 $\Delta\theta$ の円弧で近似できるから、その長さは近似的に $r \Delta\theta$ に等しい。
 (2) 辺 P_1P_2 は、半径 $r \sin \theta$, 角 $\Delta\phi$ の円弧で近似できるから、その長さは近似的に $r \sin \theta \Delta\phi$ に等しい。
 (3) (略) 前 2 問によって、 $P_1P_2P_3P_4$ の 2 辺の長さがわかった。それらの辺は互いに直交しているので、そ

れらの長さを掛け合わせると、長方形 $P_1P_2P_3P_4$ の面積を得る。

- (4) 式 (29.40) について、被積分関数に ϕ が無いから、 ϕ に関する積分は、単に 2π 倍に相当する。それに注意すれば、 $S = 4\pi r^2$ は導けるはず (各自、計算せよ)。

答 745 略。

答 746 導出過程は略 (各自考えて記述せよ)。答えは $(\sqrt{3}-1)/48 = 0.01525\dots$, すなわち約 1.5 パーセント。

答 747 $u = r, v = \theta$ とおいて、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ だから、ヤコビアンは、

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= (\cos \theta)(r \cos \theta) - (-r \sin \theta)(\sin \theta)$$

$$= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r \quad (29.55)$$

従って、式 (29.49) は、次式のようになる:

$$I = \int_D g(r, \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta = \int_D g(r, \theta) r dr d\theta$$

■

答 748 3 次元ユークリッド空間の各点 (x, y, z) が、 u, v, w という 3 つの変数で、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{bmatrix} \quad (29.56)$$

と表されるとしよう。ここで (x, y, z) はデカルト座標である。 u が u から $u+du$ まで変わり、 v が v から $v+dv$ まで変わり、 w が w から $w+dw$ まで変わるようなとき、点 (x, y, z) は、空間内で微小な平行六面体を描く。この微小平行六面体は、以下の 3 つのベクトルで張られる:

$$\begin{bmatrix} x(u+du, v, w) - x(u, v, w) \\ y(u+du, v, w) - y(u, v, w) \\ z(u+du, v, w) - z(u, v, w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du \\ \frac{\partial y}{\partial u} du \\ \frac{\partial z}{\partial u} du \end{bmatrix} \quad (29.57)$$

$$\begin{bmatrix} x(u, v+dv, w) - x(u, v, w) \\ y(u, v+dv, w) - y(u, v, w) \\ z(u, v+dv, w) - z(u, v, w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ \frac{\partial y}{\partial v} dv \\ \frac{\partial z}{\partial v} dv \end{bmatrix} \quad (29.58)$$

$$\begin{bmatrix} x(u, v, w+dw) - x(u, v, w) \\ y(u, v, w+dw) - y(u, v, w) \\ z(u, v, w+dw) - z(u, v, w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} dw \\ \frac{\partial y}{\partial w} dw \\ \frac{\partial z}{\partial w} dw \end{bmatrix} \quad (29.59)$$

従って、その体積 dV は、

$$\begin{aligned} dV &= \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial x}{\partial w} dw \\ \frac{\partial y}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial w} dw \\ \frac{\partial z}{\partial u} du & \frac{\partial z}{\partial v} dv & \frac{\partial z}{\partial w} dw \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \right| du dv dw \end{aligned} \quad (29.60)$$

となる。3次元ユークリッド空間内の領域 D の体積 V は、 D をこのような微小な平行六面体に無数に分割して、それぞれの微小体積 dV を総和したものであるから、

$$V = \int_D dV = \int_D \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \right| du dv dw \quad (29.61)$$

となる。ここで出てきた行列式が3次のヤコビアンであり、それを

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \quad (29.62)$$

と書く。ここで、三次元極座標を考え、 $u = r$ 、 $v = \theta$ 、 $w = \phi$ とおくと、ヤコビアンは、式 (29.34) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \\ &= \dots = r^2 \sin \theta \end{aligned} \quad (29.63)$$

となる (諸君は省略せずに全部計算せよ)。すると、式 (29.61) は、

$$V = \int_D r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (29.64)$$

となる。いま、領域 D として、原点を中心とする半径 R の球を考えると、 r は0から R まで、 θ は0から π まで、 ϕ は0から 2π までの範囲を動くから、式 (29.64) は、

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (29.65)$$

となる。積分の順序を入れ替えると、式 (29.43) に一致する。 ■

- 海の中の水圧の分布がスカラー場になるのがわかりません。圧力は (単位面積当たりの) 力だから、ベクトルのような気がするのですが...

... 海中にいる潜水艦の上面には下向きの力が、下面には上向きの力がかかるのです (そういう力に耐えるために、潜水艦は、どちらから力がかかっても均等に耐えられるような丸っこい形をしているのです)。このように、水圧の力は、面に垂直にかかります。つまり「水圧の力の向き」は、「どういう面を想定するか」で決まるのです。水圧そのものが向きを持っているのではないのです。

- 太陽天頂角、むずかしかったです。

... また考えてみてください。極座標と内積、外積をうまく使えば、どんな微妙な状況の太陽方向も計算できますよ。

- (極座標で) ϕ を θ にした方が2次元の極座標と記号が一致して混乱がないのに。

... そうかもね。数学や物理学の慣習には、「こうだったらいいのに」と思うことが結構ありますね。例えば私は \sin や \cos は「三角関数」より「円関数」と呼ぶべきだと思います。

第30章

ベクトル解析2

30.1 ナブラ演算子と勾配・発散・回転

以前 P.56 あたりで学んだ、「演算子」について思い出そう。「微分する」とか「係数をかける」等という、関数 $x(t)$ に対する何らかの「操作」は、形式的にひとまとめに書き換えることができる。例えば、P.57 式 (20.14) のように、関数に対する微分や係数倍などの操作をまとめたもののことを、「演算子」と呼ぶのだった。

さて、次式で定義される ∇ を ナブラ演算子 (nabla operator) と呼ぶ (ナ ブラではなくナ ブラ):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (30.1)$$

∇ は、偏微分の演算子を 3 つ、あたかも数ベクトルのように並べたものである。ナブラ演算子を手書きするときは、これはベクトル (みたいなもの) であることを示すために、必ず太字で書こう (ナブラ記号を細字で書いてしまう人が実に多い)。

∇ は、スカラー場やベクトル場を操作する演算子である。これを使って、これから「勾配」「発散」「回転」という 3 つの新しい概念を定義する。「それが何なんだ」と思うかもしれないが、そのうちわかる。今は定義をしっかりと頭に入れよう:

まず、 ∇ をスカラー場 $f(x, y, z)$ に掛ければ、形式的に、

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (30.2)$$

となる。その結果は、見てわかるように、3 つの成分を持つ量、つまりベクトル場である。こうしてできるベクトル場、すなわち

$$\nabla f \quad (30.3)$$

のことを、「 f の 勾配 (gradient)」と呼ぶ。 f の勾配は、

$\text{grad } f$ と書くこともある。

例 30.1 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ のとき、

$$\nabla f = \text{grad } f = (2x, 2y, 2z)$$

である。

問 750 スカラー場 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^3 + z$ の勾配を求めよ。

こんどは、 ∇ をベクトル場

$$\mathbf{U}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$$

(30.4)

に対して掛けてみよう。と言っても、 ∇ は形式的には数ベクトルの形をしているし、 \mathbf{U} も数ベクトルなので、単純な「掛け算」はできないが、「ベクトルとベクトルの掛け算」つまり内積や外積ならできそう。まず内積をやってみると、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (u, v, w) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (30.5)$$

となる。その結果は、見てわかるように、1 つしか成分が無い量、つまりスカラー場である。こうしてできるスカラー場、すなわち

$$\nabla \cdot \mathbf{U} \quad (30.6)$$

のことを、「 \mathbf{U} の 発散 (divergence)」と呼ぶ。 \mathbf{U} の発散は、 $\text{div } \mathbf{U}$ と書くこともある。

問 751 ベクトル場 $\mathbf{U}(x, y, z) = (xyz, x+y+z, 2x+yz)$ の発散を求めよ。

次に、 ∇ を式 (30.4) のベクトル場 \mathbf{U} に対して「外積」

してみると,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{U} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (u, v, w) \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (30.7)$$

となる。その結果は、見てわかるように、3つの成分を持つ量、つまりベクトル場である。こうしてできるベクトル場、すなわち

$$\nabla \times \mathbf{U} \quad (30.8)$$

のことを、「Uの回転(rotation または curl)」と呼ぶ。Uの回転は、 $\text{rot } \mathbf{U}$ とか $\text{curl } \mathbf{U}$ と書くこともある。

問 752 以下のベクトル場 \mathbf{U} の回転を求めよ:

$$\mathbf{U}(x, y, z) = (xyz, x + y + z, 2x + yz) \quad (30.9)$$

さて、ここで学んだ「勾配」「発散」「回転」は、スカラー場やベクトル場にナブラ演算子を適当にかけたものではあるが、それにしても何やら意味あり気な名前である。実際、それぞれには名前にふさわしい「意味」があるのだ。それを以後、ゆっくり見ていこう。

30.2 勾配

P.171 で定義だけ学んだ「勾配」について、もう少し詳しく学ぼう。 f をスカラー場とすると、 f の勾配、つまり ∇f 、つまり $\text{grad } f$ は、式 (30.2) で示したように、ベクトル場である。従って、 grad は、スカラー場からベクトル場を作る(スカラー場にベクトル場を対応させる)一種の写像である。

では、勾配の「意味」を考えていこう:

問 753 3次元ユークリッド空間の中に、互いに近接する2点:

$$\begin{aligned}P(x, y, z) \\ Q(x + dx, y + dy, z + dz)\end{aligned}$$

を考える(図 30.1)。 dx, dy, dz はいずれも任意の微小量である。いま、スカラー場 $f(x, y, z)$ について、点 Q で

の値と点 P での値との差を df とする。すなわち、

$$df = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) \quad (30.10)$$

とする。

- (1) 次式が成り立つことを示せ(ヒント: 全微分公式。全微分を忘れた人は、数学リメディアル教材の最終章を復習せよ。)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (30.11)$$

- (2) 2点間を結ぶベクトル \overrightarrow{PQ} を「変位ベクトル」と呼び、 $d\mathbf{r}$ と書く。すなわち、

$$d\mathbf{r} = \overrightarrow{PQ} = (dx, dy, dz) \quad (30.12)$$

である。 dx, dy, dz は任意の微小量なので、この変位ベクトル $d\mathbf{r}$ は任意の微小なベクトルである。 $d\mathbf{r}$ の d は「微小な差」を意味する d なので細字だが、 \mathbf{r} は太字であることに注意せよ(両方細字で $d\mathbf{r}$ と書く人がいるが、それはダメ)。

式 (30.11) から次式を導け:

$$df = \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} \quad (30.13)$$

式 (30.13) のように、全微分公式は勾配と変位ベクトルの内積で表すことができるのだ。

注: 式 (30.13) の \cdot は内積である。また、 $\text{grad } f$ はベクトルなのだが、諸君は「ベクトルは太字で書け」と散々言われたのに、 $\text{grad } f$ のどこにも太字は無い。ちょっと違和感を感じるが、そういうものだと思って欲しい。

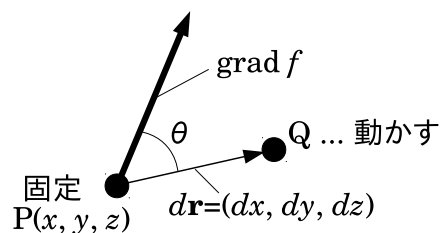


図 30.1 $\text{grad } f$ の意味を考えよう。

さて、点 P を固定し、点 Q を点 P のまわりでいろいろなところに動かすことを考えよう(図 30.1)。

$\text{grad } f$ は、どういう向きや大きさを持つのかはまだよくわからないが、点 P を固定すれば、とりあえず一定のベクトルである。これは点 Q の位置とは無関係である。いま、ベクトル $\text{grad } f$ と変位ベクトル $d\mathbf{r}$ のなす角を θ

とすると、式 (30.13) と内積の定義から、

$$df = \text{grad } f \cdot dr = |\text{grad } f| |dr| \cos \theta \quad (30.14)$$

となる。ここで、点 Q をうろろと動かすと、 θ が直角になるケースがあることが想像できるだろう (図 30.2)。その場合、 $\cos \theta$ はゼロになるから、式 (30.14) はゼロになる。すなわち、ベクトル $\text{grad } f$ と変位ベクトル dr が直角になるような位置に点 Q が来ると、 df はゼロになる。 df は、点 Q と点 P の間での f の値の差だったから、 df がゼロ、ということは、 P と Q で f の値が同じ、ということである。

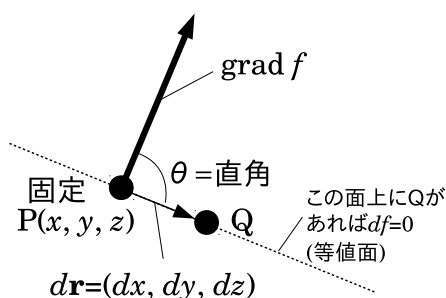


図 30.2 $\text{grad } f$ に垂直な面に Q が来ると、 P と Q で f の値に差が無くなる。

そのような点 Q 、つまり θ が直角になるような点 Q は、点 P を通り $\text{grad } f$ に垂直な平面を作ることがわかるだろう。その面では、 df がゼロだから、どこをとっても f の値は等しい (ただし、 Q があまりにも P から離れてしまうと式 (30.13) が成り立たないのでダメだが)、そのような面、すなわち f の値が一定であるような面を「等値面」と呼ぼう*¹。すると、以上の考察から、次のように言える：

— $\text{grad } f$ の性質 1 —

$\text{grad } f$ は f の等値面に垂直である。

問 754 $f(x, y, z) = 2x + y + 3z$ とする。

- (1) $\text{grad } f$ を求めよ。
- (2) $f(x, y, z)$ が一定値のとき、点 (x, y, z) は平面を構成することを示せ。

*¹ 等値面は、一般的には曲面である。しかし、微小な範囲で考えれば、曲面は平面で近似できる。ここで言っている平面とは、そのような、曲面の近似としての平面である。

- (3) その平面が、 $\text{grad } f$ と垂直であることを示せ。(ヒント：法線ベクトルが $\text{grad } f$ と平行ならばよい。平面の法線ベクトルについては、数学リメディアル教材参照。)

問 755 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ とする。

- (1) $\text{grad } f$ を求めよ。
- (2) $f(x, y, z)$ が正の一定値のとき、点 (x, y, z) は原点を中心とする球面 S を構成することを示せ。
- (3) 一般に、原点を中心とする球面上の点 (x, y, z) について、ベクトル (ax, ay, az) はその球面の法線ベクトル (球面に垂直なベクトル) であることを示せ。ただし a はゼロ以外の任意の実数。
- (4) $\text{grad } f$ は、点 (x, y, z) で球面 S と垂直であることを示せ。

問 756 $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。

- (1) $\text{grad } f$ を求めよ。
- (2) $f(x, y, z)$ が正の一定値のとき、点 (x, y, z) は原点を中心とする球面 S' を構成することを示せ。
- (3) $\text{grad } f$ は、点 (x, y, z) で球面 S' と垂直であることを示せ。

$\text{grad } f$ の「向き」について、もう少し考えよう。さきほどの式 (30.14) について、点 Q を点 P のまわりをうろろと動かす状況を、もういちどイメージしよう。ただしここでは、 PQ の距離だけは一定に保つ。つまり点 Q は点 P から一定の距離 (ただし全微分公式が成り立つくらいに十分に短い距離) だけ離れたところ (それは球面になる) を動く。このとき、上の式で、 df が最大になるのはどういう場合だろうか？

この場合、変化するのは $\cos \theta$ だけだから、 θ が 0 のとき $\cos \theta = 1$ で最大であり、そのとき $\text{grad } f$ と \overrightarrow{PQ} は同じ向きを向いている (θ が 0 だから)。このとき df が最大になる、すなわち、 Q での f の値と P での f の値の差がいちばん大きくなる。つまり、この \overrightarrow{PQ} の向き (それは $\text{grad } f$ と同じ向きである) に進むと、 f の値が最も大きく変わる (増える) のだ。まとめると、

grad f の性質 2

grad f は、 f の値を最も大きく変化させる(増やす)向きを向いている。

ちなみに、先に挙げた「性質 1」とあわせると、「 f を最も大きく変化させる向き」は「 f の等値面」と垂直であることがわかるだろう。

では、grad f の「長さ」は何を表すのだろうか?

問 757 式 (30.14) について、 \overrightarrow{PQ} が grad f と同じ向きを向いる場合を考えよう。このとき、 $|\overrightarrow{PQ}| = dr$ と書くと、次式が成り立つことを示せ。

$$\frac{df}{dr} = |\text{grad } f| \quad (30.15)$$

つまり、

grad f の性質 3

$|\text{grad } f|$ は、 f を最も大きく変化する向きに軸をとったときの、 f の微分係数である。

従って、 f の変化が激しい場所では $|\text{grad } f|$ は大きな値をとる。

以上で勾配の意味や性質の説明は一段落したのだが、これらは全て、式 (30.13) から派生したものだ。そこで、式 (30.13) をもういちど、じっくり見てみよう: いま、点 P の位置ベクトルを \mathbf{r} とする。すなわち、

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z) \quad (30.16)$$

とする。すると、点 Q の位置ベクトルは、 $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ となる。点 P 、点 Q での f の値は、それぞれ $f(\mathbf{r})$ 、 $f(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$ と書けるので、式 (30.10) は、

$$df = f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \quad (30.17)$$

と書ける。これで式 (30.13) を書き換えると、

$$f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} \quad (30.18)$$

となる。これは、1 変数関数の微分係数の定義式:

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx \quad (30.19)$$

とよく似ているではないか! つまり、grad f は、1 変数関数の微分係数を、「複数の独立変数を持つ関数」に自然に拡張したものである。そのとき、微分係数と微小量の積(つまり $f'(x)dx$)は、勾配と微小変位ベクトルとの内

積(つまり $\text{grad } f \cdot d\mathbf{r}$)にとって替わられるのである。

勾配は、多変数関数の性質を記述するのに大変に重要である。例えば、経済学では、経済政策や社会政策の最適な条件を探る為に、政策の効果を表す多変数関数の勾配を使う。物理学では、以下のような応用例がある:

例 30.2 海の中の水塊に働く力を考えよう。一般に、水圧 p の水中にある、面積 a の面には、その面に垂直な向きに pa という力がかかる。この力の大きさは、面の向きによらない。これをパスカルの原理という。

海中の一箇所に原点をとり、デカルト座標系を張って、点 (x, y, z) における水圧を $P(x, y, z)$ としよう。点 (x_0, y_0, z_0) を中心とする立方体状の水塊 Ω を考える。 Ω の一辺の長さを δ とする。 Ω の各面はいずれも x, y, z 軸のどれかに垂直であるとす。

Ω には、隣接する水塊から各面を介して力を受ける。そのような力を

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) \quad (30.20)$$

とすると、 \mathbf{F} はどのように表されるだろうか?

x 軸に垂直な 2 つの面を A と A' とする。 A は $x = x_0 - \delta/2$ の位置にあり、 A' は $x = x_0 + \delta/2$ の位置にあるとする。 A には x 軸の正の方向に、

$$P(x_0 - \delta/2, y_0, z_0)\delta^2 \quad (30.21)$$

という力が働き、 A' には x 軸の負の方向に、

$$P(x_0 + \delta/2, y_0, z_0)\delta^2 \quad (30.22)$$

という力が働く。 A, A' 以外の面に働く力には x 方向の成分は無い(A, A' 以外の面は x 軸に平行である。パスカルの原理より、力は面に垂直に働くので、それらの面に働く力は x 軸に対して垂直である)。従って、 F_x は、式 (30.21) と式 (30.22) の合力である。すなわち、

$$F_x = P(x_0 - \delta/2, y_0, z_0)\delta^2 - P(x_0 + \delta/2, y_0, z_0)\delta^2$$

となる。線型近似を用いると、この式は、

$$F_x = -\frac{\partial P}{\partial x}\delta^3 \quad (30.23)$$

となる。これが、この水塊 Ω に働く水圧による、 x 軸方向の力である。同様に、 y 軸、 z 軸にそれぞれ垂直な面のペアを考え、それに働く水圧による、 y, z 軸方向の力は

それぞれ,

$$F_y = -\frac{\partial P}{\partial y} \delta^3 \quad (30.24)$$

$$F_z = -\frac{\partial P}{\partial z} \delta^3 \quad (30.25)$$

となる。これらをまとめて書くと、 Ω に働く水圧による力は、

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (F_x, F_y, F_z) \\ &= \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \delta^3, -\frac{\partial P}{\partial y} \delta^3, -\frac{\partial P}{\partial z} \delta^3 \right) \\ &= -\delta^3 \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (30.26)$$

となる。ここで、 δ^3 は立方体の体積であり、それを dV と書き換えると、

$$\mathbf{F} = -dV \text{grad } P \quad (30.27)$$

となる。この式は大切な式である。すなわち、水中の微小な水塊には、まわりの水から受ける水圧の合力として、水塊の体積と「水圧の勾配」の積という力を受ける。勾配の性質 2 によると、 $-\text{grad } P$ は、水圧が高いところから低いところに向かう方向を向いている（マイナスがついていることに注意せよ）。このような向きの力が水塊にかかるということは、直感的にもうなずけるだろう。

式 (30.27) は、水や空気など、あらゆる流体に生じる流れや波を解析する時の最も大切な基礎式である。例えば、諸君が音波の波動方程式を 1 次元で導いたときに、P.116 式 (25.40) という式を導いたが、あれは式 (30.27) のように拡張されるのである。

問 758 水中の微小体積 dV にかかる力 \mathbf{F} と圧力 P の関係、すなわち式 (30.27) の導出を再現せよ。

30.3 線積分

実は、勾配の意味を深く理解するには、「線積分」という概念が必要である。線積分については、既に 1 学期の「物理学」で、仕事の一般的な定義を考えると学んだ。物理学をとっていない人も、ここで学ぼう。

以下の例を考えよう：君は、自動車で、曲がりくねった道を通って、地点 A から地点 B まで行こうとしている。道は、ところどころきれいに舗装されているが、凸凹の悪路もある。

さて、この道を地点 A から距離（みちのり） s だけ進んだ地点を、 $P(s)$ としよう。もちろん $A=P(0)$ である。A から B までの道の全長距離を L とすれば、 $B=P(L)$ である (図 30.3)。

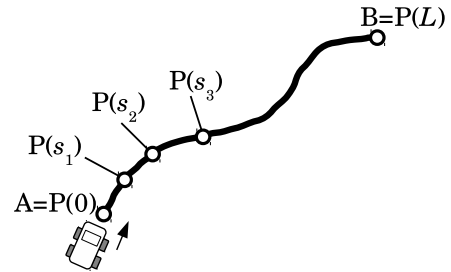


図 30.3 道路を自動車で行く。

いま、 $P(s)$ 付近で、短い距離 ds だけ進むのに必要な燃料 df が、

$$df = \phi(s) ds \quad (30.28)$$

で与えられるとしよう。これは次のように解釈できる：基本的に燃料は走行距離 ds が長くなればなるほど必要だが、特に舗装道では車はスムーズに走るのだから燃料は少なく済むし、逆に悪路ではエンジンに負担がかかるので燃料はたくさん必要である。そこで、この式の $\phi(s)$ は、地点 $P(s)$ で、単位距離あたりどのくらい燃料が必要か、つまり、「どのくらい悪い道か」を表す量であると考えられる。

さて、地点 A から地点 B までの道のりを、 s_0, s_1, \dots, s_n というふうに n 個に分割し（もちろん $s_0 = 0, s_n = L$ ）、1 以上 n 以下の任意の整数 k について $ds_k = s_k - s_{k-1}$ としよう。 $P(s_{k-1})$ から $P(s_k)$ まで進むのに必要な燃料を df_k とすれば、

$$df_k = \phi(s_k) ds_k \quad (30.29)$$

である。一方、地点 A から地点 B まで進むのに必要な燃料 f は、 df_1, df_2, \dots, df_n の和だから、

$$f = \sum_{k=1}^n df_k = \sum_{k=1}^n \phi(s_k) ds_k \quad (30.30)$$

である。ここで n を十分に大きくして、各 k に関する ds_k をゼロに近づければ、これは

$$f = \int_0^L \phi(s) ds \quad (30.31)$$

となる。あるいは、 $s = 0$ から $s = L$ という積分区間を指定するかわりに、出発地点 A と到着地点 B を指定

して

$$f = \int_A^B \phi(s) ds \quad (30.32)$$

と書くこともある(ややまぎらわしいが)。あるいは、この道路(AからBまで)のことを Γ を書いて、

$$f = \int_{\Gamma} \phi(s) ds \quad (30.33)$$

と書くこともある。このように、線(今の例では道路)に沿って、各微小区間で、ある関数と区間距離をかけて足し合わせることを、「線積分」という。といっても、今の例では、「道のり」 s のような変数を導入すれば、普通の1変数関数の積分に過ぎない。

さて、こんどはこの道に、風が吹いているとしよう。風の強さや向きは場所によって違う。風に向かって走るときは燃料が余計にかかるが、風を背に受けて走るときには燃料は少なくてすむ。その場合、式(30.28)は、風の影響を含むように修正されるべきである。燃料消費は、風がどのくらい「正面から」吹いてくるかに依存する(横風は関係ない)から、風速を U とし、風向きと車の進行方向のなす角を θ とすると、余分な燃料は

$$U \cos \theta \quad (30.34)$$

に比例すると考えてよいだろう。ところがこれでは $\theta = 0$ のとき、つまり追い風のとくに燃料消費が大きいことになってしまう。実際は、それとは逆で、追い風の時はむしろ燃料消費は少なくてすむ。なので、符号を逆転しよう：

$$-U \cos \theta \quad (30.35)$$

さらに、車の走行距離 ds にも、もちろん比例するから、結局、

$$-U ds \cos \theta \quad (30.36)$$

に比例すると言える。比例係数をとりあえず κ とおけば、結局、風による余分の燃料消費は

$$-\kappa U ds \cos \theta \quad (30.37)$$

となる。ここで U を風速ベクトルとして、 dr を $P(s)$ から $P(s+ds)$ へのベクトル(要するに変位ベクトル)としよう。もちろん、 $|dr| = ds$ である。上の式は、

$$-\kappa \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} \quad (30.38)$$

となる。もし車の燃料消費量が、走行距離にはほとんど依らず、このような風の影響だけで決まるならば、式

(30.28)は、以下のように修正される：

$$df = -\kappa \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} \quad (30.39)$$

これをもとに式(30.29)以降を修正していけば、結局、

$$f = -\kappa \int_{\Gamma} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} \quad (30.40)$$

となる*2。ここで \mathbf{r} は地点 $P(s)$ の位置ベクトルである。この右辺の

$$\int_{\Gamma} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} \quad (30.41)$$

は、各地点におけるベクトル U と、微小な変位ベクトル dr の内積を足し合わせたものである。これも線積分のひとつの形である。くどいようだが、 dr がベクトルであることに注意!(だから、 r は太字で書かねばならない!)。慣習的には、「線積分」というと、特に、このような、ベクトル場と微小な変位の内積の積分を指すことが多い*3。

例 30.3 以下のベクトル場:

$$\mathbf{U} = (-y, x, 0) \quad (30.42)$$

を考える。原点を中心とする、 xy 平面上の半径1の円周に沿って、 $(1, 0, 0)$ から $(0, 1, 0)$ を經由して $(-1, 0, 0)$ に至る経路を Γ とする。

$$\int_{\Gamma} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} \quad (30.43)$$

はどうなるだろうか? xy 平面上で、 x 軸からの角を θ とする。 Γ 上の点 P の位置ベクトル \mathbf{r} は、 xy 平面の極座標の考え方から、

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

と表される。このとき、 θ が点 P よりも微小量 $d\theta$ だけ大きい点の位置ベクトルを $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{r} + d\mathbf{r} &= (\cos(\theta + d\theta), \sin(\theta + d\theta), 0) \\ &= (\cos \theta - \sin \theta d\theta, \sin \theta + \cos \theta d\theta, 0) \\ &= \mathbf{r} + (-\sin \theta d\theta, \cos \theta d\theta, 0) \\ &= \mathbf{r} + (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta \end{aligned}$$

となる。従って、

$$d\mathbf{r} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta$$

*2 現実的には、実際の燃料消費量は式(30.33)と式(30.40)の和になるだろう

*3 電磁気学における「ビオ・サバルの法則」では、ベクトル場と微小な変位の外積の積分を考える。

となる。従って、

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} &= (-y, x, 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta \\ &= (y \sin \theta + x \cos \theta) d\theta \\ &= (\sin \theta \sin \theta + \cos \theta \cos \theta) d\theta \\ &= d\theta \end{aligned}$$

となる。従って、式 (30.43) は、

$$\int_{\Gamma} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi} d\theta = \pi \quad (30.44)$$

となる。(例おわり)

この例のように、線積分を実際に計算せよ、という状況では、経路を一つの媒介変数(この例では θ) で表して、その媒介変数による 1 変数の定積分に持ち込むのが有効である。

問 759 以下のベクトル場:

$$\mathbf{U} = (x - y, x + y, 0) \quad (30.45)$$

を、例 30.3 で述べた経路 Γ で線積分せよ。

さて、勾配と線積分の関係を学ぼう。今、あるスカラー場 $f(\mathbf{r})$ について、点 A と点 B を両端とするある経路 Γ に沿った点 $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ を考え、各区間は微小変位であるとみなす。すると、式 (30.13) より、

$$df_k = \text{grad } f \cdot d\mathbf{r}_k \quad (30.46)$$

となる (k は 1 以上 n 以下の任意の整数で、 $d\mathbf{r}_k$ は $\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}$)。式 (30.46) を $k = 1$ から $k = n$ まで考えて足しあわせれば、

$$\sum_{k=1}^n df_k = \sum_{k=1}^n \text{grad } f \cdot d\mathbf{r}_k \quad (30.47)$$

となる。左辺は f の微小変化を経路の端点 A から端点 B まで積み上げたものだから、 $f(B) - f(A)$ となる。右辺は n が十分に大きく、 $d\mathbf{r}_k$ が十分に微小であれば、線積分で書き換えられる。従って、式 (30.47) は、

$$f(B) - f(A) = \int_{\Gamma} \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} \quad (30.48)$$

となる。あるいは、

$$f(B) = f(A) + \int_{\Gamma} \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} \quad (30.49)$$

となる。つまり、スカラー場の勾配を線積分すると、もとのスカラー場(の 2 点間の差)が出てくるのだ。

30.4 ポテンシャルエネルギーと力

勾配と線積分を理解したら、それを使って、物理学で出てくる「仕事」とか「ポテンシャルエネルギー」を完璧に理解できる(というか、勾配と線積分を理解しなければ、これらの物理学的概念を理解することはできない)。

ある物体が、点 A から点 B まで、経路 Γ に沿って移動するとき、物体にかかる力 \mathbf{F} がなす「仕事」 W_{AB} を、

$$W_{AB} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (30.50)$$

と定義する。これは物理学で学んだ(「物理学」をとっていない人は、今ここで学んだ)。

また、ある物体が、原点 O から任意の点 A まで移動するとき、力 \mathbf{F} がなす仕事 W_{OA} が、途中の経路によらず、点 O と点 A の位置だけで決まるような場合、点 A における「ポテンシャルエネルギー」というスカラー場 $U(A)$ を、

$$U(A) = -W_{OA} \quad (30.51)$$

と定義する。これは物理学で学んだ(「物理学」をとっていない人は、今ここで学んだ)。このように、仕事が途中の経路によらないような力のことを、「保存力」と呼ぶ。ポテンシャルエネルギーは、保存力についてのみ考えることのできる概念である。

式 (30.50) と式 (30.51) を組み合わせると、

$$U(A) = - \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (30.52)$$

となる。ここで Γ は、原点 O から点 A に至る任意の経路である。

さて、式 (30.52) の積分経路として、点 O から点 A まで行って、さらに点 B まで行くようなものを考えよう。すると、終着点は B なので、式 (30.52) の左辺は $U(B)$ となり、右辺の線積分は O から A という経路と A から B という経路に分割できる:

$$U(B) = - \int_O^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (30.53)$$

この右辺第一項は、定義から、点 A におけるポテンシャルエネルギー $U(A)$ である。従って、式 (30.53) は次式のようになる:

$$U(B) = U(A) - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (30.54)$$

一方、式 (30.49) で、 f を U とすれば、

$$U(B) = U(A) + \int_A^B \text{grad } U \cdot d\mathbf{r} \quad (30.55)$$

となる (経路 Γ は式 (30.54) と同じにとった)。式 (30.54) と式 (30.55) が、 A から B までの経路によらず恒等的に等しくなるには、

ポテンシャルエネルギーと保存力の関係

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U \quad (30.56)$$

となるしかない。つまり、保存力は、ポテンシャルエネルギーの勾配にマイナスをつけたものに等しい。

ところで、式 (30.56) は、式 (30.27) に似ているではないか! これは偶然ではない。実は、圧力というものはポテンシャルエネルギーに非常に関係が深いのである。

問 760 ポテンシャルエネルギーとは何か?

問 761 位置 (x, y, z) におけるポテンシャルエネルギーが、定数 k_1, k_2, k_3 によって、

$$U = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2) \quad (30.57)$$

と表されるとき、力を求めよ。

30.5 電場・電位・電圧

ポテンシャルエネルギーを理解したら、電磁気学で出てくる電位や電圧という概念を理解できる (というか、ポテンシャルエネルギーを理解しないで電位や電圧を理解することはできない)。電位や電圧は、我々の日常に身近な概念だし、物理だけでなく、化学や生物学でも出てくる、非常に重要な概念である。

ポテンシャルエネルギーを電荷で割ったもの (単位電荷あたりのポテンシャルエネルギー) を「電位」と呼ぶ^{*4}(定義)。電位は ϕ と表されることが多い。

P.160 式 (29.5) で学んだように、空間の中に、電荷 q を持った粒子が \mathbf{v} という速度で運動しているとき、その粒子が受ける力 \mathbf{F} は、

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (30.58)$$

となる。 \mathbf{E} は電場、 \mathbf{B} は磁束密度である。今、この電荷が静止しているか、磁束密度が恒等的に 0 であるような場合を考えよう。このとき、電荷にかかる力には、磁束

密度は関係しない:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (30.59)$$

さらに、 \mathbf{E} も \mathbf{B} も時間的に変動しない状況を考える^{*5}。このような場合、力は保存力になる (証明はしない)。従って、式 (30.56) によって、

$$q\mathbf{E} = -\text{grad } U \quad (30.60)$$

となる。この両辺を q で割る。 q は定数とみなせるので、 grad の中に入れることができる:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \frac{U}{q} \quad (30.61)$$

定義より、 U/q が電位であり、これを ϕ と書くと、式 (30.61) は、

電位と静電場の関係

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi \quad (30.62)$$

となる。ところで、式 (30.48) で f を ϕ と置き換えれば、

$$\phi(B) - \phi(A) = \int_A^B \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{r} \quad (30.63)$$

となる。この式に式 (30.62) を代入すれば、

$$\phi(B) - \phi(A) = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (30.64)$$

となる。つまり、(電場が時間変動していなければ) 電場を線積分したもの (にマイナスをつけたもの) が、2 点間の電位の差になる。電位の差のことを「電圧」という。

小中学校のレベルでは、電流を水流の量、電圧を高さ (の差) に例えて感覚的に説明することが多い。しかし、そのような説明は自転車の補助輪のようなものである。補助輪付きの自転車が自転車としての能力 (スピードや機動性) を発揮できないように、このような感覚的な説明では科学の概念を広く応用することはできない。科学の概念は、数学の基礎があって初めて正確に定義され、その結果、大きな威力を持つのである。

問 762 電位とは何か? 電圧とは何か?

*4 電位を静電ポテンシャルと呼ぶこともある。

*5 時間的に変動する場合は式 (30.61) が成り立たない。

30.6 解答

答 750

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 2y^3 + z) = 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 2y^3 + z) = 6y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + 2y^3 + z) = 1$$

$$\text{従って, } \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2x, 6y^2, 1)$$

答 751 $\mathbf{U}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ とおく。 $u = xyz, v = x + y + z, w = 2x + yz$ である。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} xyz = yz$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x + y + z) = 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (2x + yz) = y$$

$$\text{従って, } \nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = yz + 1 + y$$

答 752 $\mathbf{U}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ とおく。 $u = xyz, v = x + y + z, w = 2x + yz$ である。

$$\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} (2x + yz) - \frac{\partial}{\partial x} (x + y + z) = z - 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} xyz - \frac{\partial}{\partial x} (2x + yz) = xy - 2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (x + y + z) - \frac{\partial}{\partial y} xyz = 1 - xz$$

$$\text{従って, } \nabla \times \mathbf{U} = (z - 1, xy - 2, 1 - xz)$$

答 753

(1) 略 (全微分公式そのもの。)

(2) 略 (小問 (1) の結果を書き換えるだけ。わからない人は、式 (30.13) の右辺を、式 (30.2), 式 (30.12) で書き換えてみよ。式 (30.11) が得られるだろう。)

答 754

(1) $\text{grad } f = (2, 1, 3)$

(2) $f(x, y, z) = p$ とすると (p は定数), $2x + y + 3z = p$ となるが、これは平面をあらわす方程式である。

(3) 上記の平面において、 $(2, 1, 3)$ は法線ベクトルであり、これは小問 (1) で求めた $\text{grad } f$ に一致する。従って $\text{grad } f$ はこの平面に垂直。

答 755

(1) $\text{grad } f = (2x, 2y, 2z)$ (2) $f(x, y, z) = d$ とすると (d は正の定数),

$$x^2 + y^2 + z^2 = d$$

となるが、これは半径 \sqrt{d} の球面 (原点中心) をあらわす方程式である。

(3) 球面の中心から球面上の点を結ぶベクトルは、その点で球面に垂直である。従って、原点中心の球面に点 (x, y, z) があるならば、ベクトル (x, y, z) はその球面に垂直である。従って、それを定数倍した (ax, ay, az) もその球面に垂直である。

(4) $\text{grad } f = (2x, 2y, 2z)$ なので、前小問より、これは球面 S と垂直。

答 756 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。

(1)

$$\text{grad } f = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right)$$

(2) $f(x, y, z) = d$ とすると (d は正の定数)

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{d^2}$$

これは原点中心で半径 $1/d$ の球面をあらわす方程式である。

(3) (1) で示した $\text{grad } f$ は、 (x, y, z) を $-1/r^3$ 倍したものである。前問 (3) において a を $-1/r^3$ とすればわかるように、 $\text{grad } f$ は球面に垂直である。

答 757 このとき、 $|\overrightarrow{PQ}| = |dr| = dr$ であり、 $\cos \theta = 1$ なので、式 (30.14) より $df = |\text{grad } f| dr$ となる。両辺を dr で割れば、与式を得る。

答 758 略。

答 759 xy 平面上の極座標では, 例 30.3 と同様に,

$$\begin{aligned}x &= \cos \theta \\y &= \sin \theta \\dx &= -\sin \theta d\theta \\dy &= \cos \theta d\theta \\x - y &= \cos \theta - \sin \theta \\x + y &= \cos \theta + \sin \theta\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}\mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} &= (x - y, x + y) \cdot (dx, dy) \\&= (x - y)dx + (x + y)dy \\&= (\cos \theta - \sin \theta)(-\sin \theta d\theta) + (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta d\theta) \\&= \sin^2 \theta d\theta + \cos^2 \theta d\theta = d\theta\end{aligned}$$

となる。従って,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$$

答 760 略。

答 761 略解: 式 (30.56) を計算するだけ。答えは,

$$\mathbf{F} = (-k_1x, -k_2y, -k_3z)$$

答 762 略。

一問一答

- 積分は小さくわけたやつを足したもので面積のことだと認識してましたが, 違うんですね。

... 「違う」というよりも, より広い(普遍的な)概念だ, ということです。学問は, キーになる考え方(公理や法則)を, どんどん普遍的な形に作り替えることで, シンプルで強い理論体系を作るのです。その過程で, いろんな考え方が見直され「再定義」されます。積分という考え方の原始的な出発点は, 確かに「面積」だったかもしれませんが, しかし, いつまでもそれに囚われてはダメなのです。

- ベクトル解析は難しいけど, 実用的らしいのでがんばります。

... ベクトル解析は見た目は難しそうかもしれないけど, そういうときほど基礎が大切。微分の定義と積分の定

義がきちんと頭に馴染んでいれば, それをちょっと拡張するだけで, あとは慣れの問題です。慣れるとわかるし, 楽しいですよ。でも, 微分・積分をまだ高校数学の感覚(「傾き」とか「面積」とか「微分の逆が積分」とか)で考えていると(そういうのは高校数学が得意だった人にも多い), いつまでたってもベクトル解析は理解できません。

- $\text{grad } f$ は f が最も大きく変化する向きをもったベクトルだということでしたが, では, f が最大となる点での $\text{grad } f$ はどうなるのですか?

... 良い質問です。 f が最大(極大)の場所では $\text{grad } f = (0, 0, 0)$ になります。どちらに進んでも f は変化しません。ちょうど, 1 変数関数 $y = f(x)$ の最大(極大)では $f' = 0$ となるのと同じです。

- 私の「積分」のイメージは, 何かしらの大きなものを原形をとどめないくらいに細かくして足し合わせる感じです。この考え方でも面積分・体積分・線積分は大丈夫でした。

... それで OK。

第31章

ベクトル解析3

31.1 フラックス

単位時間あたり、単位面積あたりを通過する物理量を フラックス (flux) もしくは流束^{*1}という。すなわち、面積 A の面を時間 Δt の間に通過する物理量が X のとき、そのフラックスは、

$$F = \frac{X}{A \Delta t} \quad (31.1)$$

である (定義)。この式を変形すれば、

$$X = F A \Delta t \quad (31.2)$$

である。つまり、ある面を通過する物理量は、フラックスと面積と時間の積である。

例 31.1 水の蒸発を考えよう。面積 A の水面から時間 Δt の間に量 $X_{\text{H}_2\text{O}}$ の水が蒸発するとしよう。量は質量で表しても、体積で表しても、モル数で表してもよい。量 X の水が面積 A の面 (水面) を通過するのだから、この水面における水 (水蒸気) のフラックス $F_{\text{H}_2\text{O}}$ は、

$$F_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{X_{\text{H}_2\text{O}}}{A \Delta t} \quad (31.3)$$

である。(例おわり)

問 763 フラックスとは何か?

問 764 (1) 面積 400 m^2 の水田から、 5 h (5 時間) の間に、蒸発によって 200 kg の水が失われた。式 (31.3) にもとづいて水蒸気フラックス $F_{\text{H}_2\text{O}}$ を求めよ。単位は、 $\text{kg h}^{-1} \text{ m}^{-2}$ とせよ。

(2) 蒸発による水蒸気フラックスが

$F_{\text{H}_2\text{O}} = 0.1 \text{ kg h}^{-1} \text{ m}^{-2}$ であるとき、6 時間の間に、面積 200 m^2 の水田から失われる水量は何 kg か?

(3) 小問 (1) について、質量を体積に換算して、この

$F_{\text{H}_2\text{O}}$ を、 $\text{m}^3 \text{ h}^{-1} \text{ m}^{-2}$ という単位で求めよ^{*2}。ヒント: 水 1 kg は何 m^3 か?

(4) 小問 (3) の結果を、 mm h^{-1} という単位で求めよ

(5) 小問 (1)(3) の状況で、灌漑水の供給は無く、地下への水の浸透もないとすれば、水田に張ってあった水の水面の高さは、平均的に 1 時間でどのくらい下がったか?

前問でわかったように、水のフラックスは、量を水の体積で表すと、距離/時間という次元 (つまり速さの次元) で表されることに注意しよう。これを mm h^{-1} で表現すると、よくニュースで言われる「1 時間あたり 100 mm の猛烈な雨が降っています」というような表現になる。

問 765 (液体の) 水が速度 v で流れているとき、その流れに垂直で面積 A の面を時間 Δt の間に通過する水の体積 X は、

$$X = v A \Delta t \quad (31.4)$$

であることを示せ (ヒント: 水は Δt の間に $v \Delta t$ だけの距離を進む。この距離を高さとし、底面積を A とする水柱が、この面を通過する)。その結果から、この流れによるフラックス F は、量を体積であらわすならば、

$$F = v \quad (31.5)$$

となることを示せ。すなわち、(液体の) 水の流れでは、フラックスは流れの速度 (流速) そのものとみなしてさしつかえない。

31.2 面の向きとフラックス

さて、フラックスは、どういう向きの面で考えるかが重要である。それを以下の例で考えよう:

*1 「流速」ではない。

*2 これは m h^{-1} という単位 (つまり速度の単位) に等しい。

例 31.2 光は、エネルギーを運ぶ。実際、我々がお日様にあたると暖かいのは、太陽光が太陽から我々の体にエネルギーを運んでくるからである。つまり、光はエネルギーのフラックスである。

日射のエネルギーフラックス F は、地球の大気上端で、おおよそ $F = 1370 \text{ W m}^{-2}$ である*3*4。ただしこれは、日射に対して垂直な面を通過するフラックスである。もし、日射に対して面が平行であれば、日射はその面を通過することはないので、エネルギーフラックスはゼロである（図 31.1 右）。（例おわり）

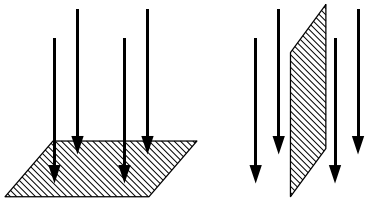


図 31.1 面が受けるフラックス。物理量が流れて来る方向と面が垂直ならば、面は物理量をもろに受け、フラックスは最大になる（左）。物理量が流れて来る方向と面が平行ならば、面は物理量を全く受けずにやり過ごし、フラックスはゼロになる（右）。

では、面の向きとフラックスの関係を一般的に考えてみよう。図 31.2 において、ある物理量の流れ（下向きの矢印）の中に、面 0 と面 1 があるとすると。面 0 は、流れて来る方向に垂直である。面 1 は、面 0 から θ だけ傾いているとする。面 0 は面 1 を流れ方向に正射影したのになっているとする。面 0、面 1 の面積をそれぞれ A_0 、 A とする。面 0、面 1 における物理量のフラックスを、それぞれ F_0 、 F とする。

図から明らかに、

$$A_0 = A \cos \theta \quad (31.6)$$

である。また、図から明らかに、面 0 を通過する物理量と面 1 を通過する物理量は互いに等しい。それを X としよう。さて、式 (31.2) を面 0、面 1 についてそれぞれ考えれば、

$$\text{面 0 について: } X = F_0 A_0 \Delta t \quad (31.7)$$

$$\text{面 1 について: } X = F A \Delta t \quad (31.8)$$

*3 W はワットという単位（SI 組み立て単位）で、 J s^{-1} である。「1 秒間あたり 1 J のエネルギー」が 1 W である。

*4 ただし厳密には地球の公転軌道は円形ではなく楕円形なので、地球と太陽の距離は 1 年の間で変化する。そのため、この値も微妙に変化する

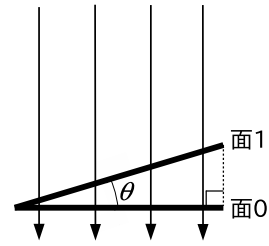


図 31.2 傾いた面が受けるフラックス。面 0、面 1 を真横から見ているので、各面は直線に見える。

となる。従って、 $F_0 A_0 = F A$ となり、従って、

$$F = \frac{A_0}{A} F_0 \quad (31.9)$$

となる。式 (31.6)(31.9) より、

$$F = F_0 \cos \theta \quad (31.10)$$

となる。この式は重要な式である。フラックスは、面が流れに垂直 ($\theta = 0$) であるときに最大で、傾くにつれて、傾き θ の余弦（コサイン）に比例して小さくなるのがわかる*5。

ここで面 1 の「傾き」 θ を定義するとき、まず流れに垂直な面（面 0）を考え、次に面 0 と面 1 とのなす角を考えた。これは二度手間であり、もっと複雑な状況になると不便である。そこで、もっとシンプルに「傾き」を表現しよう：図 31.3 のように、面 1 の法線ベクトル \mathbf{n} と*6、流れて来る方向のなす角は、面 0 と面 1 とのなす角 θ に等しい。そこで、改めてこれを式 (31.10) の中の θ の定義とすればよいのだ。こうすれば、わざわざ面 0 を考える必要は無い。

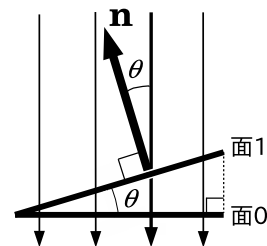


図 31.3 傾いた面が受けるフラックス。図 31.2 と同じ状況だが、面 1 の向きを、面 1 の法線ベクトルで表現する。

*5 地球上で、低緯度地域が暑く、高緯度地域が寒いのは、このせいである。

*6 \mathbf{n} の「n」は normal vector の頭文字からとっている。normal とは「正常な」という意味の他に「垂直な」という意味がある。辞書で調べてみよ。

問 766 北緯 30 度にある水田に今年も秋がやってきた。この地点では秋分の日正午に、太陽天頂角（鉛直上向きと太陽方向のなす角）は 30 度になる*7。このとき、

- (1) 日射は大気によってほとんど減衰されないとすると*8、この水田にあたる日射のエネルギーフラックスは約 1190 W m^{-2} であることを示せ。
- (2) このエネルギーが全て水の蒸発に使われるとしたら、蒸発による水のフラックスはどのくらいになるか？ $\text{kg s}^{-1} \text{ m}^{-2}$ と、 mm s^{-1} の両方の単位で答えよ。水の蒸発の潜熱は、 2.5 MJ kg^{-1} である*9。

ところがここで、慎重な人は、「ちょっと待て！ 面 1 の法線ベクトルは、図 31.3 の \mathbf{n} だけでなく、その逆向きにもあるはずだ。なら角 θ も 2 通りありえるぞ？」と思っただろう。実際、図 31.4 からわかるように、面 1 の法線ベクトルは、 \mathbf{n} と \mathbf{n}' の 2 つの方向がありえる。それぞれと「流れてくる方向とのなす角」は、 θ と θ' の 2 通りになる。図から明らかに、 $\theta' = \pi - \theta$ なので、もし式 (31.10) の中の θ のかわりに θ' を入れてみると、符号が反転してしまう。すなわち、

$$F_0 \cos \theta' = -F_0 \cos \theta \quad (31.11)$$

つまり、フラックスがマイナスになってしまう！

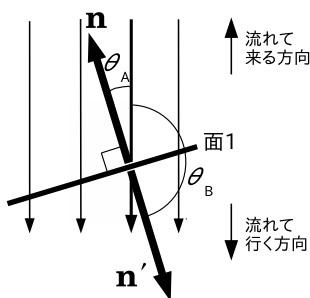


図 31.4 傾いた面が受けるフラックス。図 31.2、図 31.3 と同じ状況だが、面 1 の法線ベクトルが 2 つある！ さてどうする？

「そんなひねくれたことを考える方が悪いのだ、素直に図 31.2 や図 31.3 のように考えれば済む話じゃないか？」と思う人もあろう。しかし、これは本質的な問題である。例えば、図 31.5 のように、流れの向きが逆になったらどうだろう？ その場合、面を通過する「単位面積当

たり単位時間あたり通過する物理量」は変わらないけど、状況は明らかに違う。単に「通過する」だけでなく、その向き、つまり「物理量はその面のどちら側からどちら側へ通過するのか」も、大切な情報である。

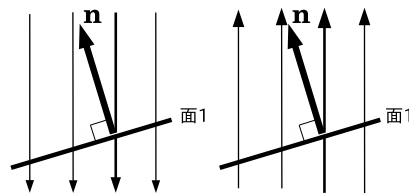


図 31.5 流れの方向が逆だとどうなる？

そこで、世界を「面 1 より上側の領域」と「面 1 より下側の領域」に 2 分すると、図 31.5 左の状況では、物理量は「上側」から「下側」に移動する。すると、「上側」は物理量を失い、「下側」は物理量を獲得する。図 31.5 右では、それが逆である。このような状況（各領域の収支）を区別して表現したいのだ。そのためには、面に「内側」と「外側」を定義すればよい。そして「内側」が獲得するようなフラックスを正、「内側」が失う（「外側」が獲得する）ようなフラックスを負と定義すればよい。面 1 の下側を「内側」と定義すれば、図 31.5 左図で表される流れは外側から内側に向かうので正のフラックスを作り、図 31.5 右図の流れは負のフラックスを作る。

そのような定義を簡潔に行うには、法線ベクトルを使うのだ。すなわち、面の法線ベクトルを、「内側から外側へ行く方向」に定めるのだ。図 31.4 で言えば、面 1 の下側を「内側」としたいときは面 1 の法線ベクトルは \mathbf{n} であり、面 1 の上側を「内側」としたいときは面 1 の法線ベクトルは \mathbf{n}' となる。つまり、 \mathbf{n} と \mathbf{n}' は、同じ面の法線ベクトルのように思っていたが、面の内外（表裏）まで区別するならば、互いに違う面（同じ場所にあるけれど内外が互いに逆である面）の法線ベクトルなのだ！

これで、「面の向き」を、その内側・外側の区別も含めて、法線ベクトルで統一的に表現できることがわかった。

31.3 流れの向きとフラックス

これまで主に面の方向について考えてきたが、「流れの方向」も、図 31.2 や図 31.3 のように真上から真下（もしくはその逆）に向かうような単純な場合だけでなく、様々な場合があり得る。その取り扱いについて考えよう。

*7 それかわからない人は数学リメディアル教材参照。
 *8 実際は晴天でも 20 パーセント程度は減衰する。
 *9 MJ は「メガジュール」、つまり 10^6 J である。

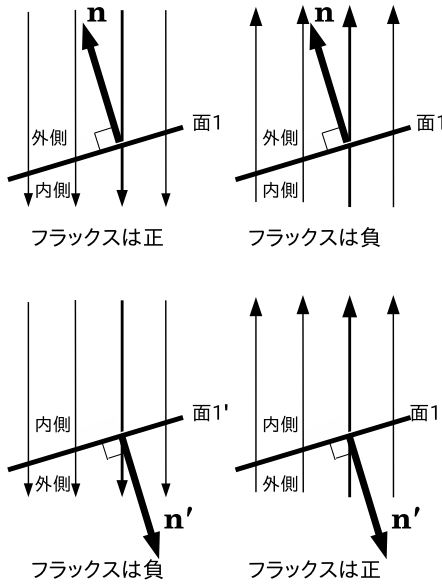


図 31.6 フラックスの符号のまとめ。一見、面 1 と面 1' は同じようだが、内外の区別が逆なので、互いに違う面とみなす。n と n' はそれぞれ面 1 と面 1' の法線ベクトル。

問 767 暴風雨がやってきた。南から吹いてくる猛烈な風のせいで、雨粒が真上からでなく斜め上から降ってくる (図 31.7)。その方向の天頂角を測ったら 45 度だった。地上に水平に置かれた雨量計は、1 時間あたり 20.0 mm という雨量を示している。

- (1) 雨が降ってくる方向に垂直な面における、雨による水のフラックスは 28.3 mm h^{-1} であることを示せ。
- (2) 山の南向き斜面 (傾斜 30 度) が受ける、雨による水のフラックスは 27.3 mm h^{-1} であることを示せ。
- (3) 山の北向き斜面 (傾斜 30 度) が受ける、雨による水のフラックスは 7.3 mm h^{-1} であることを示せ。

ヒント: 式 (31.10) を使う。小問 (1) で求まるのが F_0 である。

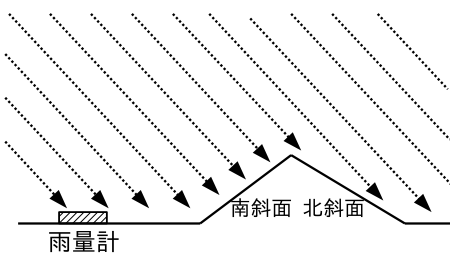


図 31.7 斜めに降ってくる雨。明らかに風上側の斜面 (ここでは南斜面) のほうが風下側の斜面 (ここでは北斜面) よりもたくさんの雨を受ける。

こういう問題を考えると、いちいち、面の向きと流れの向きの相対関係を考えねばならないので面倒くさい。それを簡便にするために、フラックスの考え方を拡張しよう: 流れに垂直な面を通るフラックスを F_0 とし、「大きさ F_0 を持ち、かつ、物理量が流れて行く方向を向いている幾何ベクトル \mathbf{F} 」を考える。すなわち、

$$\mathbf{F} = F_0 \mathbf{e}_F \tag{31.12}$$

とする。ここで \mathbf{e}_F は物理量が流れて行く方向 (図 31.8 参照) の単位ベクトルである。式 (31.12) のような幾何ベクトル \mathbf{F} を、改めて「フラックス」と言うこともある。この幾何ベクトル \mathbf{F} が、フラックスのもともとの定義 (式 (31.1)) とどのように整合するか、調べてみよう:

面積 A , 単位法線ベクトル \mathbf{n} をもつ面を、時間 Δt に通過する物理量 X は、式 (31.2) (31.10) より、

$$X = FA\Delta t = F_0 A (\cos \theta) \Delta t \tag{31.13}$$

である。ここで θ は、物理量が流れて来る方向 (図 31.8 参照) と面の法線ベクトルがなす角である。ところが、

$$\cos \theta = -\mathbf{e}_F \cdot \mathbf{n} \tag{31.14}$$

なので (図 31.8 より、 \mathbf{e}_F が流れて行く方向なら $-\mathbf{e}_F$ は流れて来る方向である), 式 (31.12), 式 (31.13), 式 (31.14) より、

$$X = F_0 A (-\mathbf{e}_F \cdot \mathbf{n}) \Delta t = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} A \Delta t \tag{31.15}$$

となる。従って、この面でのフラックス F は、式 (31.1) より

$$F = \frac{X}{A \Delta t} = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \tag{31.16}$$

となる。この式は、式 (31.10) の拡張である。

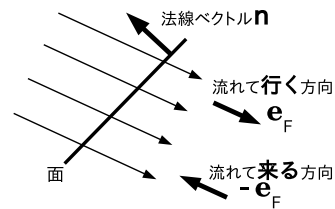


図 31.8 流れて来る方向と流れて行く方向。

31.4 内積による面積分

数学リメディアル教材では、図 31.9 のような農場に降る雨量を考えた。

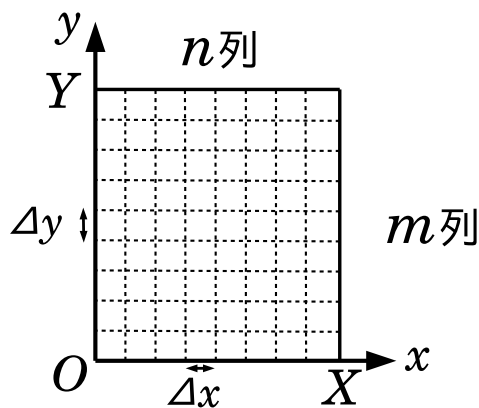


図 31.9 君の農場

その際、単位時間あたりの雨量 R は

$$R = \int_0^Y \int_0^X F(x, y) dx dy \quad (31.17)$$

となった ($F(x, y)$ は位置 (x, y) における単位面積当たり単位時間あたりの雨量。 X, Y はそれぞれ畑の横と縦の長さ)。式 (31.17) の右辺は、降雨による水のフラックスの面積分である。

さて、先に見たように、風が強いと雨はまっすぐには落ちてこない。農場が平坦でなければ、風上に向けた小農地は風下に向けた小農地よりも雨をたくさん受ける。そのような状況では、上の理論は修正されねばならない。すなわち、 x 方向に i 番め、 y 方向に j 番めにある小農地 (面積 ΔS) に、単位時間に降る雨量 $\Delta R(x_i, y_j)$ は、式 (31.15) より、

$$\Delta R(x_i, y_j) = -\mathbf{F}(x_i, y_j) \cdot \mathbf{n} \Delta S \quad (31.18)$$

である。ここで、 $\mathbf{F}(x, y)$ は、点 (x, y) における、降雨による水のフラックス (をベクトルで表現したもの) であり、 \mathbf{n} は各点における地面の単位法線ベクトルである。このとき ΔS はもはや $\Delta x \Delta y$ であるとは限らない。なぜなら地面は平坦とは限らないからである ($\Delta x \Delta y$ は斜面を水平面に投影した面積)。

ΔS を無限に小さくして式 (31.18) を畑全体で足しあわせると、式 (31.17) は、

$$R = - \int_{\text{農場}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (31.19)$$

となる。ここで積分記号のかたわらに「農場」とあるのは、「農場全体にわたって小農地を足し算する」という意味である。

31.5 発散

第 30.1 節で学んだように、3次元ユークリッド空間のベクトル場

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (31.20)$$

において、以下のような演算 $\text{div } \mathbf{U}$ を、 \mathbf{U} の「発散 (divergence)」と呼ぶ：

$$\text{div } \mathbf{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (31.21)$$

これは明らかにスカラー場である。勾配はスカラー場から新たなベクトル場を作る演算だったが、発散はベクトル場から新たなスカラー場を作る演算である。この意味については後回しにして、とりあえず発散の計算に慣れよう。

例 31.3 $\mathbf{U} = (x^2, y^2, z^2)$ のとき、 $\text{div } \mathbf{U} = 2x + 2y + 2z$

問 768 以下を示せ。

- (1) $\mathbf{U} = (xy, yz, zx)$ のとき、 $\text{div } \mathbf{U} = x + y + z$
- (2) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ として、

$$\mathbf{U} = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) \quad (31.22)$$

のとき、 $\text{div } \mathbf{U} = 0$ 。ただし、 $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ とする。

さて、発散の意味を考えよう。

3次元ユークリッド空間の中を水が流れているとして、各場所での水流の速度を

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (31.23)$$

とする。もちろんこれはベクトル場である。

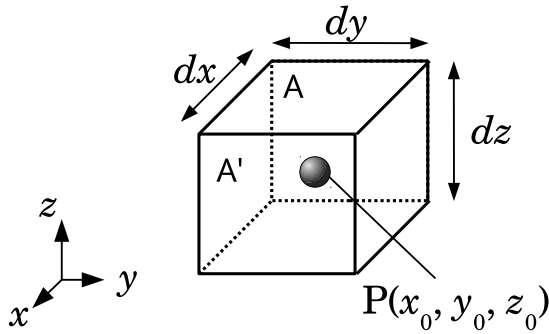


図 31.10 点 P , すなわち点 (x_0, y_0, z_0) を囲む直方体

ある点 $P(x_0, y_0, z_0)$ と、その点を囲むような、以下のような小さな直方体を考える (図 31.10) :

$$x_0 - \frac{dx}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{dx}{2}$$

$$y_0 - \frac{dy}{2} \leq y \leq y_0 + \frac{dy}{2}$$

$$z_0 - \frac{dz}{2} \leq z \leq z_0 + \frac{dz}{2}$$

dx, dy, dz はいずれも、ゼロに近い微小量である。この直方体を構成する 6 つの面について、

$$x = x_0 - dx/2 \text{ の面を面 } A$$

$$x = x_0 + dx/2 \text{ の面を面 } A'$$

$$y = y_0 - dy/2 \text{ の面を面 } B$$

$$y = y_0 + dy/2 \text{ の面を面 } B'$$

$$z = z_0 - dz/2 \text{ の面を面 } C$$

$$z = z_0 + dz/2 \text{ の面を面 } C'$$

というふうに名付けよう。

問 769 このとき、

- (1) この直方体の体積 dV を、 dx, dy, dz を使ってあらわせ。
- (2) 面 X (X は A, A', B, B', C, C' のいずれか) を通ってこの直方体に単位時間内に流れ込む水の量を $f(X)$ と書こう。 $f(A)$ は、以下のように書けることを示せ :

$$f(A) = u\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) dy dz \quad (31.24)$$

ただし、面 A は十分に小さく、その付近では u はほぼ一定であるとみなす。

- (3) また、面 A' を通ってこの直方体に単位時間内に流

れこむ水の量は、以下のように書けることを示せ :

$$f(A') = -u\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) dy dz \quad (31.25)$$

ただし、面 A' も十分に小さく、その付近では u はほぼ一定であるとみなす。マイナス符号に注意せよ。

- (4) この直方体に関して、単位時間内に面 A と面 A' を介する水の正味の流入量*10は、

$$\begin{aligned} f(A) + f(A') \\ = \left\{ u\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) - u\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) \right\} dy dz \end{aligned} \quad (31.26)$$

となることを示せ。

- (5) この式は、次のように近似できることを示せ。

$$f(A) + f(A') = -\frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz \quad (31.27)$$

- (6) 同様に、単位時間内に面 B と面 B' を介する水の正味の流入量は、次のように近似できる:

$$f(B) + f(B') = -\frac{\partial v}{\partial y} dx dy dz \quad (31.28)$$

同様に、単位時間内に面 C と面 C' を介する水の正味の流入量は、次のように近似できる:

$$f(C) + f(C') = -\frac{\partial w}{\partial z} dx dy dz \quad (31.29)$$

従って、単位時間内に 6 つの面 A, A', B, B', C, C' を介してこの直方体に流入する水は、正味で、

$$\begin{aligned} f(A) + f(A') + f(B) + f(B') + f(C) + f(C') \\ = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx dy dz \end{aligned} \quad (31.30)$$

となることを示せ。

- (7) この式は、次式のように書けることを示せ :

$$\begin{aligned} f(A) + f(A') + f(B) + f(B') + f(C) + f(C') \\ = -(\operatorname{div} \mathbf{U}) dV \end{aligned} \quad (31.31)$$

ここで、 dV は、直方体の体積である。

*10 入った量から出た量を差し引いた量を正味 (net) の量という。

このように、 $-\operatorname{div} \mathbf{U}$ は、単位時間あたり、単位体積あたりに流入する正味の水の量である。符号を逆にすると、 $\operatorname{div} \mathbf{U}$ は、単位時間あたり、単位体積あたりから流出する正味の水の量である。水がその直方体からわきだしてくるイメージである。だからこれを「発散」というのだ*11。

流れ出す量の方が多いとき（つまり発散が正の値のとき）、その場所では流れは「発散」している、と言う。「発散」(divergence) の対義語は「収束」(convergence) である。すなわち、流れ込む量の方が多いとき（つまり発散が負の値のとき）、その場所では流れは「収束」している、と言う*12。

ここでひとつ注意。関数や数列の極限を考える時にも、「発散」とか「収束」という言葉を使う。例えば、数列

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \quad (31.32)$$

は、 $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。また例えば、関数

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (31.33)$$

は、 $x \rightarrow 0$ で発散する。しかし、これらの収束や発散は、ベクトル場に関する収束や発散とは異なる概念である。いわば、同音異義語である。

31.6 拡散方程式

ここまで学んだことを使って、以前に学んだ拡散方程式を拡張してみよう。まず、拡散方程式の例として P.127 で熱伝導方程式を学んだ時のことを振り返る。熱は、温かい部分から冷たい部分に向けて伝わることから、位置 x を、単位時間あたりに x の正の方向に通過する熱

のフラックス $J(x, t)$ が、

$$J = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (31.34)$$

と書ける。 T は温度である。 k を熱伝導率と呼ぶのだった(式(26.52))。これをフーリエの法則と呼んだ。

これは 1 次元の線上での熱伝導に限定していたが、話を 3 次元空間に拡張すると、ある点の付近を流れる熱フラックスは、その点の近傍で最も高温のところから最も低温のところに向かう向きであることが想像できる。「勾配」の性質を思い出せば、そのような向きは、 $-\operatorname{grad} T$ で表現できることがわかるだろう。また、その方向に沿った「 T の微分係数」は、 $\operatorname{grad} T$ の大きさに等しい。従って、

$$\mathbf{J} = -k \operatorname{grad} T \quad (31.35)$$

となる。ここで \mathbf{J} がベクトル(太字)になったことに注意しよう。以前は熱フラックスを 1 次元に限定していたから細字でよかったが、ここでは熱フラックスは 3 つの成分を持つベクトルになったのである。式(31.35)は式(31.34)を拡張した式であり、これを改めてフーリエの法則と呼ぶ。

さて、1 次元の熱伝導では、熱フラックス J があるときに、位置 x での長さ Δx の部分に時間 Δt の間に流入する正味の熱量 q は、

$$q = -\frac{\partial J}{\partial x} \Delta x \Delta t \quad (31.36)$$

と書かれた(式(26.56))。この式を 3 次元に拡張するのはたやすい。いま、ある位置 (x, y, z) を取り囲む微小な立方体 Ω を考え、その体積を ΔV とする。熱フラックス \mathbf{J} を水のフラックスと似せて考えれば、式(31.31)のアイデアを使うと、 Ω に流入する正味の熱量 q は、

$$q = -\operatorname{div} \mathbf{J} \Delta V \Delta t \quad (31.37)$$

となる。これが式(31.36)を 3 次元に拡張した式である。

また、加えられた熱量 q に比例して微小立方体 Ω の温度が変わるので、

$$q = C \Delta V \{T(x, t + \Delta t) - T(x, t)\} \quad (31.38)$$

となる。ここで C は物質の単位体積あたりの熱容量である。この式は、式(26.57)の拡張である。

*11 もっとも、現実の水は、ほとんど圧縮されないで、ある場所に流れ込む量と、流れ出す量は、つりあっている。そのため、正味の流入量はほとんどゼロである。従って、現実の水では、ほとんど常に、どんな流れの中にあっても、 $\operatorname{div} \mathbf{U} = 0$ であると言ってよい。

*12 気象学や地理学で、「熱帯収束帯」(Intertropical Convergence Zone: ITCZ) という概念がある。地球の赤道付近で、南北から風が集まって来るような場所のことである。ここでは、水平方向の風のベクトル場の発散が負の値になる。つまり水平面内で風が収束する。収束する風は行き場を失って上空に上がっていく。そうやって上昇気流が発生し、雲ができて、雨が降る。熱帯地方や砂漠の雨季・乾季の変化では、この ITCZ が重要な働きをしている。

(1) 式 (31.37), 式 (31.38) を用いて次式を示せ:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} \quad (31.39)$$

(2) 式 (31.35), 式 (31.39) を用いて次式を示せ:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) \quad (31.40)$$

式 (31.40) は式 (26.62) の拡張である。これが 3 次元の物体の熱伝導に関する支配方程式である。

ここでは熱の移動を考えたが、気体や液体の中での物質の拡散にも、同じような理論が成り立つ。例えば、物質は、濃度の高いところから低いところに向かって拡散する。つまり、

—— フィック (Fick) の法則 ——

拡散によるフラックスを \mathbf{J} とし、濃度を c とすると、

$$\mathbf{J} = -K \operatorname{grad} c \quad (31.41)$$

という法則が多くの場合に成り立つ。 K は拡散係数と呼ばれる量である。式 (31.35) で示したフーリエの法則は、フィックの法則の一例と言える。また、物質量の濃度の時間変化は、そこに流入するフラックスで決まる。すなわち、

—— 連続の式 (質量保存則) ——

フラックスを \mathbf{J} とし、濃度を c とすると、

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} \quad (31.42)$$

という式が一般的に成り立つ (フラックス \mathbf{J} は必ずしも拡散によるものでなくてもよい)。熱の場合にこれに対応するのが式 (31.39) である (左辺の C を微分の中に入れて、 CT を単位体積あたりの熱量、つまり「熱の濃度」と考えればよい)。

フィックの法則と連続の式を組み合わせると、次のような方程式が得られる:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(K \operatorname{grad} c) \quad (31.43)$$

これが 3 次元の拡散方程式である。特に、 K が位置によらない定数だとすると、式 (31.43) は次式のようになる:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = K \operatorname{div}(\operatorname{grad} c) \quad (31.44)$$

問 771

(1) フィックの法則とは何か?

(2) 連続の式とは何か?

31.7 ラプラシアン

式 (31.44) の右辺に、 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} c)$ という演算が出てきた。これについて考えよう。

問 772 スカラー場 $f(x, y, z)$ について、

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot \nabla f \quad (31.45)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (31.46)$$

となることを示せ。

式 (31.46) は、形式的には、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f \quad (31.47)$$

と書くことができる。この演算子

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (31.48)$$

を、「ラプラス演算子」とか「ラプラシアン」と呼び、 ∇^2 とか、 Δ と書く。ラプラシアンは、ナブラ演算子とは違って、 x 成分、 y 成分、 z 成分などが無いから、 Δ をベクトル的に太字で書く必要は無い。

上の導出過程から明らかに、

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}) = \nabla \cdot \nabla = \Delta \quad (31.49)$$

である。従って、式 (31.44) は以下のように書ける:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = K \Delta c \quad (31.50)$$

また、P.60 式 (20.52) のようなラプラス方程式は、

$$\Delta f = 0 \quad (31.51)$$

と書ける。同様に、P.118 式 (25.69) で示した 3 次元波動方程式は、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \psi \quad (31.52)$$

と書ける。

問 773 定常状態では、拡散方程式 (式 (31.50)) はラプラス方程式になることを示せ (定常状態とは、場が時間に依存しないこと)。

さて、もう気づいた人も多いと思うが、ナブラ演算子やラプラシアンは、線型写像（線型微分演算子）である。例えば、ナブラ演算子をスカラー場に作用させる演算、つまり gradient（勾配）が線型写像であることを証明してみよう：微分可能なスカラー場 $f(x, y, z)$ と $g(x, y, z)$ があるとする。任意の $a, b, \in \mathbb{R}$ について、

$$\begin{aligned}\nabla(af+bg) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(af+bg), \frac{\partial}{\partial y}(af+bg), \frac{\partial}{\partial z}(af+bg) \right) \\ &= \dots = a \left(\frac{\partial}{\partial x}f, \frac{\partial}{\partial y}f, \frac{\partial}{\partial z}f \right) + b \left(\frac{\partial}{\partial x}g, \frac{\partial}{\partial y}g, \frac{\partial}{\partial z}g \right) \\ &= a\nabla f + b\nabla g\end{aligned}$$

となる。これは P.69 式 (21.12) の性質を満たす。従って、gradient は線型写像である。

問 774 以下は線型写像であることを示せ：

- (1) divergence.
すなわち、ベクトル場 \mathbf{U} に関して $\nabla \cdot \mathbf{U}$ 。
- (2) ラプラシアン。
すなわち、スカラー場 f に関して Δf 。

31.8 解答

答 763 略。

答 764 略解：

- (1) $0.1 \text{ kg h}^{-1} \text{ m}^{-2}$
- (2) 120 kg
- (3) 水の密度は（温度にもよるが），

$$1\text{g/cm}^3 = \frac{1 \times 10^{-3} \text{ kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} = 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

である。従って、0.1 kg の水の体積は、

$$\frac{0.1 \text{ kg}}{1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} = 10^{-4} \text{ m}^3$$

すなわち、 $0.0001 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1} \text{ m}^{-2}$ 。

- (4) m^3 と m^{-2} は約分できて、 m になるので、 $0.0001 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1} \text{ m}^{-2} = 0.0001 \text{ m h}^{-1}$ 。また、 $1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$ なので、 $0.0001 \text{ m h}^{-1} = 0.1 \text{ mm h}^{-1}$ 。これを (1) の結果と比較してみよう。単位は違うけど、数値は一致しているではないか！これは、1 kg の水を 1 m^2 の面に広げると厚さが 1 mm になることが原因である。これは便利なので覚えておこう。

- (5) 0.1 mm。

答 765 略。

答 766

- (1) 式 (31.10) より、 $1370 \times \cos(\pi/6) = 1190 \text{ W m}^{-2}$
- (2)

$$\frac{1190 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2}}{2.5 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}} = 4.76 \times 10^{-4} \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

水 1 kg は 1 m^2 の平面に伸ばしたら、1 mm の厚さになるので、上記のフラックスは、 $4.76 \times 10^{-4} \text{ mm s}^{-1}$ に相当する。

答 767

- (1) $20 / \cos(\pi/4) = 28.3 \text{ mm h}^{-1}$
- (2) 雨の降ってくる方向と斜面の法線ベクトルのなす角は $45 - 30 = 15$ 度。
従って $28.3 \times \cos(15 \text{ 度}) = 27.3 \text{ mm h}^{-1}$ 。
- (3) 雨の降ってくる方向と斜面の法線ベクトルのなす角は $90 - 15 = 75$ 度。
従って $28.3 \times \cos(75 \text{ 度}) = 7.3 \text{ mm h}^{-1}$ 。

答 768

- (1) 略（各自計算して確認せよ）。
- (2) 略（各自計算して確認せよ）。地道に計算するだけだが、微分操作に慣れない人にはつまずくことが多い問題なので、ヒントを示しておく。発散をいきなり計算するのではなく、まず各成分に関する微分を個々に計算しよう。 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ であることに注意すると、 x 成分については、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} &= \frac{\partial}{\partial x} x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + x \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\ &= \frac{1}{r^3} - x \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \\ &= \dots\end{aligned}$$

1 行目から 2 行目への変形は「積の微分」の公式を使った。2 行目から 3 行目への変形では $(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = 1/r^3$ であることと、「合成関数の微分」の公式を使った。このように、微分の外に出た $x^2 + y^2 + z^2$ は、適宜、 r を使って書き換えていくと、処理が楽になる（例えば 3 行目の第 2 項にある $(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}$ は $1/r^5$ と書き換えられる）。

同様に y 成分, z 成分の偏微分も行なって, 最後に足し合わせると, うまく約分などができて, 最後は $3/r^3 - 3/r^3 = 0$ という形になる。

注: この問題は, 物理学における, 点電荷のつくる電場の性質をあらわす。

答 769

$$(1) dV = dx dy dz$$

(2) 面 A は十分に小さく, その付近では u はほぼ一定であるとみなせば, 面 A 付近の U は, 面 A の中心点 $(x - dx/2, y, z)$ での U で代表される。一方, U の 3 つの成分のうち, v と w は面 A に平行な成分なので, 面 A への流入量には関係しない。すると, 面 A に流入する水量は, u (に単位時間をかけたもの) と面 A の面積の積に等しい。従って,

$$f(A) = u\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) dy dz$$

(3) 前問と同様に考え, 面 A' の付近での U を面 A' の中心点 $(x + \frac{dx}{2}, y, z)$ での U で代表させる。ただし, 面 A のときと違って, 面 A' に水が流入するときは u がマイナスでなければならない。従って,

$$f(A') = -u\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) dy dz$$

(4) この直方体に関して, 単位時間内に面 A と面 A' を介する水の正味の流入量は $f(A) + f(A')$ になるのは自明。上の 2 つの式から,

$$\begin{aligned} f(A) + f(A') &= \left(u\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) - u\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right)\right) dy dz \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} u\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) &= u(x, y, z) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \\ u\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) &= u(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \end{aligned}$$

を上式の式に代入すれば,

$$f(A) + f(A') = -\frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz$$

(6)

$$\begin{aligned} f(B) + f(B') &= -\frac{\partial v}{\partial y} dx dy dz \\ f(C) + f(C') &= -\frac{\partial w}{\partial z} dx dy dz \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} f(A) + f(A') + f(B) + f(B') + f(C) + f(C') \\ - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx dy dz \end{aligned}$$

(7) divergence の定義より,

$$= \operatorname{div} \mathbf{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

これを上の式に代入して,

$$\begin{aligned} f(A) + f(A') + f(B) + f(B') + f(C) + f(C') \\ = -(\operatorname{div} \mathbf{U}) dV \end{aligned}$$

ここで $dV = dx dy dz$ を使った。

答 770

(1) 式 (31.38) を線型近似すると,

$$q \doteq C \Delta V \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t$$

となる。この式を式 (31.37) の左辺に代入すると,

$$C \Delta V \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t \doteq -\operatorname{div} \mathbf{J} \Delta V \Delta t$$

となる両辺を $\Delta V \Delta t$ で割ると,

$$C \frac{\partial T}{\partial t} \doteq -\operatorname{div} \mathbf{J}$$

となる。 Δt と ΔV がともに 0 に近づけば近似の精度は限りなく良くなるので, この \doteq は $=$ に置き換えてよい。すると与式を得る。

(2) 略 (ヒント: 式 (31.39) の \mathbf{J} に式 (31.35) を代入すればよい)。

答 771 略。

答 772 略。($\nabla \cdot \nabla f$ を, ∇ の定義と内積の計算規則で展開するだけ)

答 773 定常状態では, 場は時間に依存しないので, 式 (31.50) の c は t に依存しない。つまり t に関しては定数関数とみなせる。従って, $\partial c / \partial t = 0$ である。従って, 式 (31.50) の左辺は 0 になり, $0 = K \Delta c$ となる。両辺を K で割ると, $\Delta c = 0$ となり, 式 (31.51) と同じ形の方程式, つまりラプラス方程式になる。

答 774 略。

第32章

ベクトル解析4

この章では、「ガウスの発散定理」と「ストークスの定理」という2つの定理を学ぶ。この2つの定理は、ベクトル解析という数学の中核である。これらは、電磁気学や流体力学、気象学、移動現象論など、生物資源学類で必要な多くの物理学を理解する上で大きな手がかりになる。

32.1 ガウスの発散定理

前章の31.5節では、微小な直方体について水の出入りを考えたが、こんどは、そのような微小な直方体が2つ、隣接している状況を考えよう。

図32.1を見て欲しい。直方体1は点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ を中心に持ち、 A, A', B, B', C, C' という面で構成されるとしよう。直方体2は点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ を中心に持ち、 D, D', E, E', F, F' という面で構成されるとしよう。面 A, A', D, D' は x 軸に垂直とし、面 A' と面 D は同じ大きさ・同じ形で、互いにぴったりくっついているとする。

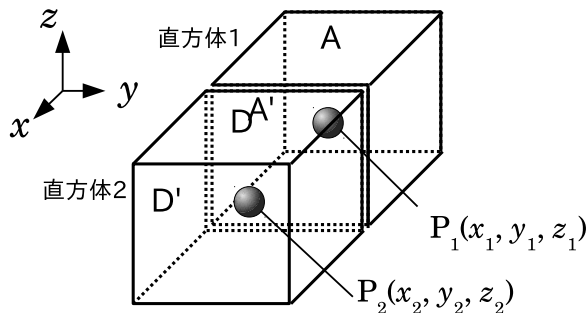


図 32.1 微小な直方体が2つ隣接する。面 A' と面 D は、見やすいように隙間があいて描かれているが、実際はぴったりくっついているものとする。

面 $B, B', C, C', E, E', F, F'$ はそれぞれどこにあたるのかはあまり気にしないでよい。ここから後の話では、それらと面 A 、面 D' が、「この2つの直方体をくっつけ

てできるちょっと大きな直方体」の表面を構成する、ということだけが大事なのだ。

さて、面 X (X は A, A', B, B', C, C' のいずれか)を通して単位時間内に直方体1に流入する水量を $f(X)$ と書き、面 X (X は D, D', E, E', F, F' のいずれか)を通して単位時間内に直方体2に流入する水量を $g(X)$ と書こう。すると、式(31.31)より、

$$f(A) + f(A') + f(B) + f(B') + f(C) + f(C') \\ = -(\operatorname{div} \mathbf{U})_1 dV_1 \quad (32.1)$$

$$g(D) + g(D') + g(E) + g(E') + g(F) + g(F') \\ = -(\operatorname{div} \mathbf{U})_2 dV_2 \quad (32.2)$$

となる。ここで、下つきの添字は、どの直方体についてかを区別するものである。すなわち、 dV_1, dV_2 はそれぞれ直方体1, 2の体積である。 $(\operatorname{div} \mathbf{U})_1, (\operatorname{div} \mathbf{U})_2$ は、それぞれ点 P_1, P_2 における $\operatorname{div} \mathbf{U}$ である。

さて、上の2つの式の各辺を足してみよう。左辺は、

$$f(A) + f(A') + f(B) + f(B') + f(C) + f(C') \\ + g(D) + g(D') + g(E) + g(E') + g(F) + g(F')$$

となる。ところが、 A' と D は、ぴったり接している。これらの面を介して、もし直方体1から水が出ればそれはそっくり直方体2に入るし、逆も然り。従って、 $f(A') = -g(D)$ である。従って、 $f(A') + g(D) = 0$ である。従って、上の式は、

$$f(A) + f(B) + f(B') + f(C) + f(C') \\ + g(D') + g(E) + g(E') + g(F) + g(F') \quad (32.3)$$

となる。これは、見て分かるように、2つの直方体が合体してできた、少し大きな直方体の全ての面から単位時間内に流入する水量の和である。

一方、右辺の和は、

$$-\{(\operatorname{div} \mathbf{U})_1 dV_1 + (\operatorname{div} \mathbf{U})_2 dV_2\} \quad (32.4)$$

となる。式 (32.3) と式 (32.4) が等しいことから、結局、この合体直方体について、単位時間内に全表面から流入する水量の和は、各直方体について中心点での「水のフラックス」の発散に体積をかけたものの、和に等しいことがわかる。

こういうことを、もっとたくさんの直方体 $1, 2, \dots, m$ の集合について考えよう。これらは互いに隣接しあって、大きな立体を作るとする。その立体を Ω と呼ぼう。まるで積木細工やレゴブロックでお城や船ができるように、どんな形の立体も、たくさんの小さな直方体の集合で構成できるだろう。そして、立体 Ω の表面のことを Σ と呼ぼう*1。

さて、この場合、式 (32.3) に対応するのは、単位時間内にその立体 Ω の全表面 Σ から入ってくる水量の和になる。 Σ は n 個の微小な面から構成されるとし、それぞれの面に番号をつける。 k 番目 (k は 1 以上 n 以下の整数) の面の面積を dS_k とする。 k 番目の面を通して単位時間内に立体に入ってくる水量は、その面の単位法線ベクトル (面に垂直で長さが 1 のベクトルで、立体の内側から外側に向かう方向) を \mathbf{n}_k とすると、式 (31.16) より

$$-\mathbf{U}_k \bullet \mathbf{n}_k dS_k \quad (32.5)$$

になる (ここで、 \mathbf{U}_k は、 k 番目の面の中心における \mathbf{U} である)。 \mathbf{n}_k と \mathbf{U}_k が逆向きの時に流入になるから、マイナス符号がつくことに注意。式 (32.5) を全ての面について考えて、それらを足しあわせると、

$$-\sum_{k=1}^n \mathbf{U}_k \bullet \mathbf{n}_k dS_k \quad (32.6)$$

となる*2。ここで dS が限りなく 0 に近いことを思い出すと、式 (32.6) は、

$$-\int_{\Sigma} \mathbf{U} \bullet \mathbf{n} dS \quad (32.7)$$

となる (面積分)。これが式 (32.3) に対応する式である。

一方、式 (32.4) に対応するのは、

$$\begin{aligned} & -\left\{ (\operatorname{div} \mathbf{U})_1 dV_1 + (\operatorname{div} \mathbf{U})_2 dV_2 + \dots + (\operatorname{div} \mathbf{U})_m dV_m \right\} \\ & = -\sum_{k=1}^m (\operatorname{div} \mathbf{U})_k dV_k \end{aligned} \quad (32.8)$$

*1 この Σ は、和の記号 Σ と、たまたま同じ記号だが、その意味は別である。立体の表面のことを Σ と呼ぶのは慣習である。「表面」の英語は surface であり、その頭文字 S に対応するギリシア文字だから Σ を使うのだ。

*2 この式の Σ は和の記号である。

となる。 dV_k が限りなくゼロに近いことを思い出すと、これは、

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{U} dV \quad (32.9)$$

となる。これが式 (32.4) に対応する式である。式 (32.7) と式 (32.9) が等しいことから、次式が成り立つ:

ガウスの発散定理

立体 Ω の表面 Σ に関して、

$$\int_{\Sigma} \mathbf{U} \bullet \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{U} dV \quad (32.10)$$

これは、式 (31.31) を拡張したものと言える。つまり、式 (31.31) は、微小な直方体について、「各面から出入りするフラックスの総和」が「発散かける体積」に等しいことを述べていたが、式 (32.10) は、それを「微小な直方体」以外に拡張するのだ。この場合、「発散かける体積」が、「発散の体積分」に変わるのである。

ガウスの発散定理、すなわち式 (32.10) は必ず記憶せよ。

注意 1: ガウスの発散定理は単に「ガウスの定理」と呼ぶこともある*3。

注意 2: 左辺の内積の \bullet を書き忘れる人が多い。

注意 3: ベクトルを太字で書かなかったり、ベクトルでないものを太字で書いたり、混乱する人が多い。式 (32.10) では、左辺の \mathbf{U} と \mathbf{n} 、そして右辺の \mathbf{U} が太字 (ベクトル) であり、それ以外は細字である。

注意 4: 上の解説では、水の流れを例にとったが、ガウスの発散定理は、水の流れに限らず、任意の微分可能なベクトル場に対してなりたつ。なぜならば、どんなベクトル場であっても、それを流速分布とするような水の流れを仮想的に考えれば、上の議論が成り立つからである。

注意 5: 式 (32.10) 左辺の面積分は、文字どおり「面」、

*3 ドイツの数学者ガウスは、「数学の王様」と呼ばれるくらい、大量の卓越した数学的発見を残した。ガウスの名前がついた定理は、数学や物理学のさまざまな分野に存在する。なので、「ガウスの定理」といってもたくさんあるので、どの定理かを明示するために「ガウスの発散定理」と言ったりするのであろう。

つまり二次元的な量に関する積分なので、それを忘れないように、積分記号を 2 つ書くことがある。同様に、右辺の体積分は、文字どおり「体積」、つまり三次元的な量に関する積分なので、それを忘れないように、積分記号を 3 つ書いたりする。つまり、

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{U} dV \quad (32.11)$$

と書いたりする。

注意 6: 式 (32.10) 左辺の $\mathbf{n} dS$ をまとめて dS と書き、

$$\int_{\Sigma} \mathbf{U} \cdot dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{U} dV \quad (32.12)$$

と書くこともある (その場合は S は太字)。 dS の大きさは微小面積 dS であり、向きはその微小面に垂直である。そのようなベクトルを「微小面積ベクトル」と言ったりする。

では、ガウスの発散定理が実際のベクトル場で成り立つ例を、見てみよう。

問 775 ベクトル場 $\mathbf{U}(x, y, z) = (x, y, z)$ を考える。原点中心、半径 a の球について、ガウスの発散定理が成り立つことを確かめよう。以下、この球を Ω 、その表面を Σ と呼ぼう。

- (1) Σ 上ではどこでも、 $|\mathbf{U}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a$ であることを示せ。
- (2) Σ 上ではどこでも、 \mathbf{U} は Σ に垂直であることを示せ。
- (3) \mathbf{n} を、球の内側から外側の方向に向かう、球表面の単位法線ベクトルとする。 Σ 上ではどこでも、 $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = a$ であることを示せ。
- (4) 次式を示せ：

$$\int_{\Sigma} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi a^3 \quad (32.13)$$

- (5) (x, y, z) がどの場所であっても、 $\operatorname{div} \mathbf{U} = 3$ であることを示せ。
- (6) 小問 (5) を使って次式を示せ：

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{U} dV = 4\pi a^3 \quad (32.14)$$

小問 (4)(6) より、ガウスの発散定理が成り立つことがわかる。

問 776 前問と同じベクトル場 $\mathbf{U}(x, y, z) = (x, y, z)$ を、こんどは次式で表される直方体を：

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ 0 \leq z \leq 5 \end{cases} \quad (32.15)$$

について成り立つことを確かめよう。以下、この直方体を Ω 、その表面を Σ と呼ぼう。

- (1) $x = 0$ の面 A について、次式を示せ：

$$\int_A \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (32.16)$$

- (2) $x = 2$ の面 A' について、次式を示せ：

$$\int_{A'} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = 30 \quad (32.17)$$

- (3) 次式を示せ：

$$\int_{\Sigma} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = 90 \quad (32.18)$$

- (4) $\operatorname{div} \mathbf{U} = 3$ を使って次式を示せ：

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{U} dV = 90 \quad (32.19)$$

小問 (3)(4) より、ガウスの発散定理が成り立つことがわかる。

注意: 実際には、問 775 や問 776 のようにガウスの発散定理を具体的な関数について積分することは稀である。むしろ、この定理は様々な偏微分方程式の一般的・理論的な導出や変形に使われることが多い。高校数学の習性では、積分記号を見ると、実際に積分計算をしなければならない気がするが、式 (32.10) では、積分記号は数学的なアイデアを伝える「言葉」と解釈する方がよい。だから、ガウスの発散定理の積分が実際に計算できなくても、「ガウスの発散定理はわからない！」とあきらめなくてよい (もちろん、問 775 や問 776 の程度の計算力は、そもそも基礎学力として必要だが)。

32.2 回転 (rotation)

P.172 式 (30.7) で学んだように、ナブラ演算子を 3 次元空間中のベクトル場 \mathbf{U} に対して外積の規則で作用させる演算：

$$\nabla \times \mathbf{U} \quad (32.20)$$

を、「回転」もしくは「循環」もしくは rotation もしくは curl と呼ぶ。式 (32.20) を

$$\operatorname{rot} \mathbf{U} \quad (32.21)$$

と書くこともある。

問 777 以下を示せ：

- (1) $\operatorname{rot}(y, -x, 0) = (0, 0, -2)$
- (2) $\operatorname{rot}(-z, 0, 0) = (0, -1, 0)$

問 778 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とする。 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は場所によらない定数とする。次式を示せ：

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega} \quad (32.22)$$

問 779 3次元空間中のスカラー場 $f(x, y, z)$ について、次式が恒等的に成り立つことを示せ：

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (32.23)$$

さて、偏微分がたくさん出てきて、書くときに面倒だし、窮屈になってきた。そこで、式が繁雑になってきたら、 $\partial u / \partial x$ を u_x というふうに、 x や y , z などによる偏微分を、下つきの添字で簡略的に書くことにしよう。そして、高階偏微分は、この添字を重ねて書くことにしよう。例えば、

$$\frac{\partial v}{\partial z} = v_z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w_{xx}$$

などを書く。この書き方は、流体力学などではよく使われるものの、それほど一般的なものではないので、よそで使うときには、あらかじめ定義して使うこと。以下、 ∂ を使う書き方とこの書き方を併用していく。

また、今後は、なるべくナブラ記号を使い、 $\operatorname{grad} f$ のかわりに ∇f と書き、 $\operatorname{div} \mathbf{U}$ のかわりに $\nabla \cdot \mathbf{U}$ と書き、 $\operatorname{rot} \mathbf{U}$ のかわりに $\nabla \times \mathbf{U}$ と書くことに慣れていこう。

問 780 上の記法を使って、3次元空間中のベクトル場 $\mathbf{U} = (u, v, w)$ の発散と回転を、 \mathbf{U} の成分で表記せよ。

問 781 3次元空間中のベクトル場 \mathbf{U} について、次

式が恒等的に成り立つことを示せ：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) = 0 \quad (32.24)$$

ヒント：地道に成分ごとに計算する。上の記法を使えば楽。複数の変数による高階偏微分は順序の入れ替えが可能なこと（例えば $u_{xy} = u_{yx}$ ）に注意。

問 782 3次元空間中のベクトル場 $\mathbf{U} = (u, v, w)$ について、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) \quad (32.25)$$

を計算しよう。これは物理学で重要な演算である。

(1) 上の式を、成分で書くと次式になることを示せ：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(v_x - u_y) - \frac{\partial}{\partial z}(u_z - w_x) \\ \frac{\partial}{\partial z}(w_y - v_z) - \frac{\partial}{\partial x}(v_x - u_y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(u_z - w_x) - \frac{\partial}{\partial y}(w_y - v_z) \end{bmatrix} \quad (32.26)$$

(2) これは次式に変形できることを示せ：

$$\begin{bmatrix} -u_{yy} - u_{zz} + v_{xy} + w_{xz} \\ u_{xy} - v_{xx} - v_{zz} + w_{yz} \\ u_{xz} + v_{yz} - w_{xx} - w_{yy} \end{bmatrix} \quad (32.27)$$

(3) これは次式に変形できることを示せ：

$$\begin{bmatrix} -u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} + u_{xx} + v_{xy} + w_{xz} \\ -v_{xx} - v_{yy} - v_{zz} + u_{yx} + v_{yy} + w_{yz} \\ -w_{xx} - w_{yy} - w_{zz} + u_{zx} + v_{zy} + w_{zz} \end{bmatrix}$$

(4) これは次式に変形できることを示せ：

$$\begin{bmatrix} -\Delta u + \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{U} \\ -\Delta v + \frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{U} \\ -\Delta w + \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{U} \end{bmatrix} \quad (32.28)$$

(5) 以上より、次式を示せ：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) = -\Delta \mathbf{U} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) \quad (32.29)$$

式 (32.29) は非常に大切な公式である（覚える必要はないが）、後で使う。

32.3 回転 (rotation) の意味

さきほど学んだ回転 (rotation) は、何を意味する量なのだろうか? 手始めに、次のような状況を考えてみよう。

2次元ユークリッド空間(つまり平面)に、ベクトル場

$$\mathbf{U}(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} \quad (32.30)$$

があるとする。ある点 $P(x, y)$ と、その点を囲むような、以下のような4点を考える(図 32.2):

$$\begin{aligned} A &: \left(x - \frac{dx}{2}, y - \frac{dy}{2}\right) \\ B &: \left(x + \frac{dx}{2}, y - \frac{dy}{2}\right) \\ C &: \left(x + \frac{dx}{2}, y + \frac{dy}{2}\right) \\ D &: \left(x - \frac{dx}{2}, y + \frac{dy}{2}\right) \end{aligned}$$

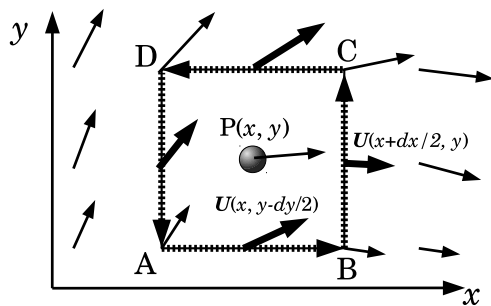


図 32.2 2次元上のベクトル場と長方形。実線の矢印はベクトル場 \mathbf{U} 。点線矢印は、四角形 ABCD の隣接する頂点どうしを結ぶベクトル。

dx, dy は、いずれも、ゼロに近い微小量である。明らかに、ABCD は長方形を作り、その中心に P が存在する。点 A から出発して、この長方形をぐるっと一周するような経路に沿って、 \mathbf{U} を線積分してみよう。すなわち、

$$I = \oint_{A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} \quad (32.31)$$

を計算するのである。ここで、 $d\mathbf{r}$ は、経路に沿った微小変位である。このように、「ぐるっとまわってもとに戻る」ような線積分を、周回積分または周回線積分と呼ぶ。積分記号に小さな \oint がついてるのは、周回線積分の印である。

問 783

(1) 辺 AB に沿った線積分を I_{AB} とする。辺 AB は十

分に短いので、その上では \mathbf{U} はほぼ一定であると近似し、AB の中間点での \mathbf{U} で代表させる。すると、

$$\begin{aligned} I_{AB} &= \mathbf{U}\left(x, y - \frac{dy}{2}\right) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \mathbf{U}\left(x, y - \frac{dy}{2}\right) \cdot (dx, 0) \\ &= u\left(x, y - \frac{dy}{2}\right) dx \end{aligned} \quad (32.32)$$

となることを示せ。

(2) 同様に、

$$I_{BC} = v\left(x + \frac{dx}{2}, y\right) dy \quad (32.33a)$$

$$I_{CD} = -u\left(x, y + \frac{dy}{2}\right) dx \quad (32.33b)$$

$$I_{DA} = -v\left(x - \frac{dx}{2}, y\right) dy \quad (32.33c)$$

となることを示せ。

(3) $I = I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA}$ より、次式を示せ:

$$\begin{aligned} I &= \left\{ v\left(x + \frac{dx}{2}, y\right) - v\left(x - \frac{dx}{2}, y\right) \right\} dy \\ &\quad - \left\{ u\left(x, y + \frac{dy}{2}\right) - u\left(x, y - \frac{dy}{2}\right) \right\} dx \end{aligned}$$

(4) これは次式のように書き換えられることを示せ:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\partial v}{\partial x} dx dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx dy \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (32.34)$$

前問で計算したのは、回転 (rotation) そのものではないが(いわば、2次元に単純化した回転)、回転の基本的な考え方はこの中に入っている。式 (32.34) を見ると、微小長方形領域の周囲をぐるっとまわる周回線積分は、

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (32.35)$$

という量と、微小長方形の面積 $dx dy$ の積になっている。これは極めて重要なことであり、これが rotation の考え方の基礎である。後に述べるストークスの定理は、これを拡張したものである。

ここで、周回線積分の意味を考えておこう。 \mathbf{U} が、物体にかかる力(の場合)であるならば、その線積分は、物体の移動にかかる仕事である。「ぐるっとまわる」ということは、物体を移動させて元の位置まで戻すということだ。ただし、重力などの保存力であるならば、これがゼロであることを「物理学」で習った。

さて、上の議論を 3 次元に拡張しよう。そうすれば回転 (rotation) の意味が明らかになる。

3 次元空間に、ベクトル場

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (32.36)$$

があるとす。位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ であらわされる点 P と、その点を囲むような、以下のような 4 点を考える (図 32.3) :

位置ベクトル $\mathbf{r} - \mathbf{a}/2 - \mathbf{b}/2$ であらわされる点 A

位置ベクトル $\mathbf{r} + \mathbf{a}/2 - \mathbf{b}/2$ であらわされる点 B

位置ベクトル $\mathbf{r} + \mathbf{a}/2 + \mathbf{b}/2$ であらわされる点 C

位置ベクトル $\mathbf{r} - \mathbf{a}/2 + \mathbf{b}/2$ であらわされる点 D

ただし、 \mathbf{a}, \mathbf{b} は、いずれも、微小な大きさのベクトルであり、

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad (32.37a)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad (32.37b)$$

とあらわされるとする。

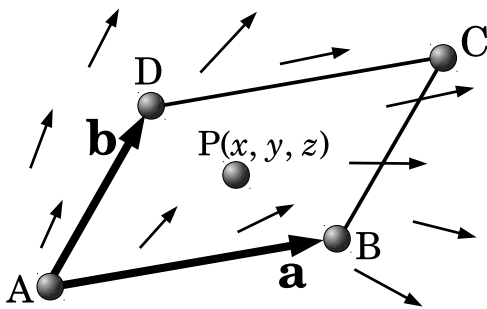


図 32.3 3 次元空間内の点 $P(x, y, z)$ と、それを取り囲むように 2 つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} で張られる平行四辺形 ABCD。細い矢印はベクトル場 \mathbf{U} 。

問 784

(1) 次式を示せ:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} \quad (32.38a)$$

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{b} \quad (32.38b)$$

$$\overrightarrow{CD} = -\mathbf{a} \quad (32.38c)$$

$$\overrightarrow{DA} = -\mathbf{b} \quad (32.38d)$$

(2) ABCD が平行四辺形となることを示せ:

(3) ABCD の中心に P が存在することを示せ。

点 A から出発して、この長方形をぐるっと一周する

ような経路に沿って、 \mathbf{U} を周回線積分してみよう。すなわち、

$$I = \oint_{A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} \quad (32.39)$$

を計算するのである。ここで、 $d\mathbf{r}$ は、経路に沿った微小変位である。

問 785 この状況で、

(1) 辺 AB に沿った線積分を I_{AB} とすると、

$$\begin{aligned} I_{AB} &= \mathbf{U}\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \mathbf{U}\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right) \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (32.40)$$

となることを示せ。

(2) 同様に、

$$I_{BC} = \mathbf{U}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}}{2}\right) \cdot \mathbf{b} \quad (32.41a)$$

$$I_{CD} = -\mathbf{U}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{b}}{2}\right) \cdot \mathbf{a} \quad (32.41b)$$

$$I_{DA} = -\mathbf{U}\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{a}}{2}\right) \cdot \mathbf{b} \quad (32.41c)$$

となることを示せ。

(3) 次式を示せ:

$$I_{AB} + I_{CD} = \left\{ \mathbf{U}\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right) - \mathbf{U}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{b}}{2}\right) \right\} \cdot \mathbf{a} \quad (32.42)$$

(4) 次式を示せ (ヒント: u, v, w について全微分を考える):

$$\begin{aligned} &\mathbf{U}\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right) - \mathbf{U}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{b}}{2}\right) \\ &= - \begin{bmatrix} u_x b_1 + u_y b_2 + u_z b_3 \\ v_x b_1 + v_y b_2 + v_z b_3 \\ w_x b_1 + w_y b_2 + w_z b_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32.43)$$

(5) 前問をもとに、次式を示せ:

$$\begin{aligned} I_{AB} + I_{CD} &= \\ &-(u_x a_1 b_1 + u_y a_1 b_2 + u_z a_1 b_3 \\ &+ v_x a_2 b_1 + v_y a_2 b_2 + v_z a_2 b_3 \\ &+ w_x a_3 b_1 + w_y a_3 b_2 + w_z a_3 b_3) \end{aligned} \quad (32.44)$$

- (6) 同様に、次式を示せ：

$$\begin{aligned}
 I_{BC} + I_{DA} = & \\
 & (u_x a_1 b_1 + u_y a_2 b_1 + u_z a_3 b_1 \\
 & + v_x a_1 b_2 + v_y a_2 b_2 + v_z a_3 b_2 \\
 & + w_x a_1 b_3 + w_y a_2 b_3 + w_z a_3 b_3)
 \end{aligned} \quad (32.45)$$

- (7) 以上から、次式を示せ：

$$\begin{aligned}
 I = I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA} \\
 = u_y(a_2 b_1 - a_1 b_2) + u_z(a_3 b_1 - a_1 b_3) \\
 + v_x(a_1 b_2 - a_2 b_1) + v_z(a_3 b_2 - a_2 b_3) \\
 + w_x(a_1 b_3 - a_3 b_1) + w_y(a_2 b_3 - a_3 b_2)
 \end{aligned} \quad (32.46)$$

- (8) 前問をもとに、次式を示せ：

$$\begin{aligned}
 I = (w_y - v_z)(a_2 b_3 - a_3 b_2) \\
 + (u_z - w_x)(a_3 b_1 - a_1 b_3) \\
 + (v_x - u_y)(a_1 b_2 - a_2 b_1)
 \end{aligned} \quad (32.47)$$

- (9) 前問をもとに、次式を示せ：

$$I = (\text{rot } \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (32.48)$$

- (10) 平行四辺形 ABCD の面積を
- dS
- 、平行四辺形の法線ベクトル (ただし、
- $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$
- の向きに右ネジをまわすときに進む方向で、長さを 1 とする) を
- \mathbf{n}
- とすると、次式が成り立つことを示せ：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{n} dS \quad (32.49)$$

- (11) 以上より、次式を示せ：

$$I = (\text{rot } \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (32.50)$$

ここで示した式 (32.50) が、回転 (rotation) の意味を、最も端的にあらわすものである (この式は式 (32.34) を 3 次元ユークリッド空間に拡張したものである)。式 (32.50) で、 dS が一定のとき、さまざまな向きの \mathbf{n} の中で、 I が最も大きくなるのは、 \mathbf{n} が $\text{rot } \mathbf{U}$ と同じ向きを向いているときである。つまり、rotation とは、単位面積における「ベクトル場の周回線積分」が最も大きくなるような面の法線ベクトルのひとつであり、その大きさは、その面の単位面積における「ベクトル場の周回線積分」である。

もう、わけわからん！と知っている人もいるかもしれない。私もそうだった。最初はそういうものである。次第に慣れるものである。まずは上の論理をじっくり追いかけて、頭の中に、自分なりのイメージを作ってみよう。

rotation を説明している教科書は、世の中にたくさんある (特に、ベクトル解析というタイトルの本)。それぞれ、すこしずつ違ったスタイルで解説しているの、いろいろ調べてみよう。

32.4 ストークスの定理

ここまで来ると、表題の「ストークスの定理」*4まであとわずかである。読めばわかるように、以下の議論は、divergence の性質からガウスの法則を導いたときと似た論理である。

微小な平行四辺形が 2 つ、隣接している状況を考えよう (図 32.4 左上)。点 A, B, C, D を順に結んだものを平行四辺形 1 とし、点 E, F, G, H を順に結んだものを平行四辺形 2 とする。この 2 つの平行四辺形は、辺 BC と辺 EH を共有しているとする。つまり、点 B と点 E は同一点であり、点 C と点 H も同一点である。そこで、以後は点 E を B、点 H を C と書こう。

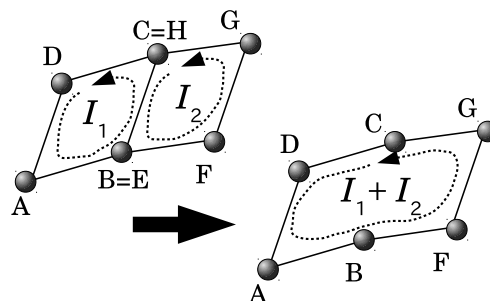


図 32.4 3 次元空間内の隣接する 2 つの平行四辺形 (左上)。それぞれの周回線積分の和 ($I_1 + I_2$) は、2 つの平行四辺形を統合した多角形をめぐる周回線積分になる (右下)。

平行四辺形 1 の辺を巡る、 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ という経路での周回線積分を I_1 と書こう。平行四辺形 2 の辺を巡る、 $B \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow B$ という経路での周回線積分を I_2 と書こう。

X や Y を、A, B, C, D, F, G のいずれかとし、点 X

*4 「ストークスの定理」と言っても、アイルランドの数学者ストークスという同一人物が発見したということを除けば、この定理は、ストークス抵抗とは何の関係もない。

から点 Y までの線積分

$$\int_{X \rightarrow Y} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} \quad (32.51)$$

を簡略的に

$$\int_{X \rightarrow Y} \quad (32.52)$$

と書くことにすれば,

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_{A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{A \rightarrow B} + \int_{B \rightarrow C} + \int_{C \rightarrow D} + \int_{D \rightarrow A} \end{aligned} \quad (32.53)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint_{B \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow B} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{B \rightarrow F} + \int_{F \rightarrow G} + \int_{G \rightarrow C} + \int_{C \rightarrow B} \end{aligned} \quad (32.54)$$

である。ところが、 $C \rightarrow B$ の線積分は $B \rightarrow C$ の線積分の同じ経路を逆向きに線積分しているだけなので,

$$\int_{C \rightarrow B} = - \int_{B \rightarrow C} \quad (32.55)$$

である。それを考慮すれば,

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int_{A \rightarrow B} + \int_{B \rightarrow F} + \int_{F \rightarrow G} \\ &\quad + \int_{G \rightarrow C} + \int_{C \rightarrow D} + \int_{D \rightarrow A} \end{aligned} \quad (32.56)$$

となり、6つの点 A, B, F, G, C, D を順に巡って A に戻ってくる周回線積分、つまり、平行四辺形 1 と平行四辺形 2 を連結してできた面の縁をめぐる周回線積分に等しい。

このような議論を、互いにすき間なく隣接する n 個の平行四辺形について行って全部たしあわせると,

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n \quad (32.57)$$

は、 n 個の平行四辺形を組み合わせることができる大きな曲面 Σ の縁 Γ をまわる周回線積分になる。これを I と書こう。すなわち,

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \oint_{\Gamma} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} \quad (32.58)$$

である。

一方、式 (32.50) から,

$$\begin{aligned} I_1 &= (\text{rot } \mathbf{U})_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 \\ I_2 &= (\text{rot } \mathbf{U})_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS_2 \\ &\quad \dots \end{aligned} \quad (32.59)$$

$$I_n = (\text{rot } \mathbf{U})_n \cdot \mathbf{n}_n dS_n$$

である (下つきの添字は、どの平行四辺形についてかを区別するものである)。従って,

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \cdots + I_n \\ &= \sum_{k=1}^n (\text{rot } \mathbf{U})_k \cdot \mathbf{n}_k dS_k \end{aligned} \quad (32.60)$$

となる。ここで、 n を十分大きくし、 dS_k が十分ゼロに近いと考えれば,

$$I = \int_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (32.61)$$

となる。以上から、次式が成り立つ:

—— ストークスの定理 ——

閉曲線 Γ と、それによって囲まれる曲面 Σ について,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (32.62)$$

これは必ず記憶せよ。

注意: 右辺の積分が面積分であることを忘れないように、積分記号を 2 つ書いて,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (32.63)$$

と書いたりもする。これは、上の式 (32.62) と同じことである。

問 786 以下のベクトル場:

$$\mathbf{U} = (-y, x, 0) \quad (32.64)$$

を考える。図 32.5 のように、原点を中心とする、 xy 平面上の半径 1 の円周に沿って、 $(1, 0, 0)$ から $(0, 1, 0)$ を経由して $(1, 0, 0)$ に戻る経路を Γ とする。

(1)

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \quad (32.65)$$

となることを、線積分を実際に行うことで示せ。ヒ

ント: 例 30.3 の積分経路(半円)を延長すればよい。

(2) 次式を示せ:

$$\text{rot } \mathbf{U} = (0, 0, 2) \tag{32.66}$$

(3) この経路 Γ の内部を Σ とする。

$$\int_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dS = 2\pi \tag{32.67}$$

となることを、面積分を実際に行うことで示せ。ヒント: $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ である。従って, $(\text{rot } \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} = (0, 0, 2) \cdot (0, 0, 1) = 2$ となる。これは定数だから積分記号の前に出せる。

式 (32.65), 式 (32.67) がともに同じ値になるのは、ストークスの定理と整合している。

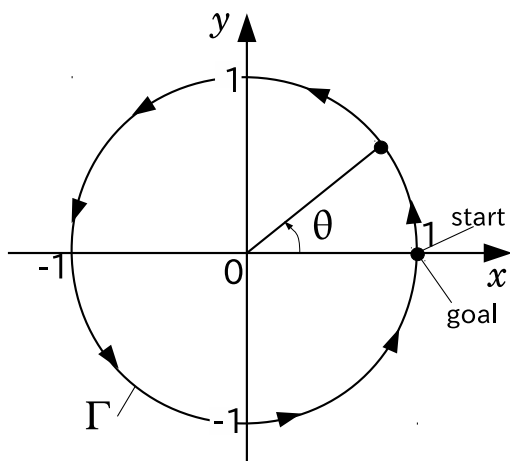


図 32.5 問 786 の積分経路。単位円の上を左回りに一周する。

問 787 (発展) ベクトル場 $\mathbf{U}(x, y, z)$ が, $\text{rot } \mathbf{U} = 0$ を恒等的に満たすなら, \mathbf{U} の線積分は, 積分経路の始点と終点だけで決まり, 経路のとり方に依存しないことを示せ。ヒント: 2点 A,B を結ぶ経路として, Γ_1, Γ_2 の2つを考える。A から Γ_1 を経由して B に至り, それから Γ_2 を逆行して A に戻る, という経路はループになる。このループに沿って \mathbf{U} を周回線積分すると, ストークスの定理から, それは $\text{rot } \mathbf{U}$ の面積分になるが, $\text{rot } \mathbf{U} = 0$ なので, その積分は 0 である。一方, Γ_2 を逆行する積分は, Γ_2 に沿った積分の符号を反転したものである。

問 788 (発展) 静止した液体の中にある物体にかかる浮力は, 「その物体と同じ体積の液体にかかる重力」

と同じ大きさで, なおかつ上向きの力である。これをアルキメデスの原理という。これを証明せよ。ただし, 液体の密度を ρ とし, 重力加速度を g とし, ρ と g は定数とする。また, 鉛直上向きに z 軸をとり, $z = 0$ の高さに液体の表面(水なら水面)があるとす。液体の中の圧力 P は, $P = -\rho g z$ と書ける。ヒント: 式 (30.27) を使う。物体は微小立方体とは限らない(任意の形状を想定する)。水中にある物体に働く浮力は, その物体がまわりの液体と同じ物質(液体)でできていると考えても変わらない(浮力は表面に働く力の総和なので, 物体が何でできているかによらず, 形状だけで決まる)。ガウスの発散定理は使わなくてよい(というか, 使う必要はない)。この問題は難しそうに見えるが, 実はとても簡単である。

32.5 注意: 掛け算の順序について

スカラーとベクトルのかけざん(ベクトルのスカラー倍)を表記するときは, スカラーを先に, ベクトルを後に書くこと(それが慣習)。たとえば, q を電荷, \mathbf{E} を電場とすときは,

$$q\mathbf{E}$$

と書くこと。たまにこれを $\mathbf{E}q$ と書く人がいるが, そういう書き方は非常に稀(というかほとんどない)。実際, 数学リメディアル教材(または高校の教科書)でベクトルを学んだとき, ベクトルのスカラー倍の定義では, 必ずスカラーが前に来るように書かれていたはず。スカラーが後ろに来るような書き方は定義されていないのだ。

これは慣習なので, $\mathbf{E}q$ と書くのが厳密に間違いであるとは言い切れないが, 諸君は数学を他の人とのコミュニケーションにも使うので, 慣習的に奇異なことは, よほどの必然性が無い限り, 避けよう。

当然だが, スカラーどうしの掛け算では, 順序を気にする必要はない。しかし諸君の多くは, 小学校などで, 掛け算の順番をやかましく言われただろう。あれは無意味である。例えば「3羽のウサギがいます。耳の数の合計は?」という問題を, $2 \times 3 = 6$ と書こうが $3 \times 2 = 6$ と書こうが同じである。前者が正しく後者は誤り, という指導があるようだが(ウィキペディアより), どちらも正しいのだ。

しかし, スカラー以外のものに「かけざん」が拡張さ

れたときは、「かけざん」の順序に気をつけるべきである。以下にその状況を要約する:

- スカラーどうしの積: 順序を変えても OK。小学校でどう習ったにしても。
- ベクトルどうしの内積: 体が \mathbb{R} なら, 順序を変えても OK。体が \mathbb{C} なら, 順序を変えてはダメ(本質的。結果が複素共役になる)。
- ベクトルどうしの外積: 順序を変えてはダメ(本質的。符号が反転する)。
- 行列どうしの積: 順序を変えてはダメ(本質的。結果が変わる)。
- スカラーとベクトルの積: 順序を変えてはダメ(慣習的。スカラーを前に書く約束。)
- スカラーと行列の積: 順序を変えてはダメ(慣習的。スカラーを前に書く約束。)

32.6 解答

答 775

- (1) Σ は原点中心, 半径 a の球面だから, その上の点は, 原点からの距離が a である。従って Σ 上の点 (x, y, z) において, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ である。一方, その点において, $\mathbf{U} = (x, y, z)$ なので, $|\mathbf{U}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{a^2} = a$ である。
- (2) 略(問 755(3) で $a = 1$ とすれば明らか)
- (3) 前小問より, Σ 上ではどこでも, \mathbf{U} と \mathbf{n} は平行である。従って, それらのなす角の余弦は 1 である。従って, $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{U}||\mathbf{n}| = |\mathbf{U}| = a$ 。

$$(4) \int_{\Sigma} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Sigma} a dS = a \int_{\Sigma} dS = 4\pi a^3$$

$$(5) \operatorname{div} \mathbf{U} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$(6) \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{U} dV = \int_{\Omega} 3 dV = 3 \cdot \frac{4\pi a^3}{3} = 4\pi a^3$$

答 776

- (1) $x = 0$ の面 A では, $\mathbf{U} = (0, y, z)$, $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ である。従って $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0$ 。従って与式が成り立つ。
- (2) $x = 2$ の面 A' では, $\mathbf{U} = (2, y, z)$, $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ で

ある。従って $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 2$ 。従って与式は

$$\int_{A'} 2 dS = 2 \int_{A'} dS = 2 \times 15 = 30$$

となる(面 A' の面積が $3 \times 5 = 15$ であることを使った)。

- (3) $y = 0$ の面 B や $z = 0$ の面 C では, 小問 (1) と同様に考えて,

$$\int_B \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

である。また, $y = 3$ の面 B' や $z = 5$ の面 C' では, 小問 (2) と同様に考えて,

$$\int_{B'} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{C'} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = 30$$

である。従って,

$$\int_{\Sigma} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = 0 + 0 + 0 + 30 + 30 + 30 = 90$$

- (4) $\operatorname{div} \mathbf{U} = 3$ であり, Ω の体積は $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ なので,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{U} dV = \int_{\Omega} 3 dV = 3 \times 30 = 90$$

答 777 略(それぞれ, 式 (30.7) に代入して計算するだけ)。

答 778

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(\omega_1 y - \omega_2 x) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_3 x - \omega_1 z) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\omega_2 z - \omega_3 y) - \frac{\partial}{\partial x}(\omega_1 y - \omega_2 x) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\omega_3 x - \omega_1 z) - \frac{\partial}{\partial y}(\omega_2 z - \omega_3 y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_1 - (-\omega_1) \\ \omega_2 - (-\omega_2) \\ \omega_3 - (-\omega_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\omega_1 \\ 2\omega_2 \\ 2\omega_3 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

答 779

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで, 高階の偏微分は順序を入れ替えても変わらないことを使った(わからぬ人はリメディアル教材の最終章

を見よ。

答 780

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = u_x + v_y + w_z \quad (32.68)$$

$$\nabla \times \mathbf{U} = \begin{bmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} \quad (32.69)$$

答 781 以下、偏微分を下付き添字で書き表す。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) &= \nabla \cdot \begin{bmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} \\ &= w_{xy} - v_{xz} + u_{yz} - w_{xy} + v_{xz} - u_{yz} = 0 \end{aligned}$$

答 782 略。

答 783 略。

答 784

(1)

$$\begin{cases} \vec{OA} = \mathbf{r} - \mathbf{a}/2 - \mathbf{b}/2 \\ \vec{OB} = \mathbf{r} + \mathbf{a}/2 - \mathbf{b}/2 \\ \vec{OC} = \mathbf{r} + \mathbf{a}/2 + \mathbf{b}/2 \\ \vec{OD} = \mathbf{r} - \mathbf{a}/2 + \mathbf{b}/2 \end{cases} \quad (32.70)$$

より、

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} = \mathbf{a} \\ \vec{BC} &= \vec{OC} - \vec{OB} = \mathbf{b} \\ \vec{CD} &= \vec{OD} - \vec{OC} = -\mathbf{a} \\ \vec{DA} &= \vec{OA} - \vec{OD} = -\mathbf{b} \end{aligned}$$

(2) 前小問より、 $\vec{DC} = -\vec{CD} = \mathbf{a}$ かつ $\vec{AD} = -\vec{DA} = \mathbf{b}$ となる。従って、 $\vec{AB} = \vec{DC}$ 、 $\vec{BC} = \vec{AD}$ 。どの向かい合う 2 辺も平行なので、四角形 ABCD は平行四辺形。

(3) 四角形 ABCD の中心の位置ベクトルは、

$$\frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$$

となる。これに式 (32.70) を代入すると、 \mathbf{r} 、すなわち点 P の位置ベクトルになる。

答 785

(1) 辺 AB の中点の位置ベクトルは、式 (32.70) より

$$\frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{b}}{2}$$

となる。辺 AB が十分小さければ、この付近で \mathbf{U} はほとんど一定であり、AB の中点での \mathbf{U} で代表させれば、

$$I_{AB} = \mathbf{U}\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right) \cdot \vec{AB} = \mathbf{U}\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right) \cdot \mathbf{a}$$

(2) 略 (前小問と同様)

(3) 略 (前小問と前々小問の結果をたすだけ)

(4) 与式の x 成分に着目すると、全微分公式より、

$$\begin{aligned} &u\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right) - u\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{b}}{2}\right) \\ &\equiv u(\mathbf{r}) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{b_1}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(-\frac{b_2}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\left(-\frac{b_3}{2}\right) \\ &\quad - \left\{ u(\mathbf{r}) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{b_1}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{b_2}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{b_3}{2}\right) \right\} \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x}b_1 - \frac{\partial u}{\partial y}b_2 - \frac{\partial u}{\partial z}b_3 = -(u_x b_1 + u_y b_2 + u_z b_3) \end{aligned}$$

となる。 y 成分、 z 成分も同様に計算すると、

$$\begin{aligned} v\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right) - v\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{b}}{2}\right) &= -(v_x b_1 + v_y b_2 + v_z b_3) \\ w\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right) - w\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{b}}{2}\right) &= -(w_x b_1 + w_y b_2 + w_z b_3) \end{aligned}$$

となる。これらをまとめると、

$$\begin{aligned} &\mathbf{U}\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right) - \mathbf{U}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{b}}{2}\right) \\ &= - \begin{bmatrix} u_x b_1 + u_y b_2 + u_z b_3 \\ v_x b_1 + v_y b_2 + v_z b_3 \\ w_x b_1 + w_y b_2 + w_z b_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(5) 前小問の結果を使う。

$$\begin{aligned} &I_{AB} + I_{CD} \\ &= \left\{ \mathbf{U}\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right) - \mathbf{U}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{b}}{2}\right) \right\} \cdot \mathbf{a} \\ &= - \begin{bmatrix} u_x b_1 + u_y b_2 + u_z b_3 \\ v_x b_1 + v_y b_2 + v_z b_3 \\ w_x b_1 + w_y b_2 + w_z b_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\ &= -(u_x a_1 b_1 + u_y a_1 b_2 + u_z a_1 b_3 \\ &\quad + v_x a_2 b_1 + v_y a_2 b_2 + v_z a_2 b_3 \\ &\quad + w_x a_3 b_1 + w_y a_3 b_2 + w_z a_3 b_3) \end{aligned}$$

(6) 前小問と同様に考えれば,

$$\begin{aligned} & I_{BC} + I_{DA} \\ &= \left\{ \mathbf{U} \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}}{2} \right) - \mathbf{U} \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{a}}{2} \right) \right\} \bullet \mathbf{b} \\ &= \begin{bmatrix} u_x a_1 + u_y a_2 + u_z a_3 \\ v_x a_1 + v_y a_2 + v_z a_3 \\ w_x a_1 + w_y a_2 + w_z a_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ &= u_x a_1 b_1 + u_y a_2 b_1 + u_z a_3 b_1 \\ &\quad + v_x a_1 b_2 + v_y a_2 b_2 + v_z a_3 b_2 \\ &\quad + w_x a_1 b_3 + w_y a_2 b_3 + w_z a_3 b_3 \end{aligned}$$

(7) 前小問と前々小問の結果から,

$$\begin{aligned} I &= I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA} \\ &= u_y(a_2 b_1 - a_1 b_2) + u_z(a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ &\quad + v_x(a_1 b_2 - a_2 b_1) + v_z(a_3 b_2 - a_2 b_3) \\ &\quad + w_x(a_1 b_3 - a_3 b_1) + w_y(a_2 b_3 - a_3 b_2) \end{aligned}$$

(8) この式を整理すると,

$$\begin{aligned} I &= (w_y - v_z)(a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ &\quad + (u_z - w_x)(a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ &\quad + (v_x - u_y)(a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned}$$

(9)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

一方, 式 (32.69) より,

$$\nabla \times \mathbf{U} = \begin{bmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix}$$

従って, 前小問の式は,

$$I = (\text{rot } \mathbf{U}) \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

とかける。

- (10) 平行四辺形 ABCD はベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} で張られるから, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の大きさは, この平行四辺形の面積 dS に等しい。また, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の向きは, \mathbf{a} , \mathbf{b} の両方に垂直で, かつ, \mathbf{a} から \mathbf{b} へ右ネジをまわすときに右ネジが進む向きであるが, それは平行四辺形 ABCD に垂直で, かつ, 右ネジを $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ の向きにまわすときに右ネジが進む方向と一致する。従って, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は ndS に等しい。

(11) (9)(10) より自明。

答 786 略。

答 787 略。

一問一答

- 基本的には化学コース一本で考えているのですが, 2 年次で実用解析はとっておいたほうがよいのでしょうか?

... 実用解析は, 基礎数学と同様に, 特定のコースのための講義ではなくて生物資源学全般にわたる実用的な数学の基礎を学ぶ授業です。もちろん化学コースにも役立つでしょう。というか, 数学を役立たせるかどうかは, コースによって決まるのではなく, 人それぞれの姿勢や考え方次第だと思います。数学を全く使わずに研究したり仕事したりしている人はたくさんいるし, それはそれで全く問題ありません。でも, その気になれば, 数学はどこでも役に立ち, しかも非常に鋭い切れ味で役に立つものです。

- 微小ってどこからが微小ですか?

... その範囲で関数 (ベクトル場やスカラー場) が一様であるという近似が十分な精度で成り立つ程度です。

第33章

マクスウェル方程式と電磁気学

33.1 マクスウェル方程式

ところで、なぜ我々は、このようなベクトルと偏微分の嵐の道をたどっているのだろうか？ 端的に言えば、それは、「マクスウェル方程式」を理解するためである。マクスウェル方程式は、電磁気学の基本法則（支配方程式）である。マクスウェル方程式は、物理学の基本法則の中でも、際立って美しく、完成度の高い方程式である。ここで、米国の物理学者リチャード・ファインマン^{*1}の言葉を借りよう。

「人類の歴史という長い眼から、例えば今から1万年後の世界から眺めたら、19世紀の一番顕著な事件がマクスウェル方程式による電磁気法則の発見であったと判断されることはほとんど間違いない。アメリカの南北戦争も同じ頃のこの科学上の事件に比べたら色あせて一地方の取るに足らぬ事件になってしまうであろう。（ファインマン物理学 III 電磁気学、岩波書店）」

ちなみに、世界史を学んだ人にはわかるかもしれないが、米国人にとって、南北戦争（米国では Civil War という）は、英国との独立戦争と並んで、最も重大な歴史的イベントなのである。

さて、それほど重要なマクスウェル方程式とは、以下の4つの偏微分方程式である（記憶せよ）：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (33.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (33.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (33.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (33.4)$$

ここで、 \mathbf{E} は電場、 \mathbf{B} は磁束密度である。それらの定義は、式 (29.5) で述べた。 ρ は電荷密度（単位体積あたりの電荷）である。電荷とは、質量と同じように、物質が根源的に持っている性質（物理量）のひとつである。そういうものが自然界には存在するのだとしか言いようがない。 \mathbf{j} は電荷のフラックス、つまり単位時間あたり単位面積を通過する電荷である。普通はこれを電流密度という。

$\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{j}$ はベクトル場であり、 ρ はスカラー場である。 ϵ_0 は「真空の誘電率」と呼ばれる定数、 μ_0 は「真空の透磁率」と呼ばれる定数である。

注意: 本によっては式 (33.4) のかわりに次式を載せるものもある:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (33.5)$$

これは、式 (33.4) の両辺を $\epsilon_0 \mu_0$ で割り、

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2 \quad (33.6)$$

と定義することで得られる。式 (33.4) と式 (33.5) は同等の式であり、どちらを覚えても良い（違いは慣習にすぎない）。ちなみに、式 (33.6) で定義される定数 c が光の速さを表すことを、すぐあとで学ぶ。

問 789 マクスウェル方程式を5回書いて記憶せよ。

問 790 式 (33.6) を使って、式 (33.4) と式 (33.5) が同じ方程式であることを示せ。

マクスウェル方程式は、2つのベクトル場 \mathbf{E} と \mathbf{B} を、電荷の在り方（電荷密度と電流密度）に関連付ける方程式である。それは、 \mathbf{E} と \mathbf{B} それぞれの divergence と rotation がどのように決まるかを記述している。これら

^{*1} リチャード・ファインマン (1918-1988)。1965年、「量子電磁力学」の功績で、日本の朝永振一郎らとともにノーベル物理学賞受賞。ちなみに朝永振一郎は、筑波大学の前身である東京理科大学でこの研究を行った。

を組み合わせると、どんな状況であっても、 E と B を決定することができる。電磁気学における現象は、 E と B そのものや、それによって電荷が力を受ける運動として表現できる。従って、電磁気学ではマクスウェル方程式が基本法則なのである。

なぜマクスウェル方程式が成り立つのかは、誰にもわからない。そのように自然は造られているとしか言いようがない。人間は、様々な実験事実につじつまがあうような方程式を探して、試行錯誤の結果、この方程式を探り当てたのだ。

似たようなことは、物理学や科学の歴史の至る所にある。自然現象を統一的に説明する「基本法則」を人間が知るには、その手がかりは自然現象の中にしかない（神のお告げや宇宙人のメッセージを得る手段を誰かが持っているなら話は別だが）。そして科学者は、さまざまな複雑な自然現象を、実験という手段で整理し、その結果を「うまく説明する」ことのできる理論を、手を変え品を変えてひねりだし、「つじつま合わせ」を延々と繰り返す。「つじつま合わせ」と聞くと、なんだかずくてせこいことのように聞こえるかもしれないが、実際、神ならぬ人間ができるのはそれしかないのだ。

ただ、我々が日常生活の嘘や失敗をごまかすための「つじつま合わせ」と科学の「つじつま合わせ」が大きく異なる点がある。前者は、とにかくその場がしのげれば OK であり、時には事実を歪めることもあるかもしれない。しかし、後者には、そのようなことは許されない。事実を「無かったこと」にはできないし、「つじつま」はあらゆる角度から徹底的に検証され、矛盾があったら棄てられるのである（これは、推理小説で探偵が試行錯誤して犯人を見つけるプロセスに似ている）。そのような厳しいチェックを耐えて生き残るわずかな理論だけが「基本法則」なのである。

しかし、我々のような後世の人々がそのような基本法則を学ぶときには、ついつい、「なぜそれが成り立つのだろう」とか「もっとわかりやすく説明してくれ」と考えてしまう。つまり、その基本法則の「背後」には、もっとはっきりしたわかりやすい事実や論理やアイデアがあって、それを使えば目の前の難しげな基本法則とやらをすっかり理解できるのではないか、と思ってしまうのである。しかし、そのような試みは、たいてい、失敗する。凡人である我々がそんなことに成功するくらいならば、長い時間をかけて多くの科学者たちが苦闘したはずがないのである。

人は、新しい概念に出会ったときに、それを、素直に受け入れることに抵抗する。できることならば、自分の中に既にある概念に近づけて理解し、消化しようと試みる。しかしそれは、往々にして、自然や真実のあり様を、ねじ曲げ、矮小化してしまう危険がある。「難しい理論をわかりやすく解説する」という話は、多くがそういうものである。そういうのを讀んだり聞いたりするのはいいけれど、それで「わかった気になる」のは危険である。

自分の思い込みやイメージを離れて、ものごとをあるがままに受け入れることは難しい。それができる柔軟さと強さのことを、知性や教養と呼ぶのではないだろうか？ 数学や物理学は、その試金石でもある。

33.2 点電荷まわりの電場 (クーロンの法則)

さて、マクスウェル方程式が様々な電磁気現象を説明できることの一例を挙げよう。電荷 q が、空間にぼつんと浮かんでいる。そのまわりには何も無い。この電荷の周囲の電場を求めてみよう。この電荷を中心とする半径 r の球 Ω を考える (図 33.1):

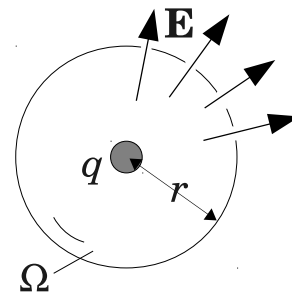


図 33.1 点電荷 q を取り囲む、半径 r の仮想的な球 Ω 。その表面の電場 E を考える。

この球 Ω の内部において、式 (33.1) を体積分すれば、

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_{\Omega} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (33.7)$$

である。式 (33.7) の左辺はガウスの発散定理 (P.192 式 (32.10)) によって、

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \quad (33.8)$$

となる。ここで Σ はこの球の表面である。一方、式 (33.7) の右辺は、

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho dV \quad (33.9)$$

であるが、この積分記号以下は、球の中の電荷密度の体積分なので、要するに球の中の総電荷である。といっても、今の場合は、球の中心に電荷 q があるだけだから、式 (33.9) は q/ϵ_0 に等しい。従って、

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (33.10)$$

である。さて、球の表面での電場 \mathbf{E} は、球対称に分布しているはずである。球面に対して、特定の方向に傾いているとは考えられない。従って、 \mathbf{E} は、どの場所でも球面に対して垂直である。すなわち、 $\mathbf{E} = E\mathbf{n}$ である。ここで E は \mathbf{E} の大きさであり、球面上ではどこでも等しい。すると、式 (33.10) の左辺は、

$$\int_{\Sigma} E\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Sigma} E dS \quad (33.11)$$

となる。 E は球面上では定数とみなせるから、積分は単なる球面積の掛け算になり、式 (33.11) は、

$$4\pi r^2 E \quad (33.12)$$

となる。従って、

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (33.13)$$

従って、

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (33.14)$$

となる。

もし、たまたまこの球面上に電荷 q' が静止して存在したら、この電荷に働く力の大きさ F は、P.178 式 (30.58) より $q'E$ なので、

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (33.15)$$

となる。この式を「クーロンの法則」という。このように、距離 r だけ離れた電荷どうしが及ぼす力は距離の 2 乗に反比例する*2。

さて、マクスウェル方程式の第一方程式は、明らかに線型微分方程式である。従って「重ね合わせの原理」が成り立つ。例えば、ある電荷分布 $\rho_1(x, y, z)$ が与えられたとき、それによって作られる電場 \mathbf{E}_1 に関するマクス

*2 クーロンの法則は、1 学期「物理学」でも習った。そのときは、

$$F = \frac{k q_1 q_2}{r^2}$$

という式であった。この式は、 q_1 を q に、 q_2 を q' に、そして k を $1/4\pi\epsilon_0$ に置き換えれば、式 (33.15) に一致する。

ウェル方程式の第一方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1(x, y, z) = \frac{\rho_1(x, y, z)}{\epsilon_0} \quad (33.16)$$

である。また、別の電荷分布 $\rho_2(x, y, z)$ が与えられたとき、それによって作られる電場 \mathbf{E}_2 に関するマクスウェル方程式の第一方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_2(x, y, z) = \frac{\rho_2(x, y, z)}{\epsilon_0} \quad (33.17)$$

である。ここで式 (33.16)(33.17) を足せば、

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\epsilon_0} \quad (33.18)$$

となる。この式から明らかなように、 $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ はマクスウェル方程式の第一方程式を満たす。従って、 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ は、 $\rho_1(x, y, z) + \rho_2(x, y, z)$ という電荷分布が与えられたときの電場 \mathbf{E} になる。

33.3 直線電流のまわりの磁束密度

マクスウェル方程式を使って、磁気に関する法則を導出してみよう。今、長い直線状の電線を、電流 I が流れている。そういう電流の近くに方位磁針を置くと、方位磁針の針がふれることを、諸君は小学生のときに実験しただろう。

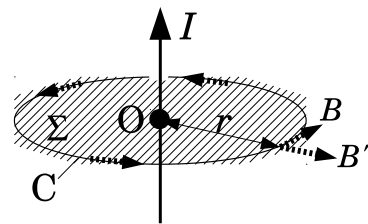


図 33.2 直線電流 I のまわりの磁束密度。円周に沿った成分 B と、円周に直交する成分 B' に分けて考える。対称性により、 B も B' も、円周上のどこでも一定である。 B, B' の両方に直交する方向の磁束密度はここでは考えない。

電流に直交する平面をとり、電流と平面の交点を原点 O とする (図 33.2)。 O を中心として半径 r の円 C をこの平面上に考える。円 C の内部を Σ とする。式 (33.4) の両辺を面積分すると、以下ようになる:

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Sigma} \left(\mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (33.19)$$

左辺はストークスの定理 (P.198 式 (32.62)) から、

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} \quad (33.20)$$

となる。 Γ は、円 C の円周上のある 1 点から、円周をぐるっとまわってその点に戻るような経路である。

ここで、定常状態、すなわち電磁場は時間的に変化しない状況を仮定する。すると、右辺の $\partial \mathbf{E} / \partial t$ は 0 になるので、右辺は、

$$\mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (33.21)$$

となる。この積分は、電荷のフラックスの面積分なので、円 C を通過する単位時間あたりの電荷量、つまり電流 I である。従って、式 (33.19) は、

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I \quad (33.22)$$

となる。この系は電流を軸とする対称性を持つから、磁束密度 \mathbf{B} も電流のまわりで対称のはずである。従って、円周上の \mathbf{B} を円周に沿った成分 B と円周に直角な成分 B' にわけると、 B も B' も、円周のどの部分でも一定である。式 (33.22) の左辺の積分は、円周に沿った微小変位による積分だから、それに直交する成分である B' は無関係であり、

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma} B ds \quad (33.23)$$

となる (ds は dr の大きさ)。 B は一定だから、この式は、

$$B \oint_{\Gamma} ds \quad (33.24)$$

となる。この積分は、円周に沿って微小変位の長さを足すだけだから、その結果は円周の長さになる。従って、この式は、

$$2\pi r B \quad (33.25)$$

となる。従って、式 (33.22) は、

$$2\pi r B = \mu_0 I \quad (33.26)$$

となる。すなわち、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (33.27)$$

となる。つまり、円周方向の磁束密度は、電流からの半径に反比例することがわかった。

では、残りの成分、つまり B' はどうなるのだろうか？ 詳細は省略するが、電流をとりまく円筒を考え、その円柱

内でマクスウェル方程式の第二方程式を体積分すると、円筒の側面で、側面に垂直な成分があると困ることになる (円筒の上面と下面では、対称性により、 \mathbf{B} は 0 か、もしくは上下で等しくなければならないので、上下面を介して円筒に入る磁束密度の面積分は 0 である)。従って、 $B' = 0$ としてよい。

33.4 電磁誘導

中学校理科で習ったように、ループ状の導線に、磁石を近づけたり離したりすると、導線に電流が流れる。このような現象を電磁誘導という。水力発電・火力発電・原子力発電などはどれも、何らかの方法でタービンを回すが、タービンの回転運動によるエネルギーを電気エネルギーに変換するのは、電磁誘導が原理である。

電磁誘導も、マクスウェル方程式で説明できる。

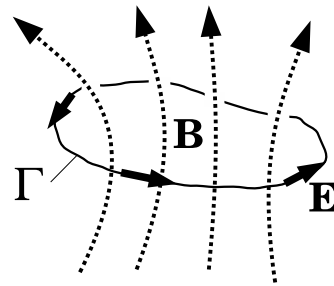


図 33.3 ループ Γ を貫く磁束密度 \mathbf{B} 。 \mathbf{B} を Γ の内部 (Σ) で面積分したものが磁束 Φ 。 Φ の時間変化が、 Γ に沿ったループ状の電場 \mathbf{E} をもたらす。

問 791 空間に、ループ状の経路 Γ を考え (図 33.3)、 Γ で囲まれる面を Σ とする。式 (33.3) を Σ で面積分することで、次式を示せ:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (33.28)$$

式 (33.28) の左辺は電場の線積分なので、電位 (電圧) と同じ次元を持つ量である。これを起電力といい、 \mathcal{E} と表す。右辺に現れる、ループを貫く磁束密度の面積分を磁束と呼び、 Φ と表す。すると式 (33.28) は、

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (33.29)$$

となる。つまり、ループに発生する起電力は、ループを貫く磁束の変化率 (時刻による微分) に等しい大きさを

持つ。

ここで奇妙なことがある: ループ上の任意の一点 P を考えれば, 式 (33.28) の左辺は P から出発して P に戻る線積分である。それは, 式 (30.64) によって, 「P と P の間の電位差」を与えるはずだ。つまり,

$$\phi(P) - \phi(P) = - \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad \dots? \quad (33.30)$$

となるのだろうか? もしそうなら, 左辺は 0, 従って右辺も 0, 従って起電力は存在しないことになる。実は, 式 (33.30) が成り立つのは, 時間的に変動する磁束密度が存在しない時だけなのである。変動する磁束密度があるときには, そもそも式 (30.64) が成り立たないのである。詳しいことは電磁気学を勉強して欲しい。

33.5 電荷の保存則

電荷は, 質量と同じように, 物質の根源的な属性のひとつである。正か負のどちらか片方の電荷が突然どこかで生まれたり消えたりすることはない。これを電荷の保存則という。この法則も, マクスウェル方程式から導出できる。

問 792 式 (33.4) の両辺の発散をとって次式を示せ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j} \quad (33.31)$$

ヒント: 左辺は P.194 式 (32.24) より 0。右辺で $\operatorname{div} \mathbf{E}$ が出てくるが, 式 (33.1) を使って ρ/ϵ_0 に変換する。

式 (33.31) は P.188 式 (31.42) によく似ている。式 (31.42) の導出過程を振り返ればわかるが, 式 (33.31) は空間のある場所に流れ込む電荷のフラックス (電流密度) に応じて, その場の電荷密度 (正負の電荷の差し引きの密度) が変化することを意味している。つまり, 電荷の増減は, 外からの流入や流出だけで決まるのであり, (正負のどちらか片方の) 電荷が, どこかの場所で生まれたりどこかの場所で消えたりはしない, ということを表している。

問 793 家の電気コンセントからは, 片方の穴から電子が出てきて, 諸君の電気製品を通過してもう片方の穴に帰っていく。このとき, 上述した「電荷の保存則」によると, 諸君は電気会社から受け取った電荷 (電子) や, その流れ (電流) をそのまま電気会社に返却している。ならば, 諸君はなぜ電気会社に電気料金を払わねばなら

ないのか?

33.6 電磁波

ここまでの計算を見て, 諸君は, マクスウェル方程式とは結局, クーロンの法則や直線電流まわりの磁束密度など, 高校物理で習ったような法則を, 数学を使って格好良く書き直しただけじゃないのか? と思うかもしれない。実際, マクスウェル方程式は, これらの法則につじつまがあうような方程式を探すことで得られたので, そういう面もある。しかし, やはりそれだけではないのだ。マクスウェル方程式は, これら以外の様々な物理現象をも予測し, 説明することに成功したのだ。その華々しい成果が電磁波である。マクスウェル方程式を完成させたとき, 人類は, その中から電磁波という物理現象を理論的に予測し, その後に実際に発見したのである。

問 794 電流も電荷もない空間 (真空!) を考えると,

- (1) マクスウェル方程式は以下のようなことになることを示せ:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (33.32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (33.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (33.34)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (33.35)$$

- (2) 式 (33.34) の両辺の rotation を考えることで, 次式を示せ:

$$-\Delta \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) \quad (33.36)$$

ヒント: 左辺では, P.194 式 (32.29) を使う。右辺は, t に関する微分と $\nabla \times$ の順序を入れ換えてよい (微分の順序交換)。

- (3) これに式 (33.32) と式 (33.35) を使うと,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \mathbf{E} \quad (33.37)$$

となることを示せ。これは P.188 式 (31.52) と同じ形の式ではないか!

- (4) 以下の関数 (ベクトル場) $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ を考える:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{0x} \sin(kz - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33.38)$$

(E_{0x}, k, ω は定数とする) 次式:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\epsilon_0 \mu_0} \tag{33.39}$$

が成り立つとき、式 (33.38) は式 (33.37) の解になることを示せ。

- (5) 式 (33.38) は、 x 軸方向に電場が振動しながら z 方向に移動する波である。波の速さ c を、 ϵ_0 や μ_0 であらわせ (ヒント: 式 (33.37) を式 (24.15) と比較する。もしくは、式 (24.55) を使ってもよい)。
- (6) ϵ_0 や μ_0 の値を、物理学の教科書などで調べて、 c の値が 3.0×10^8 m/s となることを確認せよ。

このように、式 (33.37) は波動方程式である。人類は、マクスウェル方程式を数学的に展開することで、空間に伝わる波を発見した。それは、電場と磁束密度が振動することによって伝わる波である。それを電磁波と呼ぶ。それが、我々のまわりに満ちあふれている「光」の正体だったのだ。

問 795 前問の続きを考える。

- (1) 式 (33.35) の両辺の rotation を考え、式 (32.29)、式 (33.33)、式 (33.34) を使うことで、次式を示せ:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \mathbf{B} \tag{33.40}$$

- (2) 電場 \mathbf{E} が式 (33.38) で与えられているとき、以下の関数 (ベクトル場) $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ は、式 (33.40)、式 (33.33)、式 (33.34)、式 (33.35) を満たすことを示せ:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{kE_{0x}}{\omega} \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{33.41}$$

- (3) 2つのベクトル場: 式 (33.38) と式 (33.41) は、常に、どこでも、直交していることを示せ。

前問・前々問で調べた電磁波は、図 33.4 のようになる。波の進行方向と、電場の振動方向、そして磁束密度の振動方向は、互いに直交することに注意しよう。ここでは詳述しないが、このような性質はどんな電磁波にも成り立つことを覚えておこう。

さて、光、つまり電磁波の方程式 (式 (33.37) や式 (33.40)) は線型波動方程式なので、光という物理現象

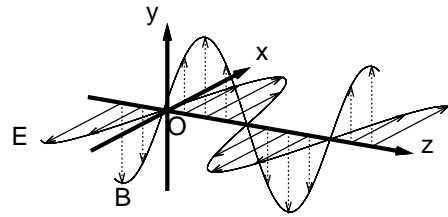


図 33.4 z 軸方向に進行する電磁波の模式図。式 (33.38)、式 (33.41) において、 $t = 0$ としたときの波形。この波形が、時間とともに、 z 軸方向に平行移動していく。

には重ね合わせの原理が効く。従って、例えば、電磁波を波長ごとの正弦波の重ね合わせで表現することができる (その線型結合の係数、つまり各波長の電磁波がどのくらいの割合で混ざっているかを示す概念をスペクトルという)。

それだけではない。電磁波では、電場は進行方向に垂直に振動するが、そもそも「進行方向に垂直な方向」というのはたくさんの可能性があり得る。そのことと、重ね合わせの原理から、電磁波のおもしろい性質が理解できる。それは「偏光」である。

問 796 (発展) 引き続き、電流も電荷もない空間 (真空!) をかんがえる。

- (1) 以下のようなベクトル場を考える (E_{0y}, δ は定数):

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{0y} \sin(kz - \omega t + \delta) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{33.42}$$

式 (33.39) が成り立っているとき、式 (33.42) は式 (33.37) の解であることを示せ。

- (2) 式 (33.38) と式 (33.42) の線型結合も式 (33.37) の解であることを確認せよ。すなわち、 a, b を任意の実数として、次式が式 (33.37) を満たすことを示せ。

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} aE_{0x} \sin(kz - \omega t) \\ bE_{0y} \sin(kz - \omega t + \delta) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{33.43}$$

- (3) $aE_{0x} = bE_{0y}$ かつ、 $\delta = 0$ のとき、 \mathbf{E} を xy 平面上にプロットした軌跡は、直線上を移動する。それはどのような直線か?

- (4) $aE_{0x} = bE_{0y}$ かつ, $\delta = \pi$ のときも, \mathbf{E} を xy 平面上にプロットした軌跡は, 直線上を移動する。それはどのような直線か?
- (5) $aE_{0x} = bE_{0y}$ かつ, $\delta = \pi/2$ のときは, \mathbf{E} を xy 平面上にプロットした軌跡は, 円を描くことを示せ。

このように, 電場の振動方向で電磁波を特徴づける考え方を「偏光」という。電場の振動が直線上に限定されるような電磁波, つまり前小問(3)(4)のような電磁波を「直線偏光」という。一方, 電場が円を描くように変動するような電磁波, つまり前小問(5)のような電磁波を「円偏光」という。円偏光は図 33.5 や図 33.6 のような波形である。

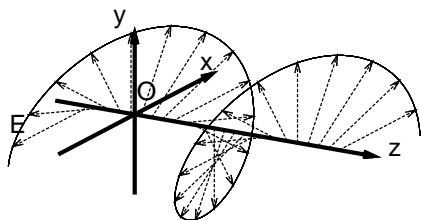


図 33.5 z 軸方向に進行する円偏光電磁波の模式図。式 (33.43) において, $aE_{0x} = bE_{0y}$, $t = 0$, $\delta = \pi/2$ としたときの波形。この波形が, 時間とともに, z 軸方向に平行移動していく。電場だけを描いてあることに注意せよ。磁束密度を重ねて描くと, ごちゃごちゃして見えにくくなってしまう。

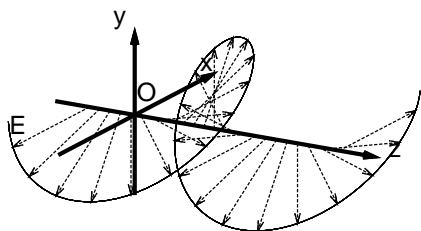


図 33.6 z 軸方向に進行する円偏光電磁波の模式図。式 (33.43) において, $aE_{0x} = bE_{0y}$, $t = 0$, $\delta = -\pi/2$ としたときの波形。

これらの中間的な偏光もある。例えば $aE_{0x} = bE_{0y}$ かつ, $\delta = \pi/6$ のときは, \mathbf{E} を xy 平面上にプロットした軌跡は楕円を描く。このような偏光を「楕円偏光」という。また, 上の小問(5)で δ が $\pi/2$ でなくて $-\pi/2$ のときは, (5)と同様に円偏光にはなるが, (5)とは軌跡の向き(電場の回転方向)が逆になる。

偏光は, 実用的にも重要な物理現象である^{*3}。例えば, 微生物などのサンプルを観察するとき, 微分干渉顕微鏡^{*4}という, 偏光を利用した特殊な顕微鏡を使うことがある。色素を持たない(透明な)サンプルは, 普通の光学顕微鏡では, 透き通ってしまってもうまく観察できないが, この顕微鏡ではうまく観察できるのだ。

この顕微鏡は, 照明光を 2 つの異なる直線偏光に分割し, 少しずらして試料に当て, 透過してからずれを戻して合成する。このとき, 2 つの偏光が違った経路が微妙に違うことから, 試料の屈折率の分布の差(微分)が強調される。その結果, 試料の内部構造に対応するコントラストが明瞭に観察できるようになるのだ。

偏光は, パソコンや携帯電話の画面に使われる, 液晶ディスプレイの動作原理である。また, 航空機や人工衛星から森林や農地, 砂漠などを観測する技術(リモートセンシング)では, マイクロ波(波長が数 cm から数 10 cm 程度の電磁波)の偏光が重要な役割を果たす。

おわりに

数学を勉強するのは, 役に立つから, そして楽しいからだ, と, 「はじめに」で書いた。この授業で数学を詰め込まれすぎて嫌になってしまったなら, 申し訳ない。学んですぐわかるほど数学は簡単でないが, じっくり基礎から考えれば理解できるから, 数学嫌いにならないで欲しい。

考えることより, 定義を覚えること・素直になることを要求されて戸惑った人も多いただろう。誤解しないで欲しいが, 考えることは常に大事。ただ, 考える為には, 材料や手がかりをまず詰め込む必要があるのだ。

多くの先人が緻密に積み上げた数学は, 抽象的で捉えにくい, 単なるパズルとは違う体系性がある。その体系は多くの学問を支え, 我々の世界観を支える。数学全体を巨大な城に例えれば, 諸君がこの 1 年間で学んだの

^{*3} 人間だけでなく, 昆虫(ミツバチなど)も偏光を利用して生きていることを諸君は習ったことがあるだろう。

^{*4} Differential Interference Contrast microscope: DIC

は石垣のひとつの小さな石に過ぎない。それほど数学は巨大だ。我々は生物資源学類だから、数学だけ勉強するわけにはいかないが、さりとて「ここまで勉強すれば十分」という目安もない。諸君の進路によっては、ここまでの数学は必要ないかもしれないし、全然足りないかもしれない。それは誰にもわからない。学問や技術は日々進歩するし、人生は紆余曲折するものだからだ。数学だけでなく多くの勉強はそういうものだ。

それでも諸君は何か(数学でなくてもよい)を毎日こつこつ勉強し続けるべきだ。学んだことはいずれ役に立つ。直接には役に立たなくても、世界の仕組みの一部を体系的に理解することで人生は豊かになる。地道な努力の積み重ね自体も諸君を成長させ、諸君に自信を与える。

勉強には時間が必要である。「必要なことは必要な時が来たら勉強しよう」という考えでやっていけるほど人生は長くもないし簡単でもない。しかし、何かをこつこつ勉強すれば、意外に遠くまで行けるものだ。

「あたかも一万年も生きるかのように行動するな。不可避のものが君の上にかかっている。生きているうちに、許されているうちに、善き人たれ。」

..... マルクス・アウレリウス

33.7 解答

答 789 略(がんばれ!)

答 789 略(簡単!)

答 791 略。ヒント: 式(33.3)を Σ で面積分する。左辺にストークスの定理を使う。右辺では、時刻による偏微分を積分と順序交換してよい。

答 792 略。

答 793 略。ヒント: 電気料金として課金されるものの単位はどうなっているだろうか? クーロン(電荷の単位)やアンペア(電流の単位)ではないはずだ。注: 「電力」と「電力量」の違いに注意せよ。

答 794

(1) 式(33.1)~式(33.4)において、恒等的に $\rho = 0$ かつ $\mathbf{j} = 0$ とすれば、与式を得る。

(2)~(4) 略。

(5)

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

(6) 略。

答 795 略。

答 796

(1) 略。

(2) 略。

(3) $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ とする。 $aE_{0x} = bE_{0y} = A$, $\delta = 0$ とすると,

$$E_x = A \sin(kz - \omega t)$$

$$E_y = A \sin(kz - \omega t)$$

となる。従って、 $E_y = E_x$ となる。従って、点 (E_x, E_y) を xy 平面上にプロットすると、その点は直線 $y = x$ の上を移動する。

(4) $aE_{0x} = bE_{0y} = A$, $\delta = \pi$ とすると,

$$E_x = A \sin(kz - \omega t)$$

$$E_y = A \sin(kz - \omega t + \pi) = -A \sin(kz - \omega t)$$

となる。従って、 $E_y = -E_x$ となる。従って、点 (E_x, E_y) を xy 平面上にプロットすると、その点は直線 $y = -x$ の上を移動する。

(5) $aE_{0x} = bE_{0y} = A$, $\delta = \pi/2$ とすると,

$$E_x = A \sin(kz - \omega t)$$

$$E_y = A \sin(kz - \omega t + \pi/2) = A \cos(kz - \omega t)$$

となる。従って、 $E_x^2 + E_y^2 = A^2$ 。従って、点 (E_x, E_y) を xy 平面上にプロットすると、その点は半径 A の円周上を移動する。

一問一答

- 電場のガウスの定理。入試を思い出しました。... 「ガウスの発散定理」と、電場に関する「ガウスの法則」は、一応、別のもので。これらの2つを組み合わせると、点電荷のまわりの電場(クーロンの法則)やコンデンサー内の電場などを求めることができるのです。

索引

- amplitude 108
 angular velocity 109
 Beer 2
 coordinate 81
 curl 172, 194
 div 171, 185
 divergence 171, 185
 Fick 188
 flux 181
 Fourier series expansion 93
 grad 171
 gradient 171
 Lambert 2
 metric space 88
 operator 57
 period 109
 phase 109
 rot 172
 rotation 172, 194
 wave length 108
 wave number 108
 位相 109
 一次結合 53
 一次従属 77
 一次独立 77
 一般解 57
 エネルギー固有値 139
 演算子 57
 演算子法 56
 円偏光 209
 オームの法則 5
 外積 150
 解析解 17
 回転 172, 194
 ガウスの定理 192
 ガウスの発散定理 191
 カオス 20
 角周波数 109
 角振動数 109
 角速度 109
 重ね合わせ 53
 重ね合わせの原理 61, 74
 画像解析 148
 ガリレオ・ガリレイ 143
 関数空間 51
 基底 80
 起電力 206
 軌道 166
 逆行列 32
 キャパシタンス 5
 吸光度 2
 境界条件 107
 共分散行列 35
 行ベクトル 49
 行列式 145, 148
 極座標 162
 寄与率 41
 キルヒホッフの法則 102
 均時差 166
 クーロンの法則 205
 グラジエント 171
 クロネッカーのデルタ 91
 計量空間 88
 原子軌道 166
 勾配 171, 172
 固有エネルギー 139
 固有関数 129
 固有状態 139
 固有値 129
 固有方程式 129
 コンデンサー 5
 座標 81
 座標成分 81
 次元 81
 磁束 206
 磁束密度 160, 203
 質量保存則 188
 時定数 5
 写像 67
 周回積分 195
 周期 109
 周波数 109
 主成分分析 38
 シュレーディンガー方程式 60, 141
 シュワルツの不等式 91
 循環 194
 状態ベクトル 135
 常微分方程式 59
 情報エントロピー 9
 情報量 8, 9
 初期位相 109
 初期条件 107
 振動数 109
 振幅 108
 数値解 17
 スカラー 47

- スカラー 3 重積 150
 スカラー場 159
 ストークスの定理 197
 スピン 136
 スペクトル 96, 208
 正規直交基底 91
 正則行列 32
 生物多様性 10
 線型結合 53
 線型写像 69
 線型従属 77
 線型代数学 83
 線型同次方程式 55
 線型独立 77
 線型非同次微分方程式 72
 線型微分演算子 72
 線型同次微分方程式 55
 線型微分方程式 72
 線型変換 71
 線積分 175
 全分散 40
 双曲線関数 11
 測量 148
 ソリトン 105
 対称行列 34
 ダイバージェンス 185
 太陽天頂角 166
 多重線型写像 87
 多変量解析 35
 ダランベールの解 105
 単位ベクトル 89
 弾性力 24
 中心化 35
 直線偏光 209
 直交 90
 直交行列 36
 デカルト座標 145
 電圧 178
 電位 178
 電荷 203
 電荷の保存則 207
 電磁気学 50
 電子軌道 166
 電磁場 160
 電磁波 208
 電磁誘導 206
 転置 33
 転置行列 33
 電場 160, 203
 電流密度 207
 透磁率 203
 等値面 173
 特性方程式 58
 ドナルドダック効果 118
 朝永振一郎 143
 トレース 34
 内積 87
 ナブラ演算子 171
 熱伝導率 187
 ノルム 89
 ノルム空間 51
 場 159
 バイト 8
 ハイパボリックコサイン 11
 ハイパボリックサイン 11
 ハイパボリックタンジェント 11
 波形 103
 波数 93, 108
 パスカルの原理 174
 バタフライ効果 20
 波長 108
 発散 171, 185
 ハミルトニアン演算子 142
 ハミルトニアン行列 139
 ビオ・サバルの法則 176
 微小面積ベクトル 193
 ピタゴラスの定理 92
 ビット 8
 非同次項 72
 比熱比 116
 微分干渉顕微鏡 209
 標準基底 80
 標本共分散 35
 標本相関係数 35
 ファインマン 143, 203
 ファラド 6
 フィックの法則 188
 フーリエ級数展開 93
 フーリエの法則 187
 フーリエ変換 61
 フックの法則 24
 不定 79
 フラックス 181
 分散共分散行列 35
 分子軌道 166
 分子軌道法 141
 平行 90
 ベクトル 48
 ベクトル空間 48
 ベクトル積 150
 ベクトル場 159
 変位ベクトル 172
 偏光 208
 偏微分方程式 60, 103
 ボアソン分布 8
 保存力 177, 195
 ポテンシャルエネルギー 177
 ボルツマンの原理 10
 マイクロ波 209
 マクスウェル方程式 60, 203
 マルクス・アウレリウス 210
 ミカエリス・メンテンの式 23
 モル吸収係数 2
 ヤコビアン 165
 ユークリッド空間 87
 誘電率 203
 ラプラシアン 188
 ラプラス演算子 188
 ラプラス方程式 60, 188
 ランベルト・ベールの法則 2
 流束 181
 量子数 166
 量子力学 50, 135
 ルンゲ・クッタ法 18
 列ベクトル 49
 連続の式 188
 ローディングベクトル 38
 ロジスティック方程式 18
 ロトカ・ヴォルテラ方程式 20